Chapitre 2

La méthode de Séparation et Évaluation(BRANCH AND BOUND)

2.1 Introduction

Pour plusieurs problèmes , en particulier les problèmes combinatoires,l'espace de solutions est fini (dénombrable). I l e st d onc p ossible e n p rincipe d 'énumérer t outes l es s olutions et ensuite de prendre la meilleure .L'inconvénient majeur de cette approche est le temps de calcul qui est en général énorme . La méthode de branch and bound "procédure par évaluation et séparation" est basée sur une méthode arborescente qui consiste à réduire par des découpages l'ensemble des solutions qui ne génèrent pas de meilleures solutions. Toutes les séparations sont permises à condition de ne perdre aucune information. La complexité algorithmique diminue alors dans la mesure où on ne calcule pas toutes les solutions du problème.[5]

2.2 Principe de la méthode

Il est aisé en général de déterminer l'ensemble de solutions réalisables du problème.Mais cet ensemble est généralement trop grand pour qu'il soit possible d'en extraire la solution optimale .En conséquence ,on procède à une subdivision de cet ensemble S en un nombre fini de sous-ensembles $S^{(i)}_{i=1...p}$ de plus en plus petits en veillant à ce que :

$$\bigcup_{i=1}^{p} S^{(i)} = S$$

jusqu'à l'obtention d'un sous-problème suffisamment restreint "ensemble sondé"pour qu'on puisse extraire la solution optimale . La méthode de branch and bound ,est essentiellement présentée par les trois procédures suivantes :

– **La procédure de séparation** :

  La séparation consiste à diviser le problème en sous-problèmes .
  Son principe doit satisfaire aux trois règles suivantes :

  a)La règle de finitude :le nombre totale de nœuds engendrés doit être fini.
  b)La règle de conservation : aucune solution d'un sous-problème ne peut être éliminée

par la séparation c'est-à-dire

$$\bigcup_{k=1}^{p} S^{(ik)} = S^{(i)}$$

et qu'il vérifie également $S^{(ik)} \cap S^{(il)} = \emptyset \quad k \neq l$,où $S^{(ik)} \quad k = 1, ..., p$ représentent les sous-ensembles (enfants)du sous-ensemble (parent)$S^{(i)}$.
c)La Règle d'arrêt :Un nœud ou sous-ensemble terminal de l'arborescence noté $S^{(t)}$ est défini comme un nœud qu'il n'est plus possible de séparer ,pour un tel sous-ensemble :
-Soit $S^{(t)} = \emptyset$
-Soit qu'il est possible de déterminer une solution optimale du problème $p^{(i)}$ qui est le sous-problème réduit de (P) et qui est défini comme suit :

$$P^{(i)} \begin{cases} \min & F(x) \\ & x \in S^{(i)} \end{cases}$$

- **La procédure d'évaluation** :

  L'évaluation d'un sous-problème $P^{(i)}$ de (P) consiste à évaluer la valeur optimale de sa fonction économique .Plus précisément à déterminer une borne supérieure si la fonction économique est à maximiser respectivement une borne inférieure si elle est à minimiser .
  L'évaluation permet de réduire l'espace de recherche en éliminant quelques sous-ensembles qui ne contiennent pas la solution optimale et elle a pour but de déterminer le sous problème qu'on doit séparer.
  L'exploration d'une branche est éliminée si :

  a) Le sommet de l'arborescence ne peut être séparé c.à.d que le sommet(nœud)de l'arborescence est associé à une solution entière .

  b) Le sous-problème est non-réalisable .

  c) La valeur de Z associée au sous-problème est supérieure à Z^{opt} si le problème est à maximiser respectivement inférieur à Z^{opt} si le problème est à minimiser .

  d) La valeur Z d'un sommet associée à une solution non-entière inférieure ou égale à une valeur Z d'une solution entière respectivement supérieure pour un problème de minimisation .

- **La procédure de cheminement** :

  Cette procédure indique le sous-ensemble à analyser et dans quel ordre.
  Bien évidemment,il est souhaitable d'examiner le moins possible de sous-problèmes selon la stratégie choisie , certains d'entre eux pourront ne pas être séparés car, par exemple,leurs analyse mettra en évidence qu'ils ne contiennent pas de solutions meilleures que celles déjà trouvées .Nous dirons qu'un tel sous-ensemble ou le nœud correspondant de l'arborescence est sondé.C'est parce que certains sous-ensembles de solutions ne devront pas être examinés explicitement, que la méthode «B and B» est parfois appelée méthode d'énumération implicite.

Lorsqu'un nœud de l'arborescence est sondé,il conviendra de remonter dans l'arborescence vers un autre nœud situé à un niveau inférieure ou égale .

2.2.1 Stratèges de parcours

Il est évident d'examiner la totalité des sommets de l'arborescence pour réaliser une énumération implicite efficace .
Pour savoir quel sommet doit-on séparer on utilise des stratégies ,on peut distinguer trois d'entre elles :
La largeur d'abord :
Cette stratégie favorise les sommets les plus proches de la racine (nœud père) en faisant moins de séparations du problème initial. Elle est moins efficace que les deux autres stratégies .
La profondeur d'abord :
Cette stratégie avantage les sommets les plus éloignés de la racine (de profondeur la plus élevée) en appliquant plus de séparations au problème initial. Cette voie mène rapidement à une solution optimale en économisant la mémoire.
Le meilleur d'abord :
Cette stratégie consiste à explorer les sous-problèmes possédant la meilleure borne. Elle permet aussi d'éviter l'exploration de tous les sous-problèmes qui possèdent une mauvaise évaluation par rapport à la valeur optimale.

