PROGRAMMATION LINÉAIRE

20 Juin 2020
2.0

Table of contents

Objectives

Ce module a pour objectifs de sensibiliser l'étudiant à l'importance pratique des problèmes d'optimisation linéaires, de maîtriser l'ensemble numérique sous-jacent, et de pouvoir utiliser ces techniques dans des problèmes pratiques.

Près-requis

Pour que les étudiants puissent assimilés ce cours il faut bien avoir au moins ces connaissances ci-dessous :

- Mathématiques et informatique générale,
- Métriser le calcul matricielle.

Chapitre I : Éléments de Base de la Programmation Linéaire

I

1. Modélisation d'un Problème de programmation linéaire

Un modèle est une représentation de la réalité qui capture l'essentiel de la réalité. Modéliser un problème de programmation linéaire revient à distinguer trois éléments essentiels appelés facteurs. On distingue trois type de facteurs :

1. Facteurs contrôlables : Ce sont les facteurs que l'on peut modifier dans le système. On les appelle variables de décision.
2. Facteurs non contrôlables : Ce sont les paramètres du système étudié et sur lesquels on ne peut apporter aucune modification. On les appelle contraintes.
3. L'objectif : Il concrétise le but à atteindre à travers l'étude.

2. EXEMPLES

Pour mieux illustrer la nature des problèmes abordés en programmation linéaire ainsi que la technique de résolution utilisée, considérons les exemples suivants :

Example:Exemple (Problème de Transport)

Une entreprise stocke un produit dans trois dépôts différents $A_1,\ A_2\ et\ A3$ Les quantités stockées sont respectivement $a_1, a_2\ et\ a_3$. Les dépôts doivent alimenter quatre points de vente $B_1, B_2, B_3\ et\ B_4$.

La quantité nécessaire au point de vente B_i est b_i.

Le coût de transport d'une unité du produit du dépôt A_i vers le point de vente B_j est c_{ij} .

Comment l'entreprise doit elle répartir les stocks du produit entre les points de vente afin de minimiser ses frais de transport ?

Identification des variables de décision

Notons par : $x_{ij} \geq 0,\ i = 1, ..., 3,\ j = 1, ..., 4$ la quantité du produit à acheminer de A_i vers B_j .

Contraintes du problème

Le total des quantités à acheminer du dépôt A_1 vers les différents points de vente ne peut pas excéder la quantité de stock disponible au dépôt A_1. De même pour les dépôt A_2 et A_3.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq a_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq a_3, \end{cases} \qquad (1.1)$$

que l'on peut écrire sous forme :

$$\textstyle\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq a_i, \ \forall i = 1, ..., 3 \qquad (1.2)$$

Le total des quantités acheminées des différents dépôt vers B_1 doit être supérieur ou égal à la quantité nécessaire pour le fonctionnement de ce dernier. De même pour tous les autres points de vente B_2, B_3 et B_4.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq b_3, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq b_4, \end{cases}$$

que l'on peut écrire sous forme :

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} \geq b_j \ = \ \forall j = 1, ..., 4 \qquad (1.3)$$

Fonction Objectif

Minimiser le coût total de transport.

$$min \ \ f(x_{11}, x_{12}, ..., x_{34}) \ = \ \textstyle\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \ (1.4)$$

En réécrivant les formules *(1.1)*, *(1.2)*, *(1.3)* et *(1.4)* nous aurons le modèle de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} min \ \ \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}, \\ s/c, \\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq a_i, \ \forall i = 1, ..., 3, \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leq b_j, \ \forall j = 1, ..., 4, \\ x_{ij} \ \geq \ 0, \ i = 1, .., 3, \ \ j = 1, ..., 4, \end{cases}$$

Example:Problème de Planification de Production

Soient m machines $M_1, M_2, ..., M_m$ qui fabriquent en série n types de produits $P_1, P_2, ..., P_n$. On suppose que la machine M_i est d'une capacité maximale de d_i unités de temps $(i = 1, 2, ..., m)$ et que la fabrication d'une unité du produit P_j nécessite l'utilisation de la machine M_i durant t_{ij} unités de temps.

Soit c_j le gain relatif à la production d'une unité du produit $P_j \ \ (j = 1, 2, ..., n)$. Quel plan proposez vous pour l'entreprise afin de lui procurer un bénéfice maximal ?

