

Exercice 1. I) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1) \quad xy' + e^y = 0 & 2) \quad (1 + x^2) y' - xy = 0 \\ 3) \quad xyy' - y^2 + x^2 = 0 & 4) \quad x^2y' - xy + y^2 = 0 \\ 5) \quad xy' + y + x^2y^2 = 0 & 6) \quad y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x} + x \end{array}$$

II) Résoudre le problème de Cauchy suivante:

$$(1) \quad \begin{cases} y' = 3y + 1 - 2e^x, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Solution

1) Résolvons l'équation (1)

On commence par séparer les variables : x d'un côté et y de l'autre côté.

On a :

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow xy' = -e^y, \\ &\Rightarrow x \frac{dy}{dx} = -e^y, \\ &\Rightarrow -e^{-y} dy = \frac{1}{x} dx, \quad (\text{en supposant } x \neq 0), \\ &\Rightarrow \int (-e^{-y}) dy = \int \frac{1}{x} dx, \\ &\Rightarrow e^{-y} = \ln |x| + c / c \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow -y = \ln (\ln |x| + c) / c \in \mathbb{R} \quad (\text{en supposant } \ln |x| + c > 0), \\ &\Rightarrow y(x) = -\ln (\ln |x| + c) / c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors

$$y(x) = -\ln (\ln |x| + c) / c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle (1).

2) Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$(1 + x^2) y' - xy = 0 \dots (2)$$

On a : $y = 0$ est une solution triviale (évidente) de (2). On suppose que $y \neq 0$, et on commence à séparer les variables : x d'un côté et y de l'autre côté.

On a :

$$\begin{aligned}
 (2) &\Rightarrow (1+x^2) \frac{dy}{dx} = xy, \\
 &\Rightarrow (1+x^2) dy = xy dx, \\
 &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{1+x^2} dx, \\
 &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1+x^2} dx, \\
 &\Rightarrow \ln |y| = \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + c / c \in \mathbb{R}, \\
 &\Rightarrow |y| = e^{\ln \sqrt{1+x^2} + \ln k} / k \in \mathbb{R}, \text{ où } (c = \ln k), \\
 &\Rightarrow |y| = e^{\ln(k\sqrt{1+x^2})} / k \in \mathbb{R}, \\
 &\Rightarrow |y| = k\sqrt{1+x^2} / k \in \mathbb{R}, \\
 &\Rightarrow y = \pm k\sqrt{1+x^2} / k \in \mathbb{R}, \\
 &\Rightarrow y = \lambda\sqrt{1+x^2} / \lambda \in \mathbb{R}, \text{ où } (\lambda = \pm k).
 \end{aligned}$$

Finalement, les solutions de l'équation (2) sont :

$$y(x) = \lambda\sqrt{1+x^2} / \lambda \in \mathbb{R}.$$

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

3) Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$xyy' - y^2 + x^2 = 0 \dots (3)$$

Si on suppose que $xy \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
 (3) &\Rightarrow y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \\
 &\Rightarrow y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)},
 \end{aligned}$$

c'est une équation différentielle homogène.

On pose le changement de variable : $u = \frac{y}{x}$ qui donne $y' = u + xu'$, en remplace dans

(3)

$$\begin{aligned}(3) &\Rightarrow u + xu' = u - \frac{1}{u}, \\ &\Rightarrow x \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u}, \\ &\Rightarrow udu = -\frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \int udu = \int -\frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = -\ln|x| + c / c \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow u = \pm \sqrt{-2\ln|x| + 2c} / c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Mais : $y = xu$, d'où

$$y(x) = \pm x \sqrt{-2\ln|x| + 2c} / c \in \mathbb{R}.$$

c'est la solution générale de l'équation différentielle (3).

4) Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$x^2y' - xy + y^2 = 0 \dots (4)$$

Si on suppose que $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}(4) &\Rightarrow y' = \frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}, \\ &\Rightarrow y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2,\end{aligned}$$

c'est une équation différentielle homogène.

On pose le changement de variable : $u = \frac{y}{x}$ qui donne $y' = u + xu'$, on remplace dans (4) :

$$\begin{aligned}(4) &\Rightarrow u + xu' = u - u^2, \\ &\Rightarrow x \frac{du}{dx} = -u^2, \\ &\Rightarrow \frac{-du}{u^2} = \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \int \frac{-du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \frac{1}{u} = \ln|x| + c / c \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow u = \frac{1}{c + \ln|x|} / c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Mais : $y = xu$, d'où

$$y(x) = \frac{x}{c + \ln|x|} / c \in \mathbb{R}.$$

c est la solution générale de l'équation différentielle (4).

5) Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$xy' + y + x^2y^2 = 0 \dots (5)$$

Cette équation (5) est de Bernoulli.

$$(5) \iff \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{y} \right) + x = 0, \text{ pour } xy \neq 0$$

En posant $z = \frac{1}{y}$, on aura : $z' = \frac{-1}{y^2}y' \Rightarrow y' = -y^2z'$. En remplaçant y et y' dans (5) on obtient :

$$z' = \frac{1}{x}z + x \tag{1}$$

l'équation (1) est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z .

L'équation homogène associée à (1) est

$$z' = \frac{1}{x}z. \tag{2}$$

Résolution de l'équation (2) :

$$\begin{aligned} (2) &\Rightarrow \frac{z'}{z} = \frac{1}{x}, \\ &\Rightarrow \ln|z| = \ln|x| + k, k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow |z| = e^{\ln|x|+k}, k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow z = \pm e^k x, k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow z = cx, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où

$$z_h(x) = cx, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (2).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $z(x) = c(x)x$, donc $z'(x) = c'(x)x + c(x)$. En remplaçant z et z' dans (1), on obtient :

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow c'(x) = 1, \\ &\Rightarrow c(x) = \int 1 dx, \\ &\Rightarrow c(x) = x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où

$$z(x) = x(x + \lambda), \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1).

Par conséquent : $z = \frac{1}{y} = x(x + \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. C'est à dire :

$$y(x) = \frac{1}{x(x + \lambda)} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli (5).

6) Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x} + x \dots\dots (E).$$

Résolution de l'équation homogène $y' - \frac{1}{x}y = 0$ (EH)

Pour $y \neq 0$

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

et par suite

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

D'où

$$y(x) = Cx, \quad C = \mp C_1 \in \mathbb{R}^*$$

$y = 0$ est une solution évidente de (EH): Finalement, la solution générale de (EH) est

$$y(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}$$

Résolution de l'équation avec second membre ($y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x} + x$)

Méthode de la variation de la constante:

Soit $y(x) = Kx$ la solution générale de l'équation homogène. On fait varier la constante K , et la solution générale de l'équation avec le second membre (E) sera : $y(x) = K(x)x$.

On a $y'(x) = K'(x)x + K(x)$. En remplaçant y et y' dans l'équation (I), on obtient

$$K'(x) = \frac{1}{x^2} + 1$$

Donc

$$K(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) dx = \frac{-1}{x} + x + C$$

où $C \in \mathbb{R}$

par conséquent

$$y(x) = x \left(\frac{-1}{x} + x + C \right), \quad C \in \mathbb{R}$$

Finalement la solution générale de l'équation (E) est

$$y(x) = x^2 + Cx - 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

II) Résolvons le problème de Cauchy suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} y' = 3y + 1 - 2e^x, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Résolvons d'abord l'équation différentielle suivante :

$$y' = 3y + 1 - 2e^x \dots\dots (E)$$

L'équation homogène associée est

$$y' = 3y \dots\dots (EH)$$

Remarquons que : $y = 0$ est une solution évidente de (EH).

On suppose que $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = 3 &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3dx, \\ &\Rightarrow \ln |y| = 3x + k, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow y = \pm e^k e^{3x}, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow y = ce^{3x}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (c = \pm e^k). \end{aligned}$$

Alors

$$y_h(x) = ce^{3x}, \quad c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (EH).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $y(x) = c(x) e^{3x} \Rightarrow y'(x) = c'(x) e^{3x} + 3c(x) e^{3x}$. En remplaçant y et y' dans (EH) on obtient :

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Rightarrow c'(x) e^{3x} + 3c(x) e^{3x} = 3c(x) e^{3x} + 1 - 2e^x, \\&\Rightarrow c'(x) e^{3x} = 1 - 2e^x, \\&\Rightarrow c'(x) = e^{-3x} - 2e^{-2x}, \\&\Rightarrow c(x) = \frac{-1}{3}e^{-3x} + e^{-2x} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = \left(\frac{-1}{3}e^{-3x} + e^{-2x} + \lambda \right) e^{3x} = \frac{-1}{3} + e^x + \lambda e^{3x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$y(x) = \lambda e^{3x} + e^x - \frac{1}{3}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E).

