جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Chapitre 2:
Principes de gestion d’un portefeuille

Pr. OUKACI Kamal
Département des Sciences financière et comptabilité
Université de Bejaia

Plan du cours

1- Définition d’un portefeuille

2- Notion de diversification

3- Notion de corrélation

4- Relation risque/rentabilité

5- Analyse des préférences au risque de l’investisseur

6- Analyse de la diversification

7- Introduction d’actif sans risque

1- Définition d'un portefeuille

Un portefeuille est un ensemble d'actifs financières combinés de façon à satisfaire plusieurs objectifs de gestion:

- **réaliser une plus-value en capital à long terme**
- **générer des dividendes et des revenus courants réguliers.**

2- Notion de diversification

La diversification consiste à combiner plusieurs instruments des placements au sein d'un même portefeuille.

Elle constitue un aspect important dans la définition et la construction d'un portefeuille. Elle repose sur le concept de la corrélation.

3- Notion de corrélation

C’est une mesure statistique d’une relation éventuelle entre deux séries statistiques. Si les deux séries varient dans le même sens, elles sont dits corrélées positivement tandis que si elles varient en sens opposées, elles sont dits corrélées négativement

4- Relation risque/rentabilité

A- Cas s'un seul titre :

Pour mesurer la rentabilité d'un titre, on calcule l'espérance mathématique de la rentabilité.

Si l'on appelle $E(R_x)$ la rentabilité moyenne d'un titre, on a alors :

$$E(R_x) = \sum_{t=1}^{n} P_{xt} R_{xt}$$

Avec :

$E(R_x)$: La rentabilité de l'action à l'année t.

n : La période considéré.

P_t : La probabilité affectée à cette rentabilité.

Pour mesurer le risque d'un titre, il faut considérer la dispersion possible autour du rendement espéré, c'est-à-dire son écart-type.

$$Var(R_x) = \sum_{t=1}^{n} P_{xt}\,[R_{xt} - E(R_x)]^2$$

$$\sigma(R_x) = \sqrt{Var(R_x)}$$

Exemple

Soit le titre A tel que :

P	R_A
0.25	30%
0.5	20%
0.25	10%

$$\mathrm{E}(R_A) = 0.25 * 30 + 0.5 * 20 + 0.25 * 10 = 20\%$$

$$Var(R_x) = 0.25[30 - 20]^2 + 0.5[20 - 20]^2 + 0.25[10 - 20]^2 = 50\%$$

$$\sigma(R_A) = 7.07\%$$

5- Analyse des préférences au risque de l'investisseur

A- La fonction d'utilité :

La fonction d'utilité mesure le niveau de satisfaction d'un investisseur aux différents niveaux de sa richesse. La décision financière est prise dans un environnement incertain. Elle est basée sur l'utilité procurée par l'investissement choisi par l'individu.

Markowitz formalise le dilemme de l'investisseur, à savoir comment maximiser la rentabilité d'un portefeuille pour un niveau de risque donné, ou minimiser le risque d'un portefeuille pour un niveau de rentabilité donné.

- **La fonction d'utilité Moyenne-Variance de Markowitz est donnée comme suit:**

$$U = E(R) - \frac{1}{2}\theta\sigma^2$$

$E(R)$ **: Rendement attendu ou espéré**

θ **: Attitude face au risque**

σ^2 : **variance**

Chaque investisseur a sa propre fonction d'utilité. L'utilité peut être améliorée en augmentant le rendement attendu ou en réduisant la variance.

B- Les courbes d'indifférence

La courbe d'indifférence donne toutes les combinaisons de risque/rendement attendus à utilité constante où l'investisseur est égalitairement satisfait (indifférent).