2.3 Algorithme général

X^* : la solution du $(P) \to$ problème (PLNE)
X^{opt} :la solution du $(PR) \to$ problème (PLNR)
Z^* : la fonction économique du $(P) \to$ problème (PLNE)
Z^{opt} :la fonction économique du $(PR) \to$ problème (PLNR)
1)Résolution du problème relaxé(PR) par la méthode du simplexe :

-Si X^{opt} est entier :fin.
-Sinon, aller à 2).

2)Initialisation :

Soit Z^{opt} obtenu dans(PR) une borne supérieure pour un problème de maximisation respectivement (borne inférieure pour un problème de minimisation)pour (P_i).
Soit n_1 le sommet initial de l'arborescence et son ensemble$(S_1 = S)$.
$Z_1 = Z^{opt}$.

3)Séparation($k^{ième}$ itération) :

Choisir une variable non entière x_l,créer deux branches (deux sommets fils n_{i+1} et n_{i+2}),on obtient deux sous-problèmes sous la forme :

$$\begin{cases} P_{i+1,k} : P_i + \text{ la contrainte } x_l \leq [x_l] \\ P_{i+2,k} : P_i + \text{ la contrainte } x_l \geq [x_l] + 1 \\ \end{cases}$$

Avec $[x_l]$: la partie entiére de x_l

4)Résolution des sous-problèmes :

Résoudre chaque sous-problème en utilisant le simplexe ou le dual simplexe.

5)Évaluation :

Examiner chaque sous-ensemble :
On peux tailler un sommet si :
* La solution est non réalisable.
* $Z_1 \leq$Z pour un problème de maximisation ($Z_1 \geq$Z pour un problème de minimisation), avec Z la solution du sous-problème.
* La solution est non entière et son Z inférieur ou égale à une solution entière pour un problème de maximisation (supérieure ou égale pour un problème de minimisation) .
Il est inutile de sépare si :
* La solution est entière.

6)test :

S'il y a plus de sous-ensembles à séparer ,alors :
On compare tous les Z des solutions entières et on prend la plus grande d'entre elles soit Z^* pour un problème de maximisation (la plus petite pour un problème de minimisation). Elle sera la valeur de la fonction économique de la solution optimale X^* de notre problème (P).
Sinon retour à 3).

Remarque :

$Z^* \leq Z^{opt}$ pour un problème de maximisation ($Z^* \geq Z^{opt}$ pour un problème de minimisation).
Dans l'itération 3)pour séparer les sous-problèmes on utilise l'une des stratégies cités précédemment.

3.4 Exemple d'application

Forme générale du problème :

$$(P)\begin{cases} (PR)\begin{cases} \max \text{Z}= x_1+2x_2 & \\ 4x_1-3x_2 & \leq 2 \\ -2x_1+x_2 & \leq 1 \\ -6x_1+14x_2 & \leq 35 \\ x_1,x_2 \geq 0 & \end{cases} \\ x_1,x_2 \in \mathbf{N} \end{cases}$$

1)Résolution du problème (PR) :

- Sa forme standard :

$$(PR)\begin{cases} maxZ = x_1+2x_2 & \\ 4x_1-3x_2+x_3 & =2 \\ -2x_1+x_2+x_4 & =1 \\ -6x_1+14x_2+x_5 & =35 \\ x_j \geq 0, j=1,...,5. & \end{cases}$$

• Résoudre le(PR)par la méthode du simplexe :

		c_i	1	2	0	0	0	
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	2	4	-3	1	0	0	/
0	x_4	1	-2	**1**	0	1	0	1
0	x_5	35	-6	14	0	0	1	35/14
		E_j	-1	**-2**	0	0	0	

•x_4 sort de la base.
•x_2 entre dans la base.

		c_i	1	2	0	0	0	
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	5	-2	0	1	3	0	/
2	x_2	1	-2	1	0	1	0	/
0	x_5	21	**22**	0	0	-14	1	21/22
		E_j	**-5**	0	0	2	0	

•x_5 sort de la base.
•x_1 entre dans la base.

		c_i	1	2	0	0	0	
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	76/11	0	0	1	**19/11**	1/11	76/19
2	x_2	32/11	0	1	0	-3/11	1/19	/
1	x_1	21/22	1	0	0	-7/11	1/22	/
		E_j	0	0	0	**-13/11**	5/22	

