Corrections

Solution 1.
Variables de décision

1. x_1 le nombre de tables à fabriquer par semaine.
2. x_2 le nombre de chaises à fabriquer par semaine.

Les contraintes

- $5x_1 + 2x_2 \leq 60$ pour le bois
- $2x_1 + 1x_2 \leq 30$ pour le métal
- $3x_1 + 1.5x_2 \leq 45$ pour le temps du travail
- les variables sont non-négatives $x_1, x_2 \geq 0$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 2000x_1 + 1200x_2$ à maximiser.

Enfin, le PL peut s'écrire comme suit: $\begin{cases} Z(\max) = & 2000x_1 + 1200x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 & \leq 60 \\ 2x_1 + 1x_2 & \leq 30 \\ 3x_1 + 1.5x_2 & \leq 45 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$

Solution 2.
Variables de décision

1. x_1 le nombre de ceintures de type A à fabriquer par jour.
2. x_2 le nombre de ceintures de type B à fabriquer par jour.

Les contraintes

- $2x_1 + x_2 \leq 1000$ pour le temps
- $x_1 + x_2 \leq 1400$ pour le cuir
- $x_1 \leq 800$ pour les boucles de type A.
- $x_2 \leq 900$ pour les boucles de type B.
- les variables sont non-négatives $x_1, x_2 \geq 0$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 200x_1 + 150x_2$ à maximiser.

Enfin, le PL peut s'écrire comme suit: $\begin{cases} Z(\max) = & 200x_1 + 150x_2 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 1000 \\ x_1 + x_2 & \leq 1400 \\ x_1 & \leq 800 \\ \quad\quad x_2 & \leq 900 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$

Solution 3.
Variables de décision

1. x_1 Le nombre d'avions loués du type A.
2. x_2 le nombre d'avion loués de type B.

Les contraintes

- $x_1 \leq 12$ Nombre d'avions disponibles du type A.
- $x_1 \leq 9$ Nombre d'avions disponibles du type B.
- $200x_1 + 100x_2 \geq 1600$ Toutes les personnes doivent être transportées.
- $6x_1 + 6x_2 \geq 90$ Tous les bagages doivent être transportés.
- les variables sont non-négatives $x_1, x_2 \geq 0$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 800000x_1 + 200.000x_2$ à minimiser.

Enfin, le PL peut s'écrire comme suit: $\begin{cases} Z(\max) = & 800.000x_1 + 200.000x_2 \\ x_1 & \leq 12 \\ \quad\quad x_2 & \leq 9 \\ 200x_1 + 100x_2 & \geq 1600 \\ 6x_1 + 6x_2 & \geq 90 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$

Solution 4.
Variables de décision

1. x_1 La quantité de chocolat 1 dans l'assortiment (en Kg).
2. x_2 La quantité de chocolat 2 dans l'assortiment (en Kg).
3. x_3 La quantité de chocolat 3 dans l'assortiment (en Kg).

Pour se faire, on note "A", l'assortiment réalisé, $A = x_1 + x_2 + x_3$. **Les contraintes**

- $0.10 * A \leq x_1 \leq 0.20 * A$ quantité du chocolat 1 dans l'assortiment.
- $x_1 + x_2 \leq 0.800$ La quantité du chocolat 1 et 2 dans un kg de l'assortiment.
- $x_1 + x_2 \geq \frac{1}{2} * A$ Quantité du chocolat 1 et 3.
- les variables sont non-négatives $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2, x_3) = 800(x_1 + x_2 + x_3) - 400x_1 - 140,5x_2 - 240x_3$ à maximiser.
Enfin, le PL peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} Z(\max) = & 800(x_1 + x_2 + x_3) - 400x_1 - 140.5x_2 - 240x_3 \\ 0.10 * (x_1 + x_2 + x_3) \le x_1 & \le 0.20 * (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 + x_2 & \le 0.800 \\ x_1 + x_2 & \ge \frac{1}{2} * (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1, x_2, x_3 & \ge 0 \end{cases}$$

Solution 5. 1. **Formuler le problème de la recherche d'un plan de production maximisant le chiffre d'affaires de l'entreprise sous forme d'un programme linéaire.**

(a) Soient les variables de décision suivantes:
x_1: le nombre de boîtes de type 1 fabriquées;
x_2: le nombre de boîtes de type 2 fabriquées.