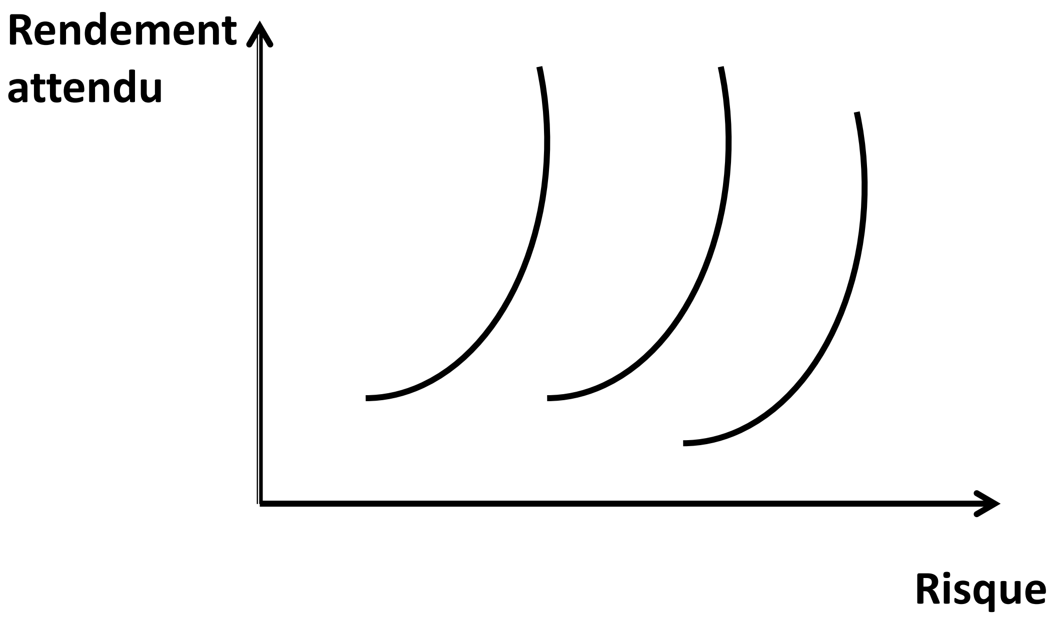


Figure 1: Courbes d'indifférence

6- Analyse de la diversification

- **La diversification donne plus de poids à la réduction des risques. Aussi, les bénéfices de la diversification sont directement liés aux corrélations (covariance) parmi les actifs.**

Portefeuille à deux titres :

Soit un portefeuille composé de deux titres A et B.

