Corrigé de la Série 3 de TD de l'Analyse 2

Exercice 1. *Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :*

1) $$\begin{array}{lccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}. \end{array}$$

2) $$\begin{array}{lccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{1+y}{x^2+y^2-1}. \end{array}$$

3) $$\begin{array}{lccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \sqrt{4-y^2}\sqrt{4-x^2}. \end{array}$$

4) $$\begin{array}{lccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y+1}. \end{array}$$

5) $$\begin{array}{lccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2-4\right). \end{array}$$

6) $$\begin{array}{lccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{1+y\sin x}{\sqrt{2x-y+1}}. \end{array}$$

Solution

1) Déterminons D_f le domaine de définition de la fonction suivante:

$$\begin{array}{lccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}. \end{array}$$

f *est définie si et seulement si:* $x^2+y^2 \neq 0$, *d'où* $(x,y) \neq (0,0)$.

Alors, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

C'est le plan à l'exception le point $O(0,0)$.

2) Déterminons D_f le domaine de définition de la fonction suivante:

$$\begin{array}{lccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{1+y}{x^2+y^2-1}. \end{array}$$

f *est définie si et seulement si:* $x^2+y^2-1 \neq 0$, *d'où* $x^2+y^2 \neq 1$.

Alors, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 1\}$.

C'est le plan à l'exception les points du cercle centré en $O(0,0)$ *et de rayon* 1.

3) Déterminons D_f le domaine de définition de la fonction suivante:

$$\begin{array}{lccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \sqrt{4-y^2}\sqrt{4-x^2}. \end{array}$$

$$f \text{ est définie si et seulement si:} \begin{cases} 4-y^2 \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 \leq 4 \\ x^2 \leq 4. \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} |y| \leq 2 \\ |x| \leq 2. \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Alors, $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2 \text{ et } -2 \leq y \leq 2\right\}.$

C'est la partie du plan circonscrite dans le carré.

4) Déterminons D_f *le domaine de définition de la fonction suivante:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y+1}. \end{array}$$

$$f \text{ est définie si et seulement si:} x-y+1 \neq 0.$$

Alors, $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y+1 \neq 0\right\}.$

C'est le plan à l'exception les points de la droite d'équation $y = x+1$.

5) Déterminons D_f *le domaine de définition de la fonction suivante:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{1+y\sin x}{\sqrt{2x-y+1}}. \end{array}$$

$$f \text{ est définie si et seulement si:} 2x-y+1 > 0.$$

Alors, $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x-y+1 > 0\right\}.$

C'est le demi-plan supérieur délimité par la droite d'équation $y = 2x+1$*, à l'exception les points de cette droite.*

6) Déterminons D_f *le domaine de définition de la fonction suivante:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2-4\right). \end{array}$$

$$f \text{ est définie si et seulement si:} x^2+y^2-4 > 0.$$

Alors, $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4 > 0\right\}.$

C'est la partie du plan située hors du cercle de centre $O\,(0,0)$ *et de rayon* 2, *à l'exception les points de ce cercle. (c'est à dire le complémentaire du disque fermé de centre* $O\,(0,0)$ *et de rayon* 2*).*

Exercice 2. *Soit f et g deux fonctions définies comme suit:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f\,(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}. \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & g\,(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}. \end{array}$$

1) Etudier l'existence de limite de la fonction f en point $(0,0)$.

2) Etudier l'existence de limite de la fonction g en point $(0,0)$.

Solution

1) Etudions l'existence de limite de la fonction f en point $(0,0)$.

On a:

$$f \text{ est définie si et seulement si: } x^2+y^2 \neq 0, \text{ d'où } (x,y) \neq (0,0).$$

Alors, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

On a pour $x \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0} f\,(x,0) = 0 \qquad et \qquad \lim_{x\to 0} f\,(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc, la fonction f n'a pas de limite en point $(0,0)$.

2) Etudions l'existence de limite de la fonction g en point $(0,0)$.

On a: $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, *on a:*

$$|f\,(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,|xy| \leq \frac{1}{2}\,|xy|$$

donc,

$$0 \leq |f\,(x,y)| \leq \frac{1}{2}\,|xy|.$$

Comme, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\,|xy| = 0$ *donc d'après théorème d'encadrement on a:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Exercice 3. *Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ comme suit:*

$$\begin{array}{cccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{y}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 \quad si & x = 0 \end{cases}. \end{array}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

3) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, y_0)$ pour tout réel y_0.

4) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour tout réel (x, y) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

5) Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont-elles continues en $(0, y_0)$?

Solution

1) Déterminons D_f le domaine de définition de la fonction f:

On a: $D_f = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$.

2) Etudions la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$: la fonction f est continue car elle est composée de fonctions élémentaires continues.

Pour $x = 0$, on a:,

$$0 \leq |f(x, y)| = \left| x^2 \sin \frac{y}{x} \right| \leq x^2.$$

Comme, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ donc d'après théorème d'encadrement on a: $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$,

donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, y_0)$ pour tout réel y_0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y_0)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{y}{x} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y_0)}{y} = \lim_{y \to 0} \left(x \sin \frac{y}{x} \right) = 0.$$

4) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour tout réel (x, y) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Soit (x,y) *de* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. *On a:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \sin\frac{y}{x}\right) = 2x\sin\frac{y}{x} + x^2\left(\frac{-y}{x^2}\right)\cos\frac{y}{x} = 2x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \sin\frac{y}{x}\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)\cos\frac{y}{x} = x\cos\frac{y}{x}.$$

5) Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *sont-elles continues en* $(0,y_0)$*?*

La continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$. *On a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} & si\ x \neq 0 \\ \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{y_0}{x} - y\cos\frac{y_0}{x}\right)$: *n'existe pas, donc donc* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *n'est pas continue en* $(0,y_0)$.

La continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$. *On a :*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{y}{x} & si\ x \neq 0 \\ \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$, *donc* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *est continue en* $(0,y_0)$.

Exercice 4. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie comme suit:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \quad si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

1) Montrer que: $\forall (x,y) \in D_f : f(x,y) \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)$.

2) Etudier la continuité de f *sur* $\mathbb{R}^2$.

3) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

4) Montrer que f *est différentiable en* $(0,0)$.

Solution.

1) Montrons que: $\forall (x,y) \in D_f : 0 \leq f(x,y) \leq \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)$.

On a: $D_f = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*) \cup \{(0,0)\} = \mathbb{R}^2$.

On a: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$, *d'où* $xy \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Donc,

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}|xy|.|xy| \leq \frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right),$$

d'où,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right).$$

2) Etudions la continuité de f *sur* $\mathbb{R}^2$.

Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$*: la fonction* f *est une fonction rationnelle, elle est continue.*

Pour $(0,0)$, *on a:,*

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right).$$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{4}(x^2+y^2) = 0$, *d'après théorème d'encadrement on a:* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, *donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

3) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{0}{k^2}}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k^3} = 0.$$

4) Montrons que f *est différentiable en* $(0,0)$.

Calculons:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2k^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

On utilise les coordonnées polaires: posons: $h = r\cos\theta$ *et* $k = r\sin\theta$, *donc* $(h,k) \to (0,0)$ *on aura*

$r \to 0$ *et* $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Donc,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{r\to 0\\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} \frac{(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2}{\left((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right)\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}.$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} \frac{r^4(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2}{r^3} = \lim_{\substack{r\to 0\\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} r(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2 = 0.$$

Alors, f *est différentiable en* $(0,0)$.