Université A. Mira - Béjaia **Année Universitaire**
Faculté de Technologie **2022/2023**
Département : ST - 1$^{\text{ère}}$année **Parcours: Ingénieur**

Série 3 de TD de l'Analyse 2

Exercice 1. *Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :*

1) $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}. \end{array}$$

2) $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{1+y}{x^2+y^2-1}. \end{array}$$

3) $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{4-y^2}\sqrt{4-x^2}. \end{array}$$

4) $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{\sin x-\sin y}{x-y+1}. \end{array}$$

5) $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & \ln\left(x^2+y^2-4\right). \end{array}$$

6) $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{1+y\sin x}{\sqrt{2x-y+1}}. \end{array}$$

Exercice 2. *Soit f et g deux fonctions définies comme suit:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2}. \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}. \end{array}$$

1) Etudier l'existence de limite de la fonction f en point $(0,0)$.

2) Etudier l'existence de limite de la fonction g en point $(0,0)$.

Exercice 3. *Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ comme suit:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x^2\sin\dfrac{y}{x} & si\ x\neq 0 \\ \\ 0 \quad si & x=0 \end{cases}. \end{array}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

3) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$ pour tout réel y_0.

4) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout réel (x,y) de $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

5) Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont-elles continues en $(0,y_0)$?

Exercice 4. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie comme suit:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si \ (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \quad si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

1) Montrer que: $\forall (x,y) \in D_f : f(x,y) \leq \dfrac{1}{4}\left(x^2+y^2\right).$

2) Etudier la continuité de f *sur* $\mathbb{R}^2$.

3) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

4) Montrer que f *est différentiable en* $(0,0)$.

Chargé de Cours: R. BOUKOUCHA