(b) On a les contraintes suivantes:
sur les m^2 de carton: $x_1 + 2x_2 \le 10000$
sur le temps d'assemblage en minutes : $2x_1 + 3x_2 \le 200 \times 60$
sur le nombre d'agrafes: $x_1 + 4x_2 \le 15000$

(c) La fonction objectif à maximiser correspond au chiffre d'affaires obtenu lors de la vente des cartons: $z = 3x_1 + 5x_2$

On a donc le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} Z(max) &= 3x_1 + 5x_2 \\ s.c \quad & x_1 + 2x_2 \le 10000 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 12000 \\ & x_1 + 4x_2 \le 15000 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

2. **Déterminer un plan de production optimal en résolvant graphiquement le programme linéaire trouvé en (1).**

Il suffit de représenter le domaine admissible D du programme linéaire trouvé en (1) et de trouver sur le bord de D le point qui maximise $3x_1 + 5x_2$, c'est-à-dire de faire glisser la droite d'équation $3x_1 + 5x_2 = \alpha$ jusqu'à ce que α soit maximal en prenant garde que cette droite intersecte le domaine D, ou bien de prendre le dernier point toucher par les droites perpendiculaires au gradient $\nabla Z = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Ceci est fait sur la figure ci-dessous, et l'on voit que le plan optimal consiste donc à produire 600 boîtes de type 1 ($x_1^* = 600$) et 3 600 boîtes de type 2 ($x_2^* = 3600$), pour un chiffre d'affaires d'une valeur de 19800$ ($z^* = 19800$).

Solution 6.
Variables de décision

1. x_1 le nombre de lots de type N_j à constituer, j=1,2.

Les contraintes

- $x_1 + x_2 \le 20$ pour les guides
- $10x_1 + 50x_2 \le 500$ pour les cartes postales

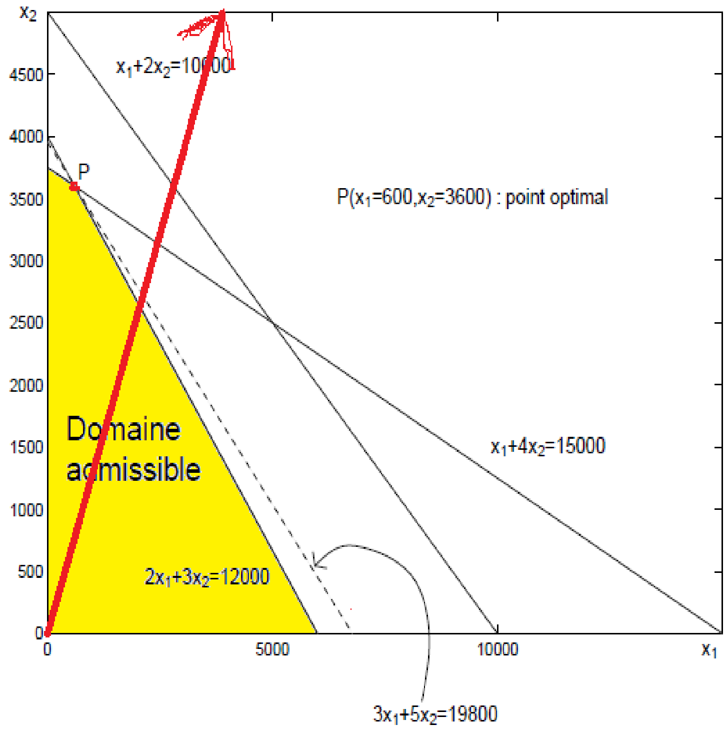

Figure 1:   Résolution graphique du problème (P)

- les variables sont non-négatives $x_1, x_2 \geq 0$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 60x_1 + 100x_2$ à maximiser.
Enfin, le PL peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} Z(\max) = & 60x_1 + 100x_2 \\ x_1 + x_2 & \leq 20 \\ 10x_1 + 50x_2 & \leq 500 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Solution 7.
Variables de décision

1. x_j nombre de sac de poudre P_j à acheter, j=1,2.

Les contraintes

- $100x_1 + 200x_2 \geq 300$ pour l'ingrédient A.
- $200x_1 + 200x_2 \geq 500$ pour l'ingrédient B.
- $600x_1 + 200x_2 \geq 700$ pour l'ingrédient C.
- Les variables sont non-négatives $x_1, x_2 \geq 0$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 300 * 0.9 * x_1 + 200 * 0.6 * x_2$ à maximiser.
Il suffit d'appliquer la règle de trois pour trouver les prix en Kg.
Enfin, le PL peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} Z(\max) = & 60x_1 + 100x_2 \\ 100x_1 + 200x_2 & \geq 300 \\ 200x_1 + 200x_2 & \geq 500 \\ 600x_1 + 200x_2 & \geq 700 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Remarque 1. On peut aussi prendre comme variable de décision, les quantité à acheté en Kg, mais, il faut faire attention à exprimer toute les contraintes en Kg.