Pour le problème de Cauchy, on a :

$$\begin{aligned}y(0) = 2 \quad &\Rightarrow \lambda + 1 - \frac{1}{3} = 2, \\&\Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = \frac{4}{3}e^{3x} + e^x - \frac{1}{3},$$

est la solution du problème de Cauchy.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll}1) y'' - 3y' + 2y = 0 & 2) y'' - 10y' + 25y = 0 \\3) y'' + 9y = 0 & \end{array}$$

Solution

1) Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \dots\dots (E)$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \dots\dots (EC)$$

cette équation (EC) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de (E) est

$$y_0 = Ae^x + Be^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

2) Résolvons l'équation différentielles suivante :

$$y'' - 10y' + 25y \dots\dots (E)$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 10r + 25 = 0 \dots\dots (EC)$$

cette équation (EC) admet la racine réelle double $r = 5$. Ainsi, la solution générale de (E) est

$$y_0 = (A + Bx) e^{5x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

3) Résolvons l'équation différentielles suivante :

$$y'' + 9y = 0 \dots\dots (E)$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 9 = 0 \dots\dots (EC)$$

cette équation (EC) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 3i$ et $r_2 = -3i$. Ainsi, la solution générale de (E) est

$$\begin{aligned} y_0 &= (A \cos 3x + B \sin 3x) e^{0x}, \\ &= A \cos 3x + B \sin 3x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ | 2) $y'' - 2y' + y = (x + 2) e^x$ |
| 3) $y'' + 4y = \cos x$. | 4) $y'' + 9y = \sin 3x$. |
| 5) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x}$ | 6) $y'' - y = x^2 + x + 1$ |

Solution:

1) Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \dots\dots (E)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \dots (Eh)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \dots (Ec)$$

On a : $\Delta = (-4)^2 - 4(4) = 0$, la racine double de l'équation (Ec) est $r_1 = r_2 = 2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (Eh) est

$$y(x) = (Ax + B)e^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (E) :

On a : $f(x) = e^{2x} = 1e^{2x}$. Comme 2 est une racine double de l'équation caractéristique (Ec), nous devons chercher une solution particulière de l'équation (E) sous la forme :

$$y_p(x) = kx^2 e^{2x}, k \in \mathbb{R},$$

donc

$$y'_p(x) = (2kx^2 + 2kx) e^{2x},$$

et

$$y''_p(x) = (4kx^2 + 8kx + 2k) e^{2x},$$

on remplace y_p , y'_p et y''_p dans (E) on a :

$$(4kx^2 + 8kx + 2k) e^{2x} - 4(2kx^2 + 2kx) e^{2x} + 4(kx^2 e^{2x}) = e^{2x},$$

on obtient : $2ke^{2x} = e^{2x}$ d'où $k = \frac{1}{2}$.

Donc la solution particulière y_p de l'équation (E) est

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= (Ax + B)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E).

2) Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' + y = (x + 2) e^x \dots\dots (E)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 2y' + y = 0 \dots\dots (Eh)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \dots\dots (Ec)$$

On a : $\Delta = (-2)^2 - 4(1) = 0$, la racine double de l'équation (Ec) est $r_1 = r_2 = 1$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (Eh) est

$$y(x) = (Ax + B) e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de l'équation (E) :

$$\text{On a : } f(x) = (x + 2) e^{1x}.$$

Comme 1 est une racine double de l'équation caractéristique (Ec), nous devons chercher une solution particulière y_p de (E) sous la forme :

$$y_p(x) = x^2 (ax + b) e^x = (ax^3 + bx^2) e^x,$$

où a et $b \in \mathbb{R}$.

Donc,

$$y'_p(x) = (ax^3 + (3a + b)x^2 + 2bx) e^x,$$

et

$$y''_p(x) = (ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b)x + 2b) e^x,$$

on remplace y_p , y'_p et y''_p dans l'équation (E) on a :

$$(E) \Rightarrow (6ax + 2b) e^x = (x + 2) e^x.$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 6a = 1, \\ 2b = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6}, \\ b = 1. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p de l'équation (E) est

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + x^2\right) e^x.$$

Alors,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= (Ax + B)e^x + \left(\frac{1}{6}x^3 + x^2\right) e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est une solution générale de (E).

3) Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y = \cos x \dots\dots (E)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 4y = 0 \dots\dots\dots (Eh)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 4 = 0 \dots\dots\dots (Ec)$$

On a : $\Delta = (0)^2 - 4(4) = -16 < 0$, l'équation (Ec) admet deux racines complexes conjuguées qui sont : $r = 2i, \bar{r} = -2i$. Alors la solution générale de l'équation homogène associée (Eh) est

$$y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de l'équation (E) :

$$\text{On a : } f(x) = \cos x$$

Comme i n'est pas une racine de l'équation caractéristique (Ec), donc on cherche la solution particulière y_p de (E) sous la forme :

$$y_p(x) = h \cos x + k \sin x, h \text{ et } k \in \mathbb{R},$$

alors

$$y_p'(x) = -h \sin x + k \cos x,$$

et

$$y_p''(x) = -h \cos x - k \sin x,$$

on remplace y_p , y'_p et y''_p dans l'équation (E) on a :

$$\begin{aligned}(E) &\Rightarrow (-h \cos x - k \sin x) + 4(h \cos x + k \sin x) = \cos x, \\ &\Rightarrow 3h \cos x + 3k \sin x = \cos x.\end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3h = 1, \\ 3k = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{1}{3}, \\ k = 0. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p de l'équation (E) est

$$y_p(x) = \frac{1}{3} \cos x$$

Alors

$$\begin{aligned}Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E).

4) Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 9y = \sin 3x \dots\dots (E)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 9y = 0 \dots\dots\dots (Eh)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 9 = 0 \dots\dots\dots (Ec)$$

On a : $\Delta = (0)^2 - 4(9) = -36 < 0$, donc l'équation (Ec) admet deux racines complexes conjuguées qui sont : $r = 3i, \bar{r} = -3i$. Alors la solution générale de l'équation homogène associée (Eh) est

$$y(x) = A \cos 3x + B \sin 3x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de l'équation (E) :

$$\text{On a : } f(x) = \sin 3x.$$

Comme $3i$ est une racine de l'équation caractéristique (Ec) , donc on cherche la solution particulière y_p de l'équation (E) sous la forme :

$$y_p(x) = x(h \cos 3x + k \sin 3x)e^{0x} = hx \cos 3x + kx \sin 3x, h \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y_p'(x) = (3kx + h) \cos 3x + (k - 3hx) \sin 3x,$$

et

$$y_p''(x) = (-9hx + 6k) \cos 3x + (-6h - 9kx) \sin 3x,$$

on remplace y_p , y_p' et y_p'' dans l'équation (E) on a :

$$\begin{aligned} (b) &\Rightarrow (-9hx + 6k) \cos 3x + (-6h - 9kx) \sin 3x + 9(hx \cos 3x + kx \sin 3x) = \sin 3x, \\ &\Rightarrow 6k \cos 3x + (-6h) \sin 3x = \sin 3x. \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 6k = 0, \\ -6h = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0, \\ h = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p de l'équation (E) est

$$y_p(x) = -\frac{1}{6}x \cos 3x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A \cos 3x + B \sin 3x - \frac{1}{6}x \cos 3x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est la solution générale de (E) .

5) Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x} \dots\dots (E)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \dots\dots\dots (Eh)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \dots\dots\dots (Ec)$$

On a : $\Delta = (-5)^2 - 4(6) = 1$, les racines de l'équation (Ec) sont : $r_1 = 2, r_2 = 3$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (Eh) est :

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière de l'équation (E) :

D'après le principe de superposition des solutions, pour trouver une solution particulière de l'équation (E), il nous suffira de trouver une solution particulière de chacune des équations suivantes :

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} \dots\dots\dots (E_1)$$

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x} \dots\dots\dots (E_2)$$

Recherche d'une solution particulière y_{p1} de l'équation (E₁) :

On a : $f_1(x) = 2e^{3x}$.

Comme 3 est une racine de multiplicité 1 (racine simple) de l'équation caractéristique (Ec), on cherche une solution particulière de l'équation (E₁) sous la forme :

$$y_{p1}(x) = \lambda x e^{3x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y'_{p1}(x) = \lambda e^{3x} + 3\lambda x e^{3x},$$

et

$$y''_{p1}(x) = 6\lambda e^{3x} + 9\lambda x e^{3x},$$

on remplace y_{p1} , y'_{p1} et y''_{p1} dans l'équation (E₁), on obtient :

$$\begin{aligned} (E_1) &\Rightarrow y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} \\ &\Rightarrow \lambda e^{3x} = 2e^{3x}, \end{aligned}$$

d'où $\lambda = 2$. Donc la solution particulière de l'équation (E₁) est

$$y_{p1}(x) = 2x e^{3x}.$$

Recherche d'une solution particulière y_{p_2} de l'équation (E_2) :

On a : $f_2(x) = e^{4x}$.