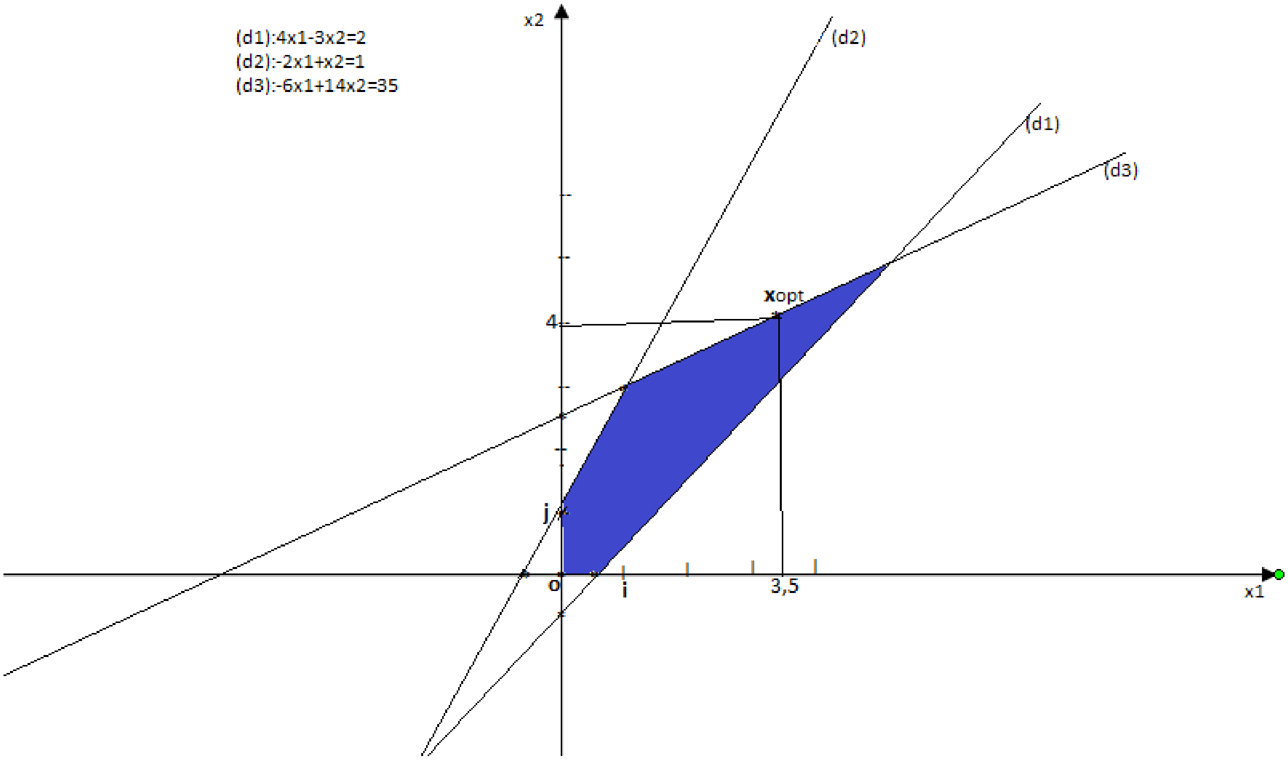
•x_3 sort de la base.
•$x_4$entre dans la base.

		c_i	1	2	0	0	0	
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_4	4	0	0	11/19	1	1/19	/
2	x_2	4	0	1	3/19	0	2/19	/
1	x_1	7/2	1	0	7/19	0	3/38	/
		E_j	0	0	13/19	0	11/38	

• tous les $E_j \geq 0 \Rightarrow X^{opt} = (7/2, 4)$.
• Z^{opt}=(7/2)+2(4)=23/2.

$$d'ou \begin{cases} x^{opt}=(3.5,4). \\ Z^{opt}=11.5. \end{cases}$$

• **Résolution graphique de (PR) :**



2)Initialisation :

- Z^{opt}est la borne supérieure de (P).
- Soit (P_1) le problème initial (le sommet initial de l'arborescence) tel que :

$$\begin{bmatrix} Z_1{=}Z^{opt}{=}11.5. \\ X_1{=}3.5. \\ X_2{=}4. \end{bmatrix}$$

(P_1) a des variables qui ne vérifient pas les contraintes d'intégrités d'où on passe à l'étape 3).

3)Séparation :

x_1 n'est pas entier on aura le modèle linéaire courant, ici (P_1) est divisé en deux sous-problèmes sous la forme :

$$\begin{cases} (P_2) = (P_1) + \textit{contrainte } x_1 \leq [x_1]. \\ (P_3) = (P_1) + \textit{contrainte } x_1 \geq [x_1] + 1. \end{cases}$$

avec $[x_1]$ la partie entière de x_1.

4)Résolution des sous-problèmes :

a)On résout (P_2) tq :
$(P_2) = (P_1)+$ la contrainte $x_1 \leq [x_1]$ c-à-d :
$(P_1)+$ la contrainte $x_1 \leq 3 \Rightarrow x_1 + x_6{=}3......\bigstar$.
On rajoute au dernier tableau de (PR)la contrainte$\bigstar$et on applique le dual du simplexe :

		c_i	1	2	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	4	0	0	11/19	1	1/19	0
2	x_2	4	0	1	3/19	0	2/19	0
1	x_1	7/2	1	0	7/19	0	3/38	0
0	x_6	3	**1**	0	0	0	0	1

•x_1 est une variable de base,on multiplie la $3^{éme}$ ligne par(-1) , on l'additionne à la $4^{éme}$ ligne . On obtient le tableau suivant :

		c_i	1	2	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	4	0	0	11/19	1	1/19	0
2	x_2	4	0	1	3/19	0	2/19	0
1	x_1	7/2	1	0	7/19	0	3/38	0
0	x_6	**-1/2**	0	0	**-7/19**	0	-3/38	1
		E_j	0	0	13/19	0	11/38	0

•x_6 sort de la base.
•x_3 entre dans la base.

		c_i	1	2	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	45/14	0	0	0	1	-1/14	11/7
2	x_2	53/14	0	1	0	0	1/14	3/7
1	x_1	3	1	0	0	0	0	1
0	x_3	19/14	0	0	1	0	3/14	-19/7
		E_j	0	0	0	0	1/7	13/7

