Coupe de Gomory

Exo1 : Soit $(P) = \begin{cases} \text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 . \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} . \end{cases}$

1) On cherche d'abord le prblm relaxé $\Rightarrow (PR) = \begin{cases} \text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 . \\ x_1 ; x_2 \geq 0 . \end{cases}$

2) On résoud le prblm relaxé en utilisant la méthode de simplexe car toute les contraintes sont de type $\leq$.

3) Après déduction de la forme standard puis la solution réalisable, solution de base et hors base. On construit le 1er tableau du simplexe et on continue le calcul jusqu'à trouver la solution finale.

le dernier tableau

Tableau 3			3	4	0	0
Base	**Cb**	Q	**X1**	**X2**	**E1**	**E2**
X1	3	9 / 4	1	0	3 / 4	-1 / 4
X2	4	3 / 2	0	1	-1 / 2	1 / 2
Z		51 / 4	0	0	1 / 4	5 / 4

La solution optimale est Z = 51 / 4
$X_1 = 9 / 4$
$X_2 = 3 / 2$

La solution n'est pas entière donc on construit la nouvelle coupe.

$$\left\{\frac{-1}{2}\right\} e_1 + \left\{\frac{1}{2}\right\} e_2 \geq \left\{\frac{3}{2}\right\} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e_1 + e_2 \geq 1 \quad \text{-- (I)}$$

d'après la forme standard : $e_1 = 6 - 2x_1 - x_2$

$e_2 = 9 - 2x_1 - 3x_2$.

(I) $\Leftrightarrow 6 - 2x_1 - x_2 + 9 - 2x_1 - 3x_2 \geq 1 \Leftrightarrow \boxed{2x_1 + 2x_2 \leq 7}$

on ajoute la nouvelle contrainte au problème :

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ On résoud le problème avec le simplexe

Le dernier tableau $\longrightarrow$

Tableau 3			3	4	0	0	0
Base	**Cb**	Q	**X1**	**X2**	**E1**	**E2**	**E3**
E1	0	1	0	0	1	1	-2
X2	4	2	0	1	0	1	-1
$\rightarrow$ X1	3	3 / 2	1	0	0	-1	3 / 2
Z		25 / 2	0	0	0	1	1 / 2

La solution optimale est Z = 25 / 2

X1 = 3 / 2

X2 = 2

La solution n'est pas entière donc on construit la nouvelle coupe.

$$\{-1\} e_2 + \left\{\frac{3}{2}\right\} e_3 \geq \left\{\frac{3}{2}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} e_3 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e_3 \geq 1} \text{ — II}$$

d'après la f.S $\Rightarrow e_3 = 7 - 2x_1 - 2x_2$

(II) $\Leftrightarrow 7 - 2x_1 - 2x_2 \geq 1 \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 \leq 6$.

$\Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 \leq 3}$

on ajoute la nouvelle contrainte au problème et on résoud avec le simplexe.

Tableau 2			3	4	0	0	0	0
Base	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_3	0	3	1	0	1	0	0	-1
P_4	0	0	-1	0	0	1	0	-3
P_5	0	1	0	0	0	0	1	-2
P_2	4	3	1	1	0	0	0	1
Z		12	1	0	0	0	0	4

La solution optimale est $Z = 12$
$X_1 = 0$
$X_2 = 3$

La solution est entière donc la solution est optimale.

$x_1 = 0$

$x_2 = 3$ avec $\boxed{Z = 12}$