Comme 4 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (Ec) , on cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme :

$$y_{p_2}(x) = ke^{4x}, k \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y'_{p_2}(x) = 4ke^{4x},$$

et

$$y''_{p_2}(x) = 16ke^{4x}$$

on remplace y_{p_2} , y'_{p_2} et y''_{p_2} dans l'équation (E_2) on obtient :

$$\begin{aligned}(E_2) &\Rightarrow 16ke^{4x} - 20ke^{4x} + 6ke^{4x} = e^{4x} \\ &\Rightarrow 2ke^{4x} = e^{4x}\end{aligned}$$

d'où $k = \frac{1}{2}$. Donc y_{p_2} la solution particulière de l'équation (E_2) est

$$y_{p_2}(x) = \frac{1}{2}e^{4x}.$$

Alors

$$\begin{aligned}Y(x) &= y(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= Ae^{2x} + Be^{3x} + 2xe^{3x} + \frac{1}{2}e^{4x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E) .

6) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - y = x^2 + x + 1 \tag{3}$$

Solution.

L'équation homogène associée est

$$y'' - y = 0 \tag{4}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

les racines de l'équation (5) sont : $r_1 = -1, r_2 = 1$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (4) est

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (3) :

On a le second membre de l'équation (3) est

$$f(x) = x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)e^{0x}.$$

Comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (5), donc on cherche la solution particulière de (3) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{0x} = ax^2 + bx + c,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors

$$y_p'(x) = 2ax + b \text{ et } y_p''(x) = 2a.$$

Substituant dans l'équation (3) les expressions y_p et y_p'' on obtient :

$$(3) \Rightarrow 2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + x + 1,$$

$$\Rightarrow -ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + x + 1,$$

par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a = 1, \\ -b = 1, \\ 2a - c = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = -1, \\ c = -3, \end{cases}$$

d'où la solution particulière y_p de (3) est

$$y_p(x) = -x^2 - x - 3.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= -x^2 - x - 3 + Ae^{-x} + Be^x, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (3).

Exercice 4. 1) Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} 2y'' + y' - 3y = -3x^3 + 2x - 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

Solution

On va résoudre d'abord l'équation suivante:

$$2y'' + y' - 3y = -3x^3 + 2x - 1 \dots (E)$$

On a :

$$(E) \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = 0 \dots (EH)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} = 0 \dots (EC)$$

On a : $\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}$, les racines de l'équation (EC) sont : $r_1 = -\frac{3}{2}, r_2 = 1$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (EH) est

$$y(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x} + Be^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (E) :

On a :

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2} = \left(-\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}\right)e^{0x}.$$

Comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (EC), donc on cherche la solution particulière de (E) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{0x} = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, alors

$$y'_p(x) = c + 2bx + 3ax^2,$$

et

$$y_p''(x) = 2b + 6ax.$$

On remplace y_p , y_p' et y_p'' dans l'équation (E) on a :

$$\begin{aligned}(E) &\Rightarrow (2b + 6ax) + \frac{1}{2}(c + 2bx + 3ax^2) - \frac{3}{2}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}, \\ &\Rightarrow -\frac{3}{2}ax^3 + \left(\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b\right)x^2 + \left(6a + b - \frac{3}{2}c\right)x + \left(2b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}d\right) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}a = -\frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b = 0, \\ 6a + b - \frac{3}{2}c = 1, \\ 2b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}d = -\frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \\ c = 4, \\ d = 3. \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p de (E) est

$$y_p(x) = x^3 + x^2 + 4x + 3.$$

Alors

$$\begin{aligned}Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= x^3 + x^2 + 4x + 3 + Ae^x + Be^{-\frac{3}{2}x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E).

