Corrigé de la Série 4 de TD de l'Analyse 2

Exercice 1. *1) Calculer* $\iint_D (x^2+xy+y^2+2)\,dxdy$ *où* $D=[1,2]\times[0,3]$.

2) Calculer $\iint_D (y+1)(\cos 3x)\,dxdy,$ *où* $D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[1,2]$.

3) Calculer $\iint_D (x+2)^2\,dxdy,$ *où*

$$D=\left\{(x,y)\in\ \mathbb{R}^2/-2\leq x+y\leq 2\ \text{et}\ -1\leq x-y\leq 1\right\}.$$

4) Calculer $\iint_D y^2dxdy,$ *où* $D=\{(x,y)\in\ \mathbb{R}^2/1\leq x^2+y^2\leq 4\ \}$.

Solution.

1) Calculons $\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

On va commencer par intégrer cette fonction par rapport à y*, puis continuons le calcul en intégrant par rapport à* x*, on obtient :*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_1^2\left(\int_0^3 (x^2+xy+y^2+2)\,dy\right)dx$$

$$=\int_1^2\left(\left[x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3+2y\right]_0^3\right)dx=\int_1^2\left(3x^2+\frac{9}{2}x+15\right)dx$$

$$=\left[x^3+\frac{9}{4}x^2+15x\right]_1^2=\frac{115}{4}.$$

Ou bien on va commencer par intégrer cette fonction par rapport à x*, puis continuons le calcul en intégrant par rapport à* y*, on obtient aussi :*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^3\left(\int_1^2 (x^2+xy+y^2+2)\,dx\right)dy$$

$$=\int_0^3\left(\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2y+xy^2+2x\right]_1^2\right)dy=\int_0^3\left(\frac{3}{2}y+y^2+\frac{13}{3}\right)dy$$

$$=\left[\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{13}{3}y\right]_0^3=\frac{115}{4}.$$

2) Calculons $\displaystyle\iint\limits_D (y+1)(\cos 3x)\,dxdy$.

On a:

$$\iint\limits_D (y+1)(\cos 3x)\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_1^2 (y+1)(\cos 3x)\,dxdy$$

$$= \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x)\,dx\right)\left(\int\limits_1^2 (y+1)\,dy\right) = \left(\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\left[\frac{1}{2}y^2+y\right]_1^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin 0\right)\left(\frac{1}{2}2^2+2-\left(\frac{1}{2}1^2+1\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}\sin 0\right)\left(4-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{6}.$$

Donc, $\displaystyle\iint\limits_D (y+1)(\cos 3x)\,dxdy = -\frac{5}{6}$.

3) Calculons $\displaystyle\iint\limits_D (x+2)^2\,dxdy$.

En utilisant le changement de variables suivant, on pose

$$\begin{cases} u = x+y, \\ v = x-y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2}, \\ y = \dfrac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Dans ce cas, la matrice Jacobienne est donnée par:

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}, \quad d'où\ |\det J| = \frac{1}{2}.$$

Avec ce changement de variable, le nouveau domaine $\triangle$ *s'écrit alors:*

$$\triangle = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / -2 \le u \le 2 \quad et \quad -1 \le v \le 1\right\}$$

$$\iint\limits_{D}(x+2)^2\,dxdy=\iint\limits_{\triangle}\left(\frac{u+v}{2}+2\right)^2\frac{1}{2}dudv=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{u+v}{2}+2\right)^2du\right)dv$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(\left[\frac{1}{3}\left(\frac{u+v}{2}+2\right)^3\right]_{-2}^{2}\right)dv=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{v}{2}+3\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{v}{2}+1\right)^3\right)dv$$

$$=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{v}{2}+3\right)^4-\left(\frac{v}{2}+1\right)^4\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{2}+3\right)^4-\left(\frac{1}{2}+1\right)^4\right)-\frac{1}{6}\left(\left(\frac{-1}{2}+3\right)^4-\left(\frac{-1}{2}+1\right)^4\right)=\frac{53}{3}.$$

4) Calculons $\iint\limits_{D} y^2dxdy.$

En utilisant les coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$

Donc,

$$\iint\limits_{D} y^2dxdy=\iint\limits_{\triangle}(r\sin\theta)^2\,rdrd\theta,$$

où $\triangle=\{(r,\theta)\in\ \mathbb{R}^2/1\leq r\leq 2\ \textit{et}\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$.

Alors,

$$\iint\limits_{D} y^2dxdy=\iint\limits_{\triangle}(r\sin\theta)^2\,rdrd\theta=\int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(r\sin\theta)^2\,rdrd\theta,$$

$$=\left(\int\limits_{1}^{2}r^3dr\right)\left(\int\limits_{0}^{2\pi}(\sin\theta)^2\,d\theta\right)=\left(\int\limits_{1}^{2}r^3dr\right)\left(\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\right)$$

$$=\left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^2\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^2\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{15\pi}{4}.$$

Exercice 2. *Calculer l'aire d'un disque* D *de centre* $O\,(0,0)$ *et de rayan* r.

$$D=\left\{(x,y)\in\ \mathbb{R}^2/\ x^2+y^2\leq r^2\ \right\},$$

Solution.