• Tous les $b_j \geq 0$,la solution de (P_2) est :

$$\begin{bmatrix} Z_2\text{=}10.57. \\ X_1\text{=}3. \\ X_2\text{=}3.79. \end{bmatrix}$$

b)On résout (P_3) tq :
(P_3)=(P_1) +la contrainte $x_1 \geq [x_1]$+1 c-à-d :
(P_1) +la contrainte $x_1 \geq 4 \Rightarrow x_1$-$x_6$=4
$-x_1+x_6 = -4....\bigstar$.
On rajoute la contrainte ★ au dernier tableau de (PR)et on applique le dual simplexe :

		c_i	1	2	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	4	0	0	11/19	1	1/19	0
2	x_2	4	0	1	3/19	0	2/19	0
1	x_1	7/2	1	0	7/19	0	3/38	0
0	x_6	-4	**-1**	0	0	0	0	1

•x_1 est une variable de base,on additionne la $3^{éme}$ ligne à la $4^{éme}$ ligne.On obtient le tableau suivant :

		c_i	1	2	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	4	0	0	11/19	1	1/19	0
2	x_2	4	0	1	3/19	0	2/19	0
1	x_1	7/2	1	0	7/19	0	3/38	0
0	x_6	-1/2	0	0	7/19	0	3/38	1
		E_j	0	0	13/19	0	11/38	0

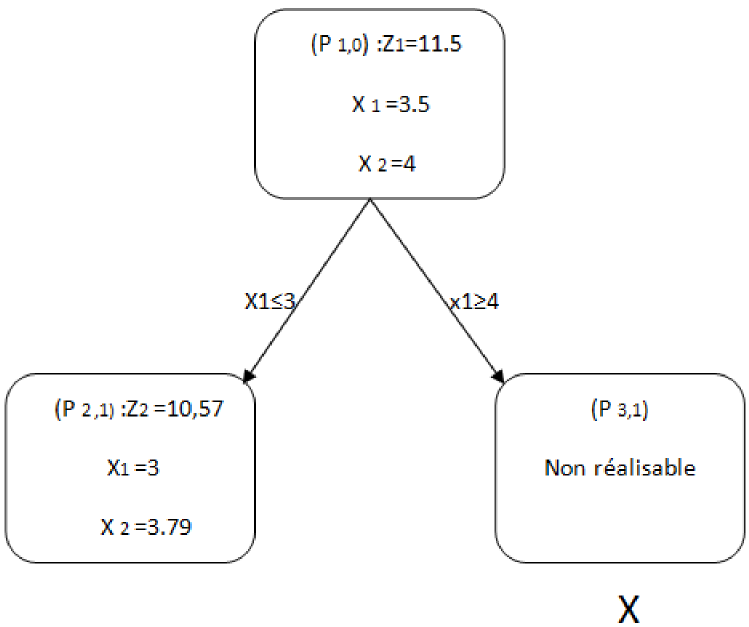
- Pas de pivot négatif ,(P_3) est non-réalisable .

5)Évaluation :

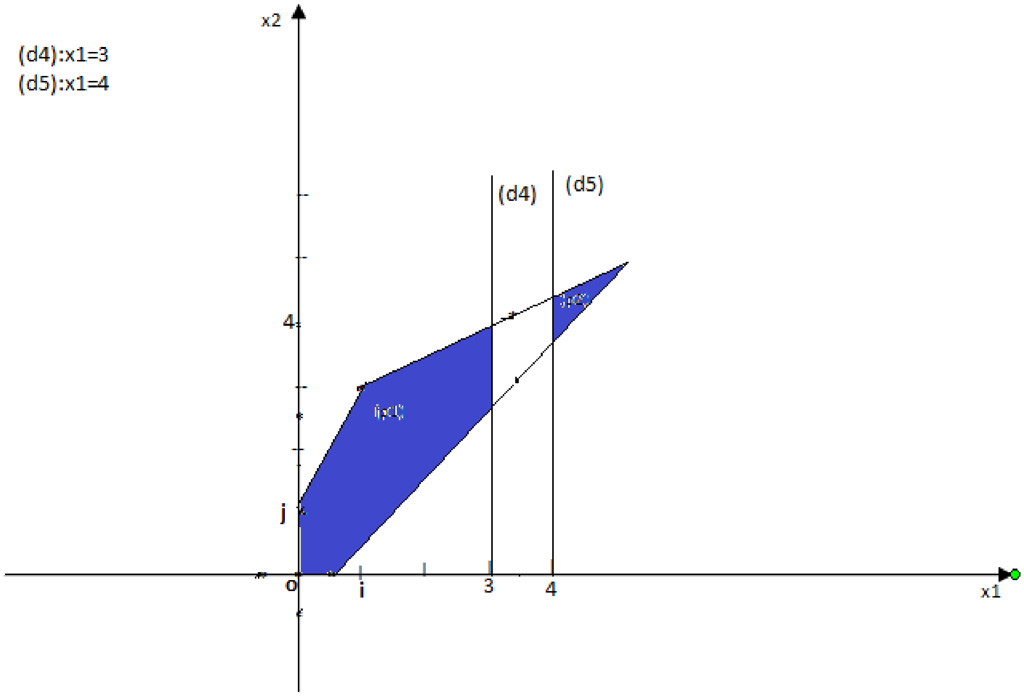
•(P_2)admet une solution non-entière et la valeur de $Z_2 = 10.75 \leq Z_1$ donc on peut séparer le sommet S_2 .
•(P_3) non réalisable donc on taille le sommet S_3 .