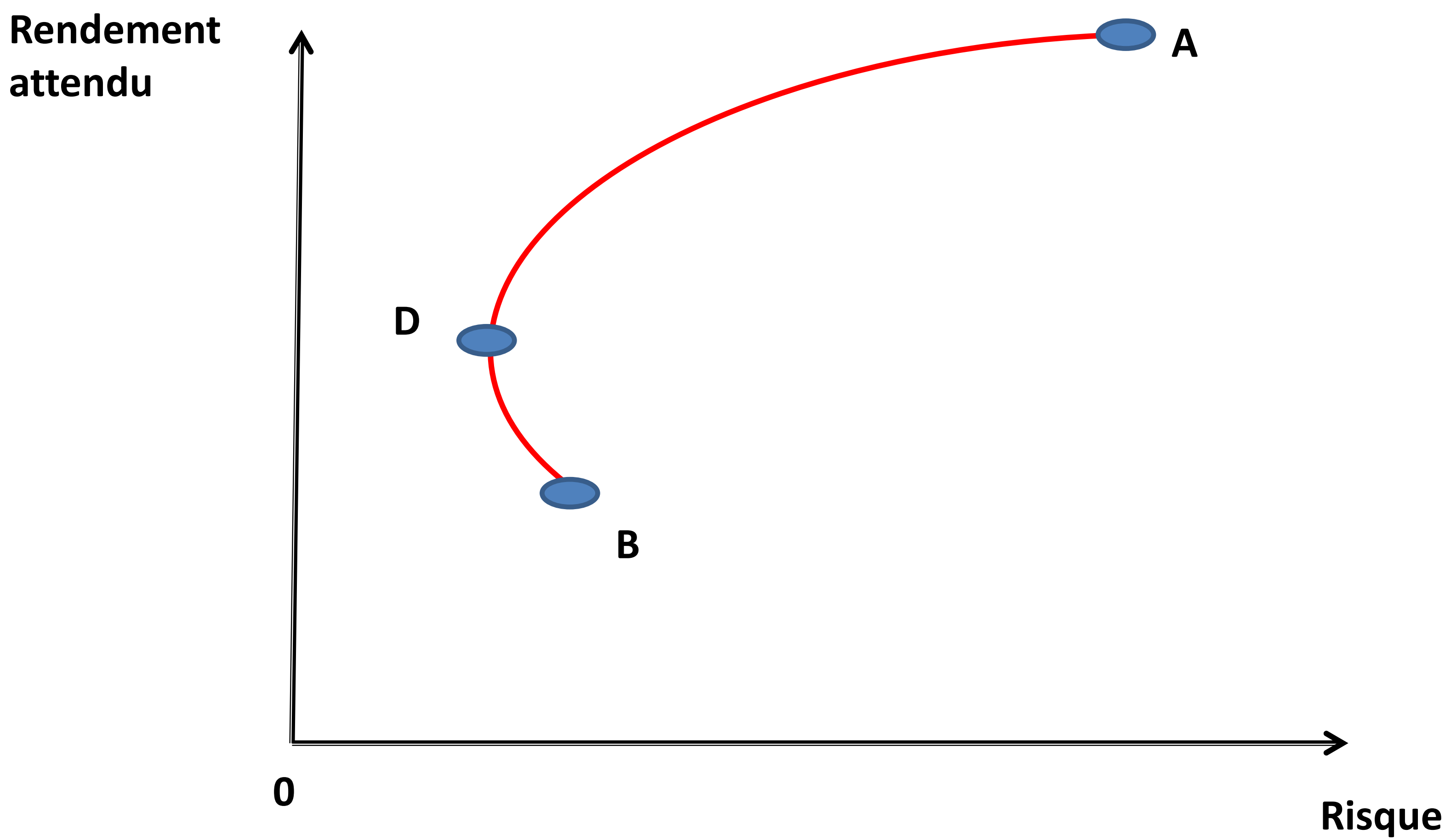


Figure 2: Frontière efficiente de portefeuille risqué

Si l'on prend l'exemple de deux titres A et B en proportion X_A et X_B (avec $X_A + X_B = 1$), la rentabilité du portefeuille sera :

$$E(R_P) = X_A E(R_A) + X_B E(R_B)$$

Et la variance de portefeuille sera:

$$Var(R_P) = X_A{}^2 Var(R_A) + X_B{}^2 Var(R_B) + 2 X_A X_B Cov(R_A, R_B)$$

Exemple

Soit un portefeuille constitué des titres A (50%) et B (50%), on a que :

P	R_A	R_B
0.25	30%	34%
0.50	20%	27%
0.25	10%	32%

$$\mathrm{E}(R_A) = 20\%$$

$$Var(R_A) = 50$$

$$E(R_B) = 0.25 * 34 + 0.5 * 27 + 0.25 * 32 = 30\%$$

$$Var(R_B) = 0.25[34 - 30]^2 + 0.5[27 - 30]^2 + 0.25[32 - 30]^2 = 9.5$$

$$Cov(R_A, R_B) = 0.25[30 - 20][34 - 30] + 0.5[20 - 20][27 - 30] + 0.25[10 - 20][32 - 30]$$

$$Cov(R_A, R_B) = 5$$

Pour le portefeuille, on a donc :

$$E(R_P) = 0.5 * 20 + 0.5 * 30 = 25\%$$

$$Var(R_P) = 0.5^2 * 50 + 0.5^2 * 9.5 + 2 * 0.5 * 0.5 * 5 = 17.37$$

Donc $\sqrt{(R_P)} = 4.16$

- Concernant le coefficient de corrélation, il peut également être considéré comme une mesure de degré de dépendance entre deux titres. Il est toujours de même signe que la covariance, mais reste toujours compris entre -1 et 1.
- Plus la liaison est forte, plus ce coefficient est proche de 1 en valeur, plus la liaison est faible, plus elle est proche de 0.
- Exemple

Dans l'exemple précédent , le coefficient de corrélation est:

.
$$\sigma\left(R_{A,}R_B\right) = \frac{Cov\ (R_A,\ R_B)}{\sigma A \sigma B} = \frac{5}{\sqrt{50 * 9.5}} = 0.23.$$

La composition des deux titres dans un portefeuille constitué de deux titres A et B et en utilisant le coefficient de corrélation est donnée comme suit:

$$X_A = \frac{\sigma^2(R_A) - \rho_{RAB}\sigma_{RA}\sigma_{RB}}{\sigma^2(R_A) + \sigma^2(R_B) - 2\rho_{RAB}\sigma_{RA}\sigma_{RB}}$$

$$X_B = 1 - X_A$$

- **Exemple**

Le rendement de BNP a un écart-type de 20% et le rendement de Total a un écart-type de 25%. La corrélation entre ces deux titres est de 1/5. Quelle est la composition du portefeuille de risque minimum si on peut investir uniquement dans ces deux titres?