Identification des variables de décision

Notons par :

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n \qquad (1.5)$$

la quantité du produit P_j à fabriquer.

Contraintes du problème

Le total des unités de temps passées sur la machine M_1 pour la fabrication de $x_1, x_2, ..., x_n$ unités des produits $P_1, P_2, ..., P_n$ respectivement ne peut pas excéder la capacité maximale d_1 de la machine. De même pour toutes les autres machines $M_2 M_3, ..., M_m$.

$$\begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + ... + t_{1n}x_n \le d_1, \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + ... + t_{2n}x_n \le d_2, \\ \vdots, \\ t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + ... + t_{mn}x_n \le d_m, \end{cases}$$

que l'on peut écrire sous forme :

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j \le d_i, \quad i = 1, ..., m \qquad (1.6)$$

Fonction Objectif

Maximiser le gain total de l'entreprise.

$$max \;\; f(x_1, x_2, ..., x_n) \;=\; \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.7)$$

En réécrivant les formules *(1.5)*, *(1.6)* et *(1.7)* nous aurons le modèle de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} max \;\; \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ s/c, \\ \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j \le d_i, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., n, \end{cases}$$

3. Résolution Graphique

Lorsqu'il n'y a que deux variables de décision, un problème linéaire peut être résolu de manière purement graphique en suivant le processus suivant :

1. On dessine les demi-plans des contraintes. On trace la droite frontière en remplaçant les inégalités par des égalités).
2. On détermine le domaine X définissant l'ensemble des points satisfaisant toutes les contraintes. Le domaine X est l'intersection de tous les demi-plans.
3. On trace la droite représentant la fonction objectif et passant par l'origine.
4. On translate la droite de la fonction objectif selon son vecteur normal.
5. Le point optimal est le dernier point du domaine X que la droite de la fonction objectif touchera lors de son déplacement.
6. Le vecteur normal de la droite définissant la fonction objectif indique le sens dans lequel on doit la translater pour trouver le point optimal : la droite $ax_1 + bx_2 + c$ a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
7. Si le vecteur normal indique un déplacement vers le haut, la fonction objectif doit couper l'axe Ox_2 le plus haut possible dans le cas d'une maximisation, et le plus bas possible dans le cas d'une minimisation, tout en touchant le domaine X.
8. Si le vecteur normal indique un déplacement vers le bas, la fonction objectif doit couper l'axe Ox_2 le bas possible dans le cas d'une maximisation, et le plus haut possible dans le cas d'une minimisation, tout en touchant le domaine X.
9. Si le vecteur normal est un vecteur horizontal (cas rare mais possible), la fonction objectif ne coupera pas l'axe Ox_2. Le point optimal sera, selon les cas, le plus éloigné ou le plus proche de l'axe Ox_2.

Example

À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des œufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 14 kg de lait. Il a deux spécialités : l'œuf Extra et l'œuf Sublime. Un œuf Extra nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 kg de lait. Un œuf Sublime nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 kg de lait. Il fera un profit de 20 DA. en vendant un œuf Extra, et de 30 DA. en vendant un œuf Sublime.

Combien d'œufs Extra et Sublime doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible ?

Formulation du problème

Notons $x_1 \geq 0$ le nombre d'œufs Extra et $x_2 \geq 0$ le nombre d'œufs Sublime à produire.

Étant données les réserves du chocolatier, les contraintes suivantes devront être satisfaites :

1. La quantité totale de cacao utilisée ne devrait pas excéder 18kg
   $x_1 + 3x_2 \leq 18$
2. La quantité totale de noisettes utilisée ne devrait pas excéder 8kg
   $x_1 + x_2 \leq 8$
3. La quantité totale de lait utilisée ne devrait pas excéder 14kg
   $2x_1 + x_2 \leq 14$

Le chocolatier cherche à maximiser la fonction objectif suivante :

$$max \ \ z = 20x_1 + 30x_2$$

Le problème linéaire à résoudre est alors :

$$\begin{cases} max \ \ Z = 20x_1 + 30x_2, \\ x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 14, \\ x_1, x_2 \ \geq 0, \end{cases} \qquad (1.8)$$