6) Test :

Il existe un sous-ensemble qui peut être séparé donc on retourne à 3).



- **Interprétation graphique de la séparation à partir de(P_1) :**



3)Séparation :

x_2 n'est pas entier d'où le modèle linéaire courant ici (P_2)est divisé en deux sous-problèmes sous la forme :

$$\begin{cases} (P_4) = (P_2) + contrainte\ x_2 \leq [x_2]. \\ (P_5) = (P_2) + contrainte\ x_2 \geq [x_2] + 1. \end{cases}$$

avec $[x_2]$ la partie entière de x_2.

4)Résolution des sous-problèmes :

a)On résout (P_4) tq :
$(P_4) = (P_2) + contrainte\ x_2 \leq [x_2]$ c-à-d :
$(P_2) + contrainte\ x_2 \leq 3 \Longrightarrow x_2 + x_7 = 3 ......\bigstar$.
On rajoute au dernier tableau de(P_2) la contrainte$\bigstar$ et on applique le dual simplexe :

		c_i	1	2	0	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	45/14	0	0	0	1	-1/14	11/7	0
2	x_2	53/14	0	1	0	0	1/14	3/7	0
1	x_1	3	1	0	0	0	0	1	0
0	x_3	19/14	0	0	1	0	3/14	-19/7	0
0	x_7	3	0	**1**	0	0	0	0	1

•x_2 est une variable de base on multiplie la $2^{éme}$ligne par (-1),on l'additionne à la $5^{éme}$ ligne.On obtient le tableau suivant :

		c_i	1	2	0	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	45/14	0	0	0	1	-1/14	11/7	0
2	x_2	53/14	0	1	0	0	1/14	3/7	0
1	x_1	3	1	0	0	0	0	1	0
0	x_3	19/14	0	0	1	0	3/14	-19/7	0
0	x_7	-11/14	0	0	0	0	**-1/14**	-3/7	1
		E_j	0	0	0	0	1/7	13/7	0

•x_7 sort de la base.
•x_5 entre dans la base .

		c_i	1	2	0	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	0	0	0	1	0	2	-1
2	x_2	3	0	1	0	0	0	0	1
1	x_1	3	1	0	0	0	0	1	0
0	x_3	-1	0	0	1	0	0	**-4**	3
0	x_5	11	0	0	0	0	1	6	-14
		E_j	0	0	0	0	0	1	2

•x_3 sort de la base.
•x_6 entre dans la base .

		c_i	1	2	0	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	7/2	0	0	1/2	1	0	0	1/2
2	x_2	3	0	1	0	0	0	0	1
1	x_1	11/4	1	0	1/4	0	0	0	3/4
0	x_6	1/4	0	0	-1/4	0	0	1	-3/4
0	x_5	19/2	0	0	3/2	0	1	0	-19/2
		E_j	0	0	1/4	0	0	0	11/4

• tous les $b_j \geq 0$.La solution de (P_4) est :

$$\begin{bmatrix} Z_4{=}8.75. \\ X_1{=}2.75. \\ X_2{=}3. \end{bmatrix}$$

b)On résout (P_5) tq : $(P_5) = (P_2)$+la contrainte $x_2 \geq [x_2]$ +1 c-à-d :
(P_2) +la contrainte $x_2 \geq 4 \Longrightarrow x_2 - x_7 = 4 \Longrightarrow -x_2 + x_7 = -4$......★.
on rajoute au dernier tableau de(P_2) la contrainte★ et on applique le dual simplexe :

		c_i	1	2	0	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	45/14	0	0	0	1	-1/14	11/7	0
2	x_2	53/14	0	1	0	0	1/14	3/7	0
1	x_1	3	1	0	0	0	0	1	0
0	x_3	19/14	0	0	1	0	3/14	-19/7	0
0	x_7	-4	0	**-1**	0	0	0	0	1

•x_2 est une variable de base on additionne la $2^{éme}$ ligne à la $5^{éme}$ ligne.On obtient le tableau suivant :

		c_i	1	2	0	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	45/14	0	0	0	1	-1/14	11/7	0
2	x_2	53/14	0	1	0	0	1/14	3/7	0
1	x_1	3	1	0	0	0	0	1	0
0	x_3	19/14	0	0	1	0	3/14	-19/7	0
0	x_7	-3/14	0	0	0	0	1/14	3/7	1
		E_j	0	0	0	0	1/7	13/7	0

• Pas de pivot négatif.(P_5) n'admet pas de solution .