On peut trouver l'aire S d'un disque D grâce au calcul intégral comme suit:

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

On pose le changement de variable $x = r\sin t \Rightarrow dx = (r\cos t)\, dt$ et

$$\begin{cases} Si\ x = 0,\ on\ aura\ t = 0. \\ Si\ x = r,\ on\ aura\ t = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Donc,

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - (r\sin t)^2}\,(r\cos t)\, dt$$

$$= 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t)\, dt = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt$$

$$= 4r^2 \left[\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4r^2 \left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{4}\sin 0\right)\right) = \pi r^2.$$

On peut aussi calculer l'aire S comme suit:

On utilisons les coordonnées polaires et le jacobien du passage en polaires on obtient:

$$S = \int_0^r\int_0^{2\pi} t.dt.d\theta = \left(\int_0^r t.dt\right).\left(\int_0^{2\pi} 1.d\theta\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^r . \left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}r^2.(2\pi) = \pi r^2.$$

Exercice 3. *Soit* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 4\}$.

Calculer $\iint\limits_D (x^2 + y + 1)\, dxdy$.

Solution.

Cherchons d'abord les bornes d'intégrations, on a:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ \\ 0 \leq y \leq 4 - x. \end{cases}$$

Donc le domaine d'intégration s'écrit aussi:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 4 \text{ et } 0 \leq y \leq 4 - x\right\}.$$

$$\iint\limits_D (x^2 + y + 1)\, dxdy = \int_0^4 \left(\int_0^{4-x} (x^2 + y + 1)\, dy\right) dx = \int_0^4 \left(\left[\left(x^2 y + \frac{1}{2} y^2 + y\right)\right]_0^{4-x}\right) dx$$

$$= \int_0^4 \left(x^2 (4 - x) + \frac{1}{2} (4 - x)^2 + (4 - x)\right) dx$$

$$= \int_0^4 \left(-x^3 + \frac{9}{2} x^2 - 5x + 12\right) dx = \left[-\frac{1}{4} x^4 + \frac{9}{6} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 12x\right]_0^4$$

$$= -\frac{1}{4} 4^4 + \frac{9}{6} 4^3 - \frac{5}{2} 4^2 + 12\,(4) = 40.$$

Donc, $\iint\limits_D (x^2 + y + 1)\, dxdy = 40.$

Exercice 4. *1) Soit:* $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \text{ et } 0 \leq z \leq 3\}$.

Calculer $\iiint\limits_V (2x + 3y - z + 5)\, dxdydz$.

2) Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y + 2z \leq 1\}$.

Calculer $\iiint\limits_D (x^2 + yz)\, dxdydz$ *sur le domaine* D .

Solution.

1) Calculons $\iiint\limits_V (2x + 3y - z + 5)\, dxdydz$.

On a :

$$\iiint\limits_V (2x+3y-z+5)\,dxdydz = \int\limits_0^1\int\limits_0^2\int\limits_0^3 (2x+3y-z+5)\,dxdydz,$$

$$= \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^3 (2x+3y-z+5)\,dz\right)dy\right)dx$$

$$= \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^2\left(\left[\left(2xz+3yz-\frac{1}{2}z^2+5z\right)\right]_0^3\right)dy\right)dx,$$

$$= \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^2\left(6x+9y+\frac{21}{2}\right)dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\left[\left(6xy+\frac{9}{2}y^2+\frac{21}{2}y\right)\right]_0^2\right)dx,$$

$$= \int\limits_0^1 (12x+39)\,dx = \Big[6x^2+39x\Big]_0^1 = 45.$$

Donc, $\displaystyle\iiint\limits_V (2x+3y-z+5)\,dxdydz = 45.$

2) Calculons $\displaystyle\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz$ *sur le domaine* D .

On a :

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{1-2z}\left(\int\limits_0^{1-x-2z}(x^2+yz)\,dy\right)dx\right)dz$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{1-2z}\left(-x^3+\left(1-\frac{3}{2}z\right)x^2+(2z^2-z)\,x+\frac{1}{2}z\,(1-2z)^2\right)dx\right)dz$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(z^2-\frac{1}{2}z-\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{12}\right)dz$$

$$= \left[-\frac{1}{6}z^4+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{12}z\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{96}$$

Exercice 5. *Soit:* $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2 \ et\ 0 \leq z \leq 3\ \}$

Calculer $\iiint\limits_V (1+z)\, y^2 (\sin x)\, dxdydz.$

Solution.

On a :

$$\iiint\limits_V (1+z)\, y^2 (\sin x)\, dxdydz = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^2 \int\limits_0^3 (1+z)\, y^2 (\sin x)\, dxdydz,$$

$$= \left(\int\limits_0^\pi (\sin x)\, dx\right)\left(\int\limits_0^2 y^2 dy\right)\left(\int\limits_0^3 (1+z)\, dz\right)$$

$$= \left(\Big[-\cos x\Big]_0^\pi\right)\left(\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^2\right)\left(\left[z+\frac{1}{2}z^2\right]_0^3\right)$$

$$= (-\cos\pi + \cos 0)\left(\frac{8}{3}\right)\left(3+\frac{9}{2}\right) = 40.$$

Donc, $\iiint\limits_V (1+z)\, y^2 (\sin x)\, dxdydz = 40.$

Exercice 6. *Soit:* $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x^2+y^2 \leq 1 \ et\ 0 \leq z \leq 2\ \}.$

Calculer $\iiint\limits_V z dxdydz.$

Solution.