Solution 8.
Variables de décision

1. x_j nombre de packs (Fardeaux) de type F_j à exporter, $j = \overline{1,3}$.

Les contraintes

- $2x1 + 6x2 \leq 5000$ pour l'huile simple.
- $4x1 + 6x3 \leq 1000$ pour l'huile de qualité.
- Les variables sont non-négatives $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 10x_2 + 3x_3$ à maximiser.
Enfin, le PL peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} Z(\max) = & 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 \\ 2x1 + 6x2 & \leq 5000 \\ 4x1 + 6x3 & \leq 1000 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{cases}$$

Solution 9.
Variables de décision

1. $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{Si le bien immobilier est acheté} \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$ x$_2$ nombre d'actions achetées,

3. x_3 nombre de m^2 de terre achetées,

Les contraintes

- $60000x1 + 2000x2 + 300x_3 = 10000$ Il ne faut pas dépasser le budget alloué.
- Les variables sont non-négatives et d'intégrité $x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 \in \{0, 1\}, x_2 \in N$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 2900x_1 + 800x_2 + 100x_3$ à maximiser.
Enfin, le PL peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} Z(\max) = & 2900x_1 + 800x_2 + 100x_3 \\ 60000x1 + 2000x2 + 300x_3 & = 100000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & x_1 \in \{0, 1\}, x_2 \in N \end{cases}$$

Remarque 2. Si vous mettez aussi $x_i \in N$, est acceptable comme réponses.

Solution 10.
Soit les variables de décision:

- x_1 = tonnes de mélange traitées par la machine A,
- x_2 = tonnes de mélange traitées par la machine B,

  On en déduit :

- la quantité d'abricots à acheter : $0.6x_1$

- la quantité de fraises à acheter : $0.8x_2$
- la quantité de sucre à acheter : $0.4x_1 + 0.2x_2$
- la quantité de gelée d'abricots produite : $0.8x_1$
- la quantité de confiture de fraises produite : $0.6x_2$
- la quantité de gelée de fraises produite :$0.3x_2$
- la quantité de déchets produits : $0.2x_1 + 0.1x_2$

Toutes ces quantités sont exprimées en tonnes.
On a donc la fonction objectif suivante, correspondant au bénéfice journalier en $:

$$\begin{aligned} Z &= 4500.0,8x_1 + 5000.0,3x_2 + 4000.0,6x_2 - 3000.0,6x_1..3500.0,8x_2 - 1200(0,4x_1 + 0,2x_2) \\ &= 1320x_1 + 860x_2 \end{aligned}$$

Les contraintes sur les machines A, B et C:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 15 \\ x_2 &\leq 10 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Le programme linéaire à résoudre est donc:

$$\begin{aligned} \max Z &= 1320x_1 + 860x_2 \\ s.c. \quad & x_1 \leq 15 \\ & x_2 \leq 10 \\ & 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

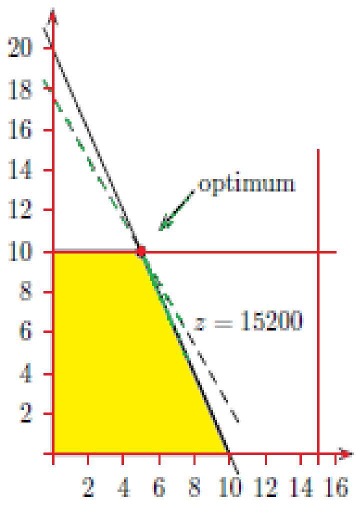

Figure 2: Représentation graphique du problème

La solution optimale est donnée par :

$$z^* = 15200, \;\; x_1^* = 5, \;\; et \;\; x_2^* = 10.$$

ce qui correspond à fournir 5 tonnes de mélange à la machine A et 10 tonnes de mélange à la machine B pour un bénéfice journalier de 15200$.

On peut aussi formuler le problème avec comme variables de décisions: x_1, x_2 qui représentent le nombre de tonnes d'abricots et de fraises achetés chaque jour par l'usine. Ou, la quantité de gelée d'abricots et de fraises produite en tonnes