Université A. Mira – Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
1ère année MI

Année universitaire 2021/2022

M. Aissaoui .

Barème détaillé del'examen d'Algèbre 2

Exercice 1

1°
- E s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ -- 1pt
- Une base de E. .. 0,5.
- dim E . — 0,5.

2°)
- $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \longrightarrow 0,5.$
- $\{v_1, v_2, v_3\}$ libre $\to$ 0,5.
- (v_1, v_2, v_3) base $\to$ 0,5.
- dim F $\longrightarrow$ 0,5 .

3°) $E \oplus F = \mathbb{R}^4 \longrightarrow$ 1pt.

4°)
- $\{u_1, u_2, u_3\}$ libre $\to$ 1pts
- $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas génératrice $\to$ 1pt. .

Exercice 2 :

1) $\longrightarrow$ 1pt.

2°)
- noyau $\to$ 1pt.
- rg f $\to$ 0,5
- Im f $= \mathbb{R}^3$ -- 0,5 .
- f bijective. 0,5

3°) $\to$ 1pt

4°) $\to$ 1pt

5°) (a) $\to$ 0,5 (P) + 1pt (P^{-1})

(b) $\to$ 1,5 + 1,5

(c) $\to$ 0,5 (inversible) + 1 (l'inverse) .

(d) $(A')^{-1} = P^{-1} A^{-1} \cdot P \to$ 0,5 ; (l'inverse 1pt)

Université A. Mira – Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
1ère année MI

Année universitaire 2021/2022

Corrigé de l'examen d'Algèbre 2

Exercice 1 :

1°) $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y = z = t = 0\}$.

$= \{(x,y,0,0) \mid x+y=0\}$.

$= \{(x,-x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle u = (1,-1,0,0) \rangle$

Donc E est l'ensemble de combinaisons linéaires du vecteur u, d'où E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ engendré par u. Comme $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors (u) est une base de E et $\dim E = 1$.

2°) $F = \{(a, a+b, -a+c, c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{a(1,1,-1,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,1),\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$= \langle v_1 = (1,1,-1,0),\ v_2 = (0,1,0,0),\ v_3 = (0,0,1,1) \rangle$.

Donc F est engendré par la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$

montrons que cette famille est libre.

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\alpha(1,1,-1,0) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,1,1) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

D'où $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre de F par conséquent (v_1, v_2, v_3) est une base de F et $\dim F = 3$.

3°) Montrons que $E \oplus F = \mathbb{R}^4$

Il suffit de montrer que $\begin{cases} \dim \mathbb{R}^4 = \dim E + \dim F \\ \text{et} \\ E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}. \end{cases}$

- On a $\dim \mathbb{R}^4 = 4 = 1+3 = \dim E + \dim F$.
- Pour montrer $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ il suffit de montrer que la famille $\{u, v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

$\forall \alpha, \beta, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$;

$\alpha u + \beta v_1 + \gamma v_2 + \mu v_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = \gamma = \mu = 0$

$\alpha(1,-1,0,0) + \beta(1,1,-1,0) + \gamma(0,1,0,0) + \mu(0,0,1,1) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta + \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \mu = 0.$

$\Rightarrow \{u, v_1, v_2, v_3\}$ est libre de $\mathbb{R}^4$.

<u>ou bien</u> $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

D'où $\{u, v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

par conséquent: $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

4°) G un $\mathbb{K}$-e.v. | $\dim G = 4$ et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une base de G.

- La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre, en effet par l'absurde : on suppose que $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas libre $\Rightarrow \exists$ un vecteur par exemple u_3, qui est C.L. des autres $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tel que:

$u_3 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$.

alors $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 - u_3 + 0 u_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ n'est pas libre (lié), ceci constitue une Contradition avec le fait que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de G_1.

- La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas génératrice de G_1

par l'absurde : supposons que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est génératrice de $G_1 \Rightarrow \forall v \in G_1, \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, en particulier

pour $v = u_4 \Rightarrow u_4 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$.

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 - u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$.

on a une C.L. des vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4, nulle sans que les coefficents soient tous nuls.

donc $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est lié $\Rightarrow$ Contratiction.

D'où $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas génératrice.

Exercice 2 :

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1°) Expression de f :

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = A \; {}^t(x,y,z)$.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y \end{pmatrix}$$

D'où $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (x+z,\; y+z,\; x+z)$

2°) $\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$.

$$f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} x+z = 0 & \text{--- (1)} \\ y+z = 0 & \text{--- (2)} \\ x+y = 0 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 & \text{--- (1)-(2)} \\ x+y = 0 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

dans(1) $\Rightarrow z = 0$.

ds (2) $\Rightarrow y = 0$.