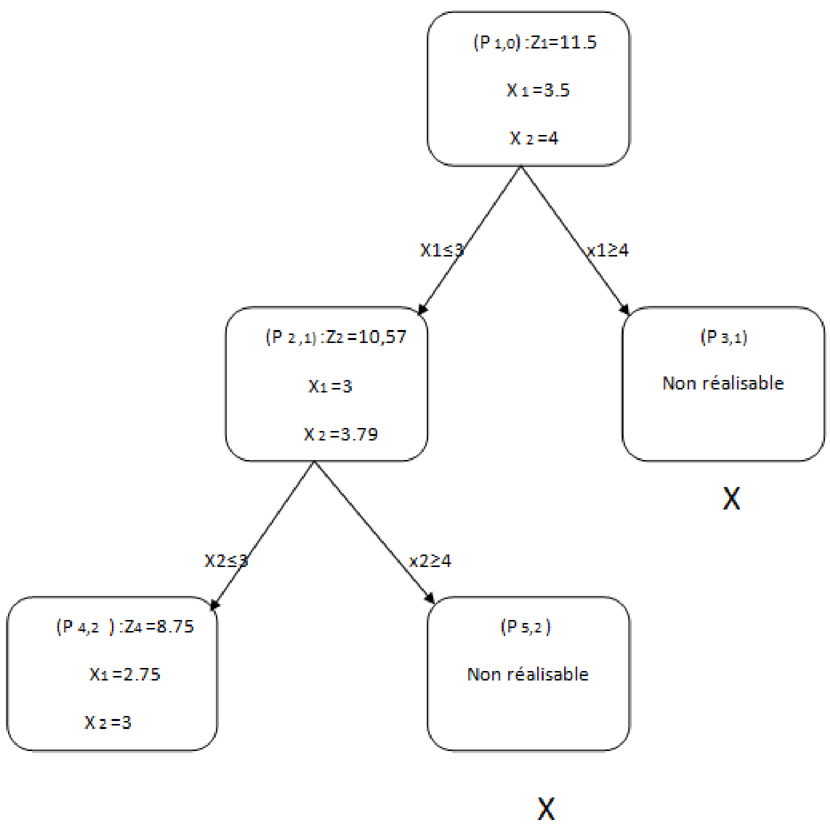
5)Évaluation :

•(P_4) a une solution non entière et la valeur de $Z_4 \leq Z_1$ donc on peut le séparer .

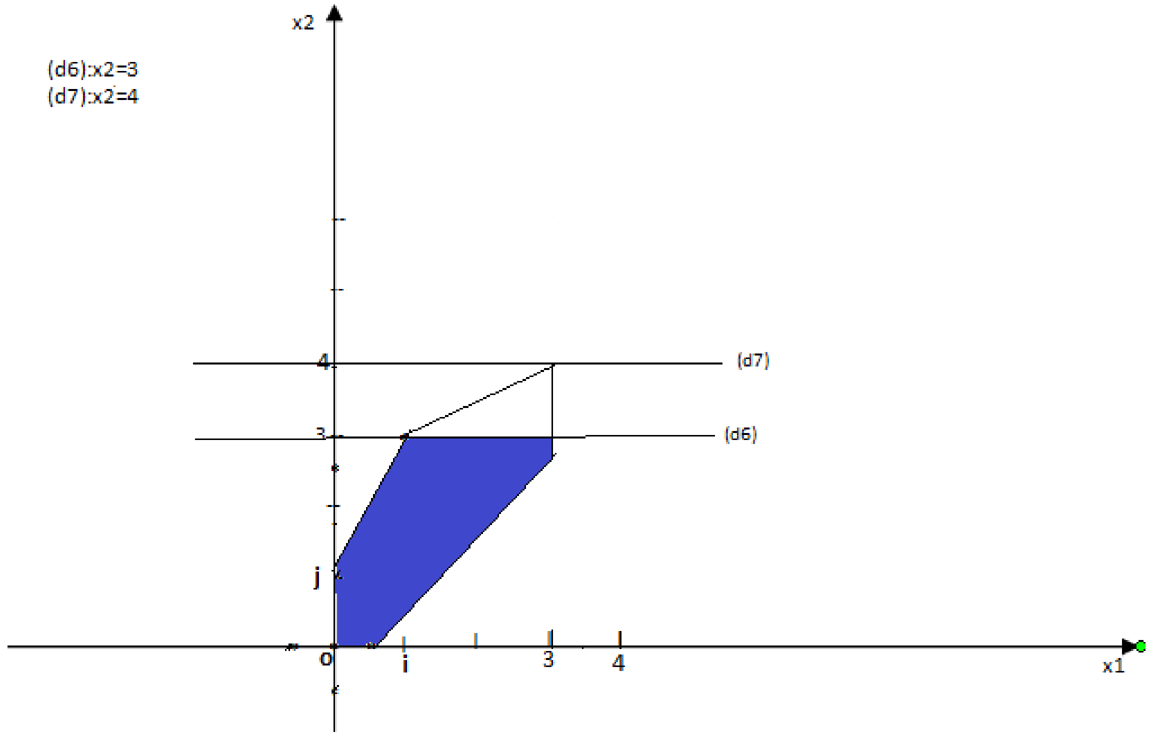
•(P_5) non réalisable donc on peut le tailler .

6)Test :

Il existe un sous-ensemble qui peut être séparé donc retour à 3).



• **Interprétation graphique de la séparation à partir de (P_2) :**



3)Séparation :
x_1 n'est pas entier d'où le modèle linéaire courant ici (P_4) est divisé en deux sous-problèmes sous la forme :

$$\begin{cases} (P_6) = (P_4) + contrainte\ x_1 \leq [x_1]. \\ (P_7) = (P_4) + contrainte\ x_1 \geq [x_1] + 1. \end{cases}$$

avec $[x_1]$ la partie entière de x_1.