$$X_{BNP} = \frac{0.25^2 - \frac{1}{5} * 0.25 * 0.20}{0.20^2 + 0.25^2 - 2 * \frac{1}{5} * 0.25 * 0.20} = \frac{7}{11}$$

$$X_{Total} = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}$$

7- Introduction d'actif sans risque

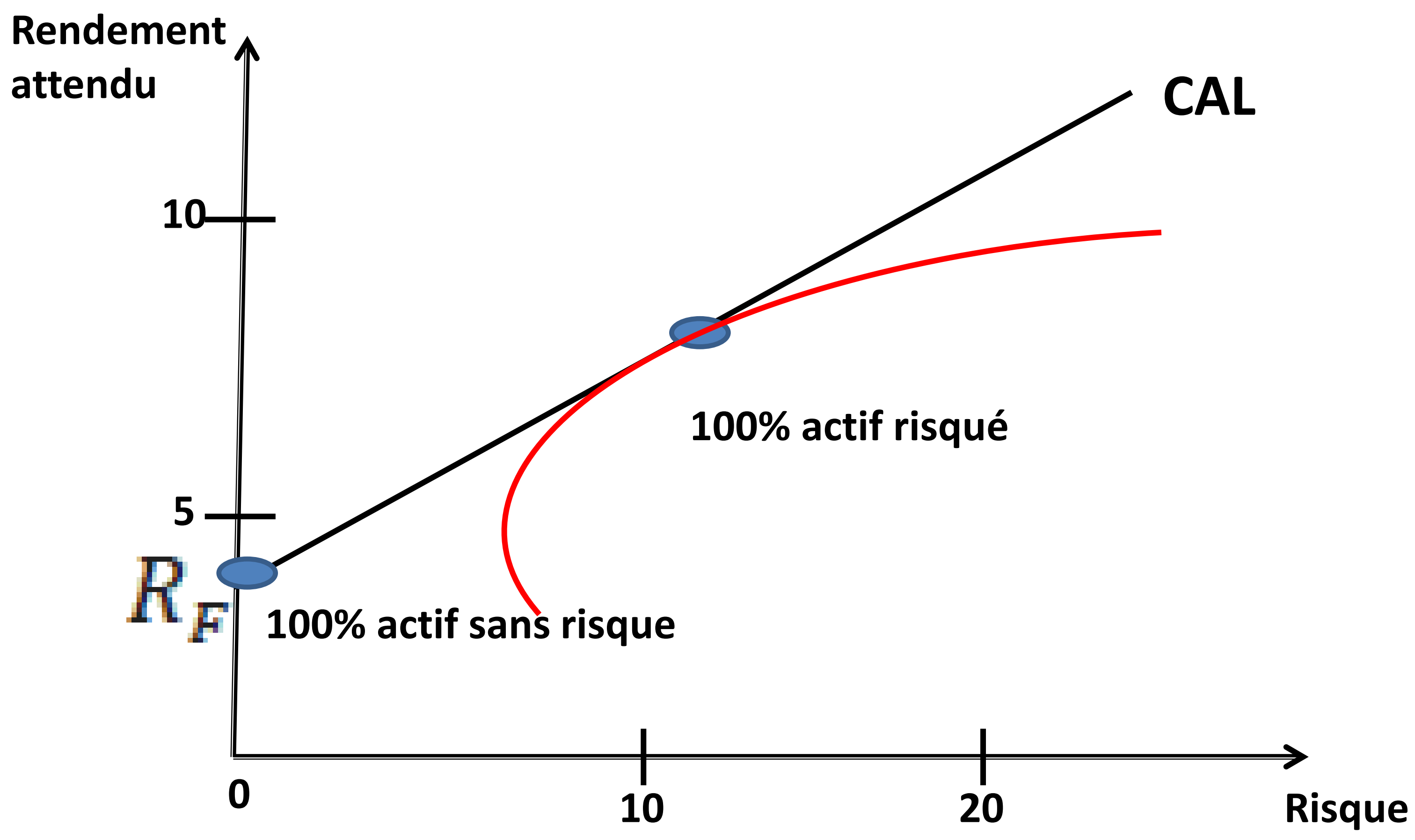
- **Un actif sans risque possède les caractéristiques suivantes:**

 - **Il doit générer un rendement égal aux taux de rendement sans risque**

- **Sa variance est nulle**

- **il est non corrélé avec les autres actifs**

- **Combiner un actif sans risque avec un portefeuille d'actifs risqués définit la ligne d'allocation d'actif ou capital allocation line CAL**


Rendement attendu
CAL
10
5
R_F
100% actif risqué
100% actif sans risque
0
10
20
Risque

L'actif sans risque transforme la frontière efficiente en une droite partant du taux sans risque en passant par le portefeuille situé au point de tangente avec la frontière efficiente. C'est la CAL dominante et qui offre le portefeuille avec le rendement maximum.

Ainsi, le portefeuille optimum pour un investisseur est une combinaison de l'actif sans risque et du portefeuille tangent.

L'équation de la CAL est la suivante :

$$E(R_p) = R_F + \left(\frac{E(R_i) - R_F}{\sigma_i}\right)\sigma_p$$