D'où $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

. D'après le théorème du rang :

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3 - 0 = 3$

$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 3 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow f$ surjective.

Comme f est un endomorphisme $\Rightarrow f$ est bijective.

3°) $w = (3,0,1) \in \mathbb{R}^3$.

Comme f est ~~bi~~jective $\Rightarrow \exists!(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.q.

$f(x,y,z) = w$.

Déterminons w : $f(x,y,z) = w \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = 3 & \text{--- (1)} \\ y+z = 0 & \text{--- (2)} \\ x+y = 1 & \text{--- (3)} \end{cases}$

$(1)-(2) \Rightarrow \begin{cases} x-y = 3 \\ x+y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

ds (1) $\Rightarrow z = 3-2 = 1$.

ds (2) $\Rightarrow z = -y \Rightarrow y = -z = -1$.

D'où $\boxed{(x,y,z) = (2,-1,1)}$.

Autre méthode : Le système ci-dessus est de Cramer, admet donc une unique solution qu'on trouvera : $(x,y,z) = (2,-1,1)$.

4°) $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$.

On a $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$, puisque ~~c'est~~ une base de $\mathbb{R}^3$.

$\{v_1, v_2\}$ est libre de $\mathbb{R}^3$, en effet :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$

D'après le théorème de la base incomplète on peut compléter $\{v_1, v_2\}$ par un vecteur de $\mathcal{B}$ pour former une base de $\mathbb{R}^3$.

On choisit par exemple $e_1 = (1,0,0)$.

On a : $\{v_1, v_2, e_1\}$ est libre de $\mathbb{R}^3$. donc elle forme une base de $\mathbb{R}^3$.

5°) $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, e_1)$.

a) $P = \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{\text{passage}} = \mathrm{Mat}(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & e_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Calcul de P^{-1} :

1ère méthode : $P^{-1} = \underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{\text{passage}} = \mathrm{Mat}(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

on a
$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 + e_3 & \text{---}(1) \\ v_2 = e_1 - e_2 . & \text{---}(2) \\ e_1 = e_1 . & \text{---}(3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \boxed{e_2 = e_1 - v_2} \Rightarrow \boxed{e_2 = 0v_1 - v_2 + e_1}$

$(1) \Rightarrow e_3 = v_1 - e_1 - e_2 = v_1 + v_2 - 2e_1$

$\boxed{e_1 = 0v_1 + 0v_2 + e_1}$, $\boxed{e_3 = v_1 + v_2 - 2e_1}$

D'où
$$P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ e_1 . \end{array}$$

2ème méthode : $\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$.

$$C = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^tC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = ?$

<u>1ère méthode</u> : $A' = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(e_1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ e_1 \end{matrix} \end{array}$

$$f(v_1) = f(1,1,1) = (2,2,2) = 2v_1.$$

$$f(v_2) = f(1,-1,0) = (1,-1,1) = v_2.$$

$f(e_1) = (1,0,1)$ (1ère colonne de A)

$$= \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e_1.$$

$$= \alpha(1,1,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(1,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta + \gamma \; \Rightarrow \gamma = 1 - \alpha - \beta = -1. \\ 0 = \alpha - \beta \; \Rightarrow \beta = \alpha \\ 1 = \alpha \end{cases}$$

D'où $f(e_1) = v_1 + v_2 - e_1$.

D'où $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow[P]{Id_{\mathbb{R}^3}} \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow[A]{f} \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow[P^{-1}]{Id_{\mathbb{R}^3}} \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^3} \qquad A' = P^{-1}AP$$

<u>2ème méthode</u> : en utilisant la matrice de passage :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) On a $rg(A) = rg(f) = \dim \mathrm{Im} f = 3$.

D'où A est inversible, son inverse est donné par : $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^tC_A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tC_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d) On a $A' = P^{-1} A P$.

$$(A')^{-1} = (P^{-1} A P)^{-1}$$

$$(A')^{-1} \overset{?}{=} P^{-1} A^{-1} . P \quad \text{en effet}$$

On a bien $(P^{-1}AP)(P^{-1}A^{-1}P) = (P^{-1}A^{-1}P)(P^{-1}AP)$

$$= A A^{-1} = A^{-1} A = I_3$$

$$(A')^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$