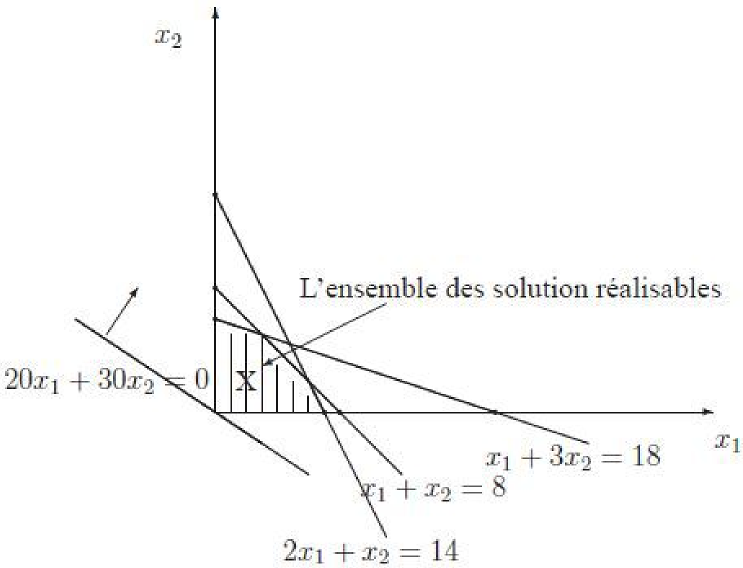


FIG 1.1 : Résolution graphique

La figure *1.1* indique dans sa partie hachurée l'ensemble des points (x_1, x_2) qui satisfont les contraintes du problème *(1.8)*. Tous les couples (x_1, x_2) de la partie hachurée satisfont les contraintes. Mais en fait, la solution optimale sera toujours l'un des sommets du polyèdre délimitant le domaine X des solutions réalisables. Il s'agit dans ce cas des sommets suivants :

1. intersection de la droite d'équation $x_1 + x_2 = 14$ avec l'axe Ox_1 : $(7, 0)$.

2. intersection de la droite d'équation $x_1 + 3x_2 = 18$ avec l'axe Ox_2 : $(0, 6)$.
3. intersection des droites $x_1 + x_2 = 8$ et $2x_1 + x_2 = 14$: $(6, 2)$.
4. intersection des droites $x_1 + x_2 = 8$ et $x_1 + 3x_2 = 18$: $(3, 5)$.
5. le point origine $(0, 0)$.

Le vecteur normal de la droite définissant la fonction objectif indique le sens dans lequel on doit la translater pour trouver le point optimal. le vecteur normal $\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ de la droite $20x_1 + 30x_2 = 0$ indique un déplacement vers le haut, la fonction objectif doit alors couper l'axe Ox_2 le plus haut possible, tout en touchant le domaine des solutions réalisables. On s'aperçoit que celle qui conserve un point en commun avec la région réalisable est la droite qui passe par le sommet (3,5). La solution optimale est donc

$(x_1^*; x_2^*) = (3; 5)$ et le bénéfice du chocolatier serait

$Z^* = 20(3) + 30(5) = 210Da$

4. Rappels d'Algèbre Linéaire

4.1. Espace Vectoriel

Definition: Définition 1.1 (Espace Vectoriel).

Un espace vectoriel $\mathbb{V}$ défini sur le corps des réels $\mathbb{R}$ est un ensemble d'éléments $x^1; x^2, \dots$ vérifiant : $\mathbb{R}$

- $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j x^j, \lambda_j \in \mathbb{R},\ x^j \in \mathbb{V},\ \forall j = 1, 2, ..., r$ est appelée combinaison linéaire des vecteurs $x_1, x_2, ..., xr$
(combinaison linéaire convexe si de plus $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0$
- Soient $x_1, x_2, \dots, x_r$ r vecteurs d'un espace vectoriel \mathbb{V}. On dit qu'ils sont linéairement indépendants si, $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j x^j = 0 \Rightarrow \lambda_j$
- La dimension d'un espace vectoriel $\mathbb{V}$ est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants dans et on note $dim(\mathbb{V})$.
- Si $dim(\mathbb{V} = r$, une base est un ensemble de r vecteurs $x^1, x^2, \dots, x^r$ de V linéairement indépendants.
- Soient $x^1, x^2, \dots, x^r$ une base de $\mathbb{V}$. La représentation d'un vecteur quelconque x de $\mathbb{V}$ comme combinaison linéaire de vecteurs de base est unique, c'est `a dire :
$\exists \lambda_j \ \ unique \ \ / x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j x^j$

4.2. Matrices

Definition: Définition 1.2.