4)Résolution des sous-problèmes :

a)On résout (P_6) tq :
$(P_6) = (P_4) + contrainte\ x_1 \leq [x_1]$ c-à-d :
(P_4) +la contrainte $x_1 \leq 2 \Longrightarrow x_1 + x_8 = 2$......★.
On rajoute au dernier tableau de(P_4) la contrainte★ et on applique le dual simplexe :

		c_i	1	2	0	0	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	x_4	7/2	0	0	1/2	1	0	0	1/2	0
2	x_2	3	0	1	0	0	0	0	1	0
1	x_1	11/4	1	0	1/4	0	0	0	3/4	0
0	x_6	1/4	0	0	-1/4	0	0	1	-3/4	0
0	x_5	19/2	0	0	3/2	0	1	0	-19/2	0
0	x_8	2	**1**	0	0	0	0	0	0	1

•x_1 est une variable de base on multiplie la $3^{éme}$ ligne par (-1) et on l'additionne à la $6^{éme}$ ligne.On obtient le tableau suivant :

		c_i	1	2	0	0	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	x_4	7/2	0	0	1/2	1	0	0	1/2	0
2	x_2	3	0	1	0	0	0	0	1	0
1	x_1	11/4	1	0	1/4	0	0	0	3/4	0
0	x_6	1/4	0	0	-1/4	0	0	1	-3/4	0
0	x_5	19/2	0	0	3/2	0	1	0	-19/2	0
0	x_8	-3/4	0	0	**-1/4**	0	0	0	-3/4	1
		E_j	0	0	1/4	0	0	0	11/4	0

•x_8 sort de la base.
•x_3 entre dans la base.

		c_i	1	2	0	0	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	x_4	2	0	0	0	1	0	0	-1	2
2	x_2	3	0	1	0	0	0	0	1	0
1	x_1	2	1	0	0	0	0	0	0	1
0	x_6	1	0	0	0	0	0	1	0	-1
0	x_5	5	0	0	0	0	1	0	14	6
0	x_3	3	0	0	1	0	0	0	3	-4
		E_j	0	0	0	0	0	0	2	1

• Tous les $b_j \geq 0$.La solution de (P_6) est :

$$\begin{bmatrix} Z_6{=}8. \\ X_1{=}2. \\ X_2{=}3. \end{bmatrix}$$

b)On résout (P_7) telle que :
$(P_7) = (P_4)$+ la contrainte $x_1 \geq [x_1]$ +1 c-à-d :
(P_4)+ la contrainte $x_1 \geq 3 \Longrightarrow x_1 - x_8 = 3 \Longrightarrow -x_1 + x_8 = -3$......★.
On rajoute au dernier tableau de(P_4) la contrainte ★ et on applique le dual simplexe :

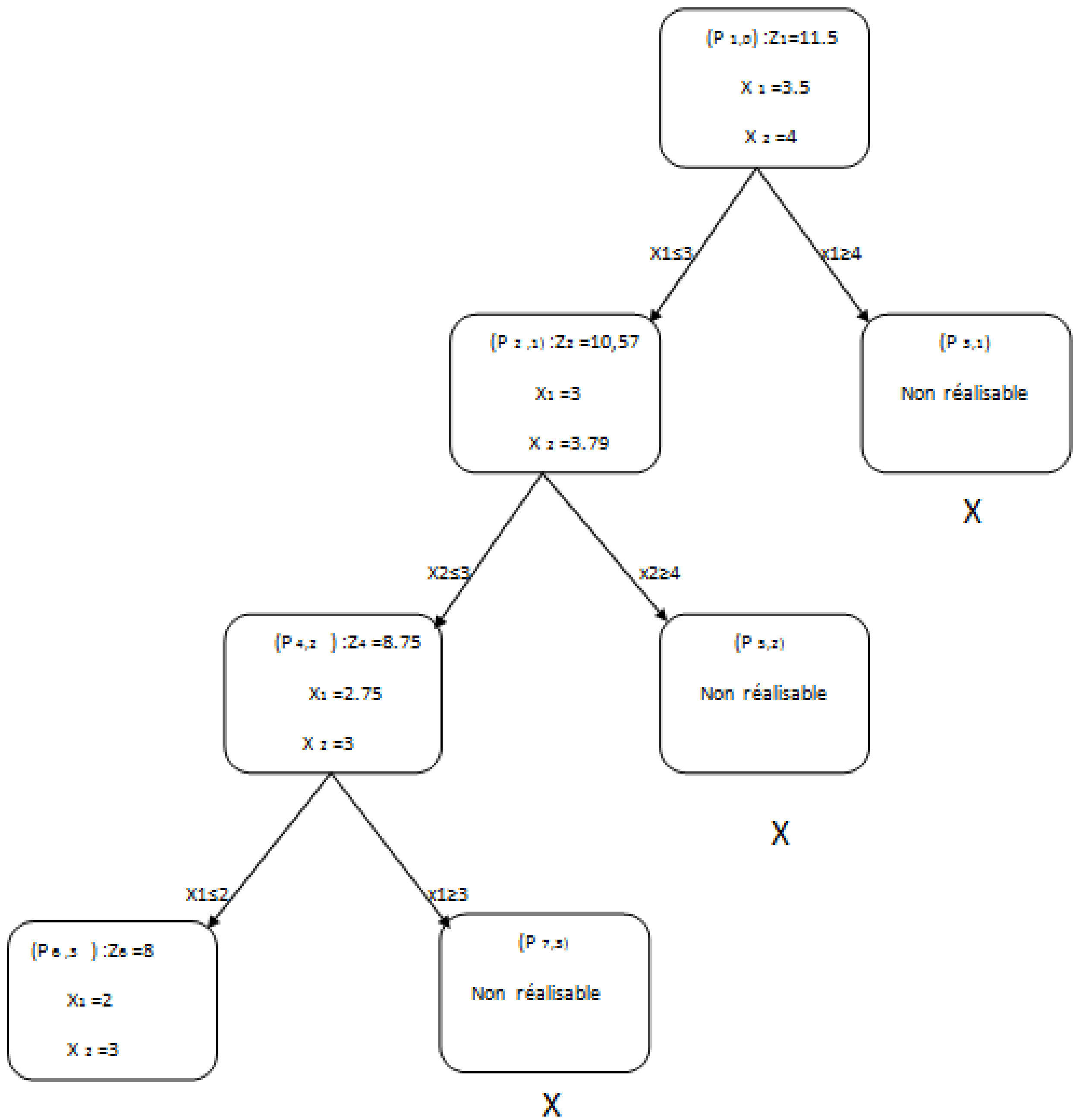
		c_i	1	2	0	0	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	x_4	7/2	0	0	1/2	1	0	0	1/2	0
2	x_2	3	0	1	0	0	0	0	1	0
1	x_1	11/4	1	0	1/4	0	0	0	3/4	0
0	x_6	1/4	0	0	-1/4	0	0	1	-3/4	0
0	x_5	19/2	0	0	3/2	0	1	0	-19/2	0
0	x_8	-3	**-1**	0	0	0	0	0	0	1