Pour le problème de Cauchy, on a :

$$y(0) = 0, \quad d'où : 3 + A + B = 0,$$

et

$$\begin{aligned}y'(0) = 4 &\Rightarrow \left(x^3 + x^2 + 4x + 3 + Ae^x + Be^{-\frac{3}{2}x}\right)'_{x=0} = 4, \\ &\Rightarrow \left(3x^2 + 2x + 4 + Ae^x - \frac{3}{2}Be^{-\frac{3}{2}x}\right)_{x=0} = 4, \\ &\Rightarrow 4 + A - \frac{3}{2}B = 4, \\ &\Rightarrow A - \frac{3}{2}B = 0.\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{cases} 3 + A + B = 0, \\ A - \frac{3}{2}B = 0. \end{cases} \quad d'où : \begin{cases} A = -\frac{9}{5}, \\ B = -\frac{6}{5}. \end{cases}$$

Alors

$$Y(x) = x^3 + x^2 + 4x + 3 - \frac{9}{5}e^x - \frac{6}{5}e^{-\frac{3}{2}x},$$

est la solution de problème du Cauchy.

2) Résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}, \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Solution.

On va résoudre d'abord l'équation:

$$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x} \quad (7)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \quad (8)$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \quad (9)$$

Les racines de l'équation (9) sont : $r_1 = 1, r_2 = 3$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (8) est

$$y(x) = Ae^x + Be^{3x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (7) :

On a le second membre de l'équation (7) est

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x}.$$

Comme -1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (9), donc on cherche la solution particulière de (7) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax + b)e^{-x}, \text{ où } a, b \in \mathbb{R},$$

alors

$$y_p'(x) = (-ax + a - b)e^{-x} \text{ et } y_p''(x) = (ax - 2a + b)e^{-x}.$$

Substituant dans l'équation (7) les expressions y_p, y'_p et y''_p on obtient :

$$(7) \Rightarrow (ax - 2a + b)e^{-x} - 4(-ax + a - b)e^{-x} + 3(ax + b)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x},$$

$$\Rightarrow 8ax - 6a + 8b = 2x + 1.$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 8a = 2, \\ -6a + 8b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{5}{16}, \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p de (7) est

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x}.$$

Alors

$$Y(x) = y_p(x) + y(x)$$

$$= \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + Ae^x + Be^{3x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de l'équation (7).

Pour le problème de Cauchy (6) on a :

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{5}{16} + A + B = 0 \dots (1)$$

et on a:

$$y'(x) = \left(\frac{-1}{4}x + \frac{-1}{16}\right)e^{-x} + Ae^x + 3Be^{3x},$$

d'où

$$y'(0) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{16} + A + 3B = 0 \dots (2)$$

De (1) et (2) on a :

$$\begin{cases} \frac{5}{16} + A + B = 0 \\ \frac{-1}{16} + A + 3B = 0 \end{cases} \quad d'où : \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = \frac{3}{16}. \end{cases}$$

Alors

$$Y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{16}e^{3x},$$

est la solution de problème du Cauchy (6).

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes:

1) $y''' + 2y'' + y' = 0$

3) $y^{(4)} + 4y = 0$

2) $y''' + y'' + y' + y = 0$

Solution

1) Résolvons l'équation suivante:

$$y''' + 2y'' + y' = 0 \dots (E)$$

L'équation caractéristique est:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \dots (Ec)$$

Les racines de (Ec) sont: $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

On a: -1 est une racine double de (Ec) , donc la solution générale de l'équation (E) est:

$$Y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x},$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes réelles.

2) Résolvons l'équation suivante:

$$y''' + y'' + y' + y = 0 \dots (E)$$

L'équation caractéristique est:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \dots (Ec)$$

On a :

$$(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0) \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

Les racines de (Ec) sont: $\lambda_0 = -1$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 - i$, donc la solution générale de l'équation (E) est:

$$\begin{aligned} Y(x) &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-0} \sin(-x) + C_3 e^{-0} \cos(-x), \\ &= C_1 e^{-x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x, \end{aligned}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes réelles.

3) Résolvons l'équation suivante:

$$y^{(4)} + 4y = 0 \dots (E)$$

L'équation caractéristique est:

$$\lambda^4 + 4 = 0 \dots (Ec)$$

On a :

$$(\lambda^4 + 4 = 0) \Leftrightarrow (\lambda^2 + 2i)(\lambda^2 - 2i) = 0$$

Les racines de (Ec) sont: $\lambda_0 = -1 + i$, $\lambda_1 = -1 - i$, $\lambda_3 = 1 + i$ et $\lambda_4 = 1 - i$, donc la solution générale de l'équation (E) est:

$$Y(x) = C_1 e^{-x} \sin x + C_2 e^{-x} \cos x + C_3 e^x \sin x + C_4 e^x \cos x,$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes réelles.