Une matrice de dimension $m \times n$, avec m et n entiers strictement positifs peut être prise comme un ensemble de nombres réels disposés dans un tableau à m lignes et n colonnes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matrice A peut être considérée comme formée de m vecteurs lignes de dimension n :

$$a_i = (a_{ij},\ j = 1, ..., n) = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}),\quad i = 1, ..., m$$

ou de n vecteurs colonnes de dimension m :

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (a_{ij},\ i = 1, ..., m)\ i = 1, ..., m$$

Definition: Définition 1.3.

Le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants parmi les m vecteurs lignes est égal au nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants parmi les n vecteurs colonnes, ce nombre est appelé rang de la matrice A, et on note $rang(A)$.

- Une matrice carrée A de dimension $m \times m$ est dite régulière si $rang(A) = m$. Dans ce cas, la matrice A est inversible et la matrice inverse A^{-1} de dimension $m \times m$ vérifie la relation
  $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

ou I est la matrice identité

4.3. Système d'Équations

Definition: Définition 1.4.

On appelle système à m équations linéaires à n inconnues le système d'équations

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\quad i = 1, 2, ..., m$$

que l'on peut représenter sous forme vectorielle par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definition: Définition 1.5.

On appelle matrice augmentée notée (A,b) la matrice que l'on obtient en adjoignant le vecteur b à la matrice A :

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- Si $rang(A) < rang(A, b)$ le système n'admet pas de solution ;
- Si $rang(A) = rang(A, b) = n$ le système admet une solution unique ;
- Si $rang(A) = rang(A, b) < n$ le système admet une infinité de solutions.
- Supposons $rang(A) = m \leq n$, alors le système $Ax = b$ possède :

  - Une unique solution si $m = n$ et cette solution s'écrit sous la forme $x = A^{-1}b$
  - Une infinité de solutions si $m < n$.

- Si B est une matrice régulière de dimension $m \times m$, alors les systèmes $Ax = b$ et $BAx = Bb$ sont équivalents c'est à dire, ils ont le même nombre de solutions.

5. Quiz:

Exercice 01 :

Un ébéniste fabrique des armoires et des tables avec trois sortes de bois : chêne, pin et noyer. Dans le tableau suivant, on donne le nombre de mètres carrés nécessaires à la fabrication de chaque

type de meubles et le nombre de mètre carrés disponible.

	Armoire	Table	Disponibilité
Chêne	4	5	210
Pin	5	2.5	180
Noyer	6	5	240

L'ébéniste gagne 150 000 DA par armoire et 90 000 DA par table.

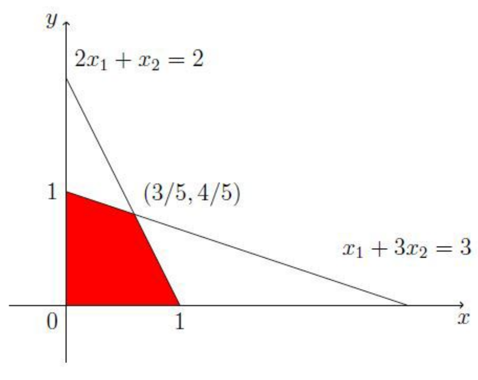
Formuler ce problème sous forme de programme linéaire sachant que le fabriquant désire maximiser son profit.

Exercice 02 :

Considérons le problème suivants :

$$\begin{cases} Max\ Z \ = x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre ce problème avec la méthode graphique



Solution

Les points extrême sont : A=(0,1), B=(0,0), C=(1,0), D=(3 /5,4/5)

Le point optimal est celui qui maximise la fonction Z c-a-d :

Z(A)=1

Z(B)=0

Z(C)=1

Z(D)=7/5

Donc le point optimal est D=(3/5,4/5)