On pose

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases}$$

De plus

$$\begin{cases} 0 \leq x^2+y^2 \leq 1 \\ \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq z \leq 2. \end{cases}$$

et déterminant de la matrice Jacobienne associée est donnée par:

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos\theta\, r\sin\theta\, 0 \\ \sin\theta\, r\cos\theta\, 0 \\ 0 \quad\quad 0 \quad 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\, r\sin\theta \\ \sin\theta\, r\cos\theta \end{vmatrix} = r\left(\cos\theta\right)^2 + r\left(\sin\theta\right)^2 = r.$$

Donc,

$$\iiint\limits_{V} zdxdydz = \iiint\limits_{\triangle} zrdrd\theta dz.$$

où $\triangle = \{(r,\theta,z) \in \ \mathbb{R}^3 / 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi \ \ et \ 0 \le z \le 2\ \}.$

On a :

$$\iiint\limits_{\triangle} zrdrd\theta dz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^2 zrdrd\theta dz = \left(\int_0^1 rdr\right)\left(\int_0^2 zdz\right)\left(\int_0^{2\pi} 1d\theta\right),$$

$$= \left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^1\right)\left(\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^2\right)\left(\left[\theta\right]_0^{2\pi}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)(2)\,(2\pi) = 2\pi$$

Donc, $\iiint\limits_{V} zdxdydz = 2\pi.$

Exercice 7. *Soit:* $V = \{(x,y,z) \in \ \mathbb{R}^3 / 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}.$

Calculer $\iiint\limits_{V} dxdydz.$

Solution.

On pose

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r \le 2, \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \\ \dfrac{-\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

De plus le déterminant de la matrice Jacobienne associée est donnée par: $\det J = r^2\cos\varphi.$

Donc,

$$\iiint\limits_{V} dxdydz = \iiint\limits_{\triangle} \left(r^2\cos\varphi\right) drd\theta d\varphi.$$

où $\triangle = \left\{(r,\theta,z) \in \ \mathbb{R}^3 / 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi \ \ et \ \dfrac{-\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\ \right\}.$

On a :

$$\iiint_V dxdydz = \iiint_{\triangle} \left(r^2 \cos\varphi\right) drd\theta d\varphi = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2 \cos\varphi\right) drd\theta dz,$$

$$= \left(\int_0^2 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right)\left(\int_{\dfrac{-\pi}{2}}^{\dfrac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi\right),$$

$$= \left(\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^2\right)\left(\left[\theta\right]_0^{2\pi}\right)\left(\left[\sin\varphi\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right),$$

$$= \left(\frac{8}{3}\right)(2\pi)\left(\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \frac{32\pi}{3}.$$

Donc, $\displaystyle\iiint_V zdxdydz = \frac{32\pi}{3}.$

Exercice 8. *Calculer le volume de la boule* $B(0,3)$.

Solution.

Par un changement de variables en coordonnées sphériques. On a:

$$\iiint_{B(0,3)} dxdydz = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\varphi drd\theta d\varphi,$$

$$= \left(\int_0^3 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1.d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi\right),$$

$$= \left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3\right)\left(\left[\theta\right]_0^{2\pi}\right)\left(\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\right),$$

$$= \left(\frac{1}{3}3^3\right)(2\pi)\left((-\cos\pi) + \cos 0\right) = 36\pi.$$

Exercice 9. *Calculer* $\displaystyle\iiint_V (x + 2y + 3z)\, dxdydz,$ *où*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ } et \text{ } x + y + z \leq 1\right\}.$$

Solution.

On a :

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0, \\ \ x + y + z \leq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1 - x, \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y. \end{cases}$$

On a :

$$\iiint\limits_V (x + 2y + 3z)\, dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} (x + 2y + 3z)\, dz \right) dy \right) dx,$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\left[(x + 2y)\, z + \frac{3}{2} z^2 \right]_0^{1-x-y} \right) dy \right) dx,$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{2} y^2 - y + \frac{1}{2} x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) dy \right) dx,$$

$$= \int_0^1 \left(\left[-\frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{2} y^2 + \left(\frac{1}{2} x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) y \right]_0^{1-x} \right) dx,$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{6} (1 - x)^3 - \frac{1}{2} (1 - x)^2 + \left(\frac{1}{2} x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) (1 - x) \right) dx,$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 2x + \frac{5}{6} \right) dx,$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{2} x^3 - x^2 + \frac{5}{6} x \right) \right]_0^1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{5}{6} = \frac{1}{4}.$$

Alors, $\displaystyle\iiint\limits_V (x + 2y + 3z)\, dxdydz = \frac{1}{4}.$