•x_1 est une variable de base d'où on additionne la $3^{éme}$ligne à la $6^{éme}$ ligne.On obtient le tableau suivant :

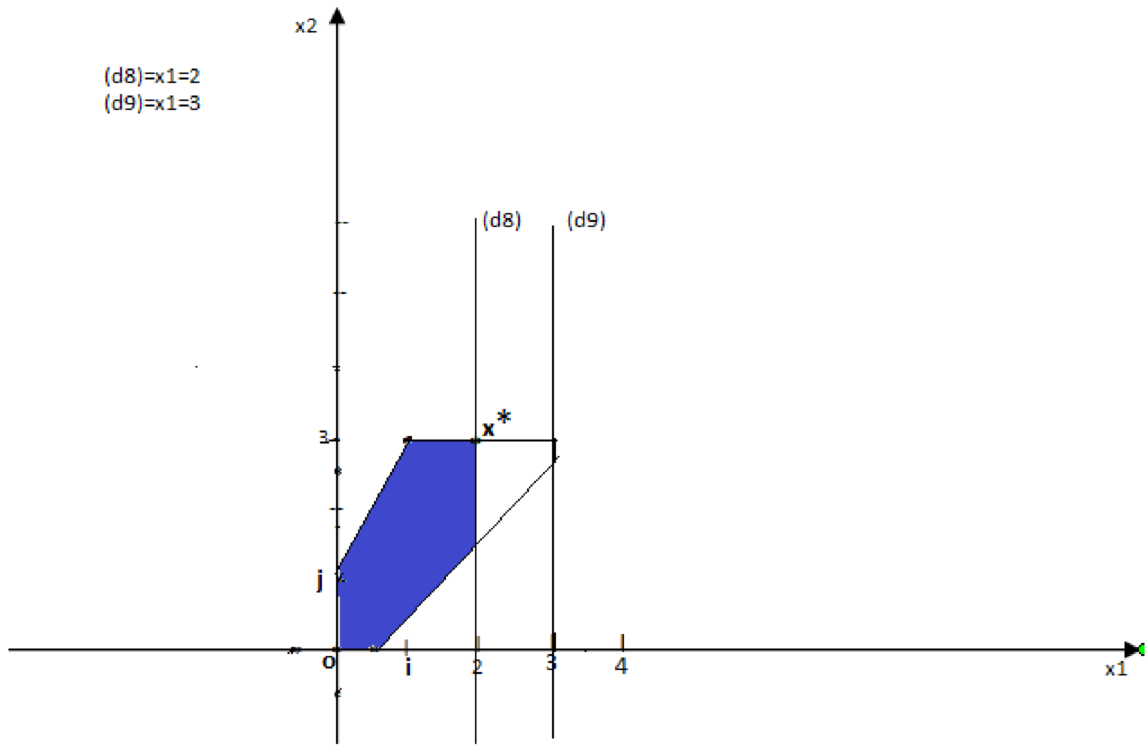
		c_i	1	2	0	0	0	0	0	0
c_b	base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	x_4	7/2	0	0	1/2	1	0	0	1/2	0
2	x_2	3	0	1	0	0	0	0	1	0
1	x_1	11/4	1	0	1/4	0	0	0	3/4	0
0	x_6	1/4	0	0	-1/4	0	0	1	-3/4	0
0	x_5	19/2	0	0	3/2	0	1	0	-19/2	0
0	x_8	-1/4	0	0	1/4	0	0	0	3/4	1
		E_j	0	0	1/4	0	0	0	11/4	0

• Pas de pivot négatif .(P_7) non-réalisable.

5)évaluation :
• On a (P_6) a une solution entière et son $Z_6 \leq Z_1$ donc inutile de le séparer.
• On a (P_7) non réalisable donc on peut le tailler.
6)Test :
Il n'y a plus de sous-ensembles à séparer alors on compare tous les Z des solutions entières et on prend la plus grande car on a un problème de maximisation .Ici on a $Z_6 = 8$ est la seule qui a une solution entière .
D'où la solution de notre problème est :
X^*=(2,3)et son $Z^* = 8$.



- **Interprétation graphique de la séparation à partir de (P_4) :**



Remarque :
On a utilisé la stratégie :
Le meilleur d'abord.