Exo2 : Soit $P = \begin{cases} \max z = x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ -6x_1 + 14x_2 \leq 35 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$ on cherche le problm relaxé.

puis on va le résoudre avec la méthode de simplexe

Le dernier tableau nous donne :

La solut° n'est pas entière donc on cherche la nouvelle coupe.

Tableau 4			1	2	0	0	0
Base	Cb	P_0	P_1	P_2	e_1	e_2	e_3
e_2	0	4	0	0	11 / 19	1	1 / 19
x_2	2	4	0	1	3 / 19	0	2 / 19
x_1	1	7 / 2	1	0	7 / 19	0	3 / 38
Z		23 / 2	0	0	13 / 19	0	11 / 38

$\left\{\frac{7}{19}\right\} e_1 + \left\{\frac{3}{38}\right\} e_3 \geq \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

La solution optimale est Z = 23 / 2
$X_1 = 7 / 2$
$X_2 = 4$

$\Rightarrow \frac{7}{19} e_1 + \frac{3}{38} e_3 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{14 e_1 + 3 e_3 \geq 19}$ — (I)

d'après la forme standard : $e_1 = 2 - 4x_1 + 3x_2$
$e_3 = 35 + 6x_1 - 14x_2$.

(I) $\Rightarrow 14(2 - 4x_1 + 3x_2) + 3(35 + 6x_1 - 14x_2) \geq 19$.

$28 - 56x_1 + \cancel{42x_2} + 105 + 18x_1 - \cancel{42x_2} \geq 19$.

$-38x_1 \geq -114 \Rightarrow \boxed{x_1 \leq 3}$

on ajoute la nouvelle contrainte au problème.

Après résolution du nouveau problème avec la méthode du simplexe on obtient le dernier tableau suivant :

Tableau 4			1	2	0	0	0	0
Base	Cb	P0	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4
E1	0	19 / 14	0	0	1	0	3 / 14	-19 / 7
X2	2	53 / 14	0	1	0	0	1 / 14	3 / 7
X1	1	3	1	0	0	0	0	1
E2	0	45 / 14	0	0	0	1	-1 / 14	11 / 7
Z		74 / 7	0	0	0	0	1 / 7	13 / 7

La solution optimale est Z = 74 / 7
$X_1 = 3$
$X_2 = 53 / 14$

La solution n'est pas entière donc on construit la nouvelle coupe.

$$\left\{\frac{1}{14}\right\}e_3+\left\{\frac{3}{7}\right\}e_4 \geq \left\{\frac{53}{14}\right\} \Rightarrow \frac{1}{14}e_3+\frac{6}{14}e_4 \geq \frac{11}{14}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e_3+6e_4 \geq 11} \text{ — II.}$$

d'après la forme standard : $e_3 = 35 + 6x_1 - 14x_2$
$e_4 = 3 - x_1$

$$\text{(II)} \Rightarrow 35+6x_1-14x_2+(3-x_1)6 \geq 11$$

$$35+\cancel{6x_1}-14x_2+18-\cancel{6x_1} \geq 11$$

$\Rightarrow \boxed{x_2 \leq 3}$ on ajoute la nouvelle contrainte au problème

$$\begin{cases} \text{Max } Z = x_1+2x_2 \\ 4x_1-3x_2 \leq 2 \\ -2x_1+x_2 \leq 1 \\ -6x_1+14x_2 \leq 35 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Après résolution du nouveau problème avec la méthode du simplexe on obtient le dernier tableau suivant :

Tableau 5			1	2	0	0	0	0	0
Base	**C_b**	Q	**X_1**	**X_2**	**E_1**	**E_2**	**E_3**	**E_4**	**E_5**
E_3	0	19 / 2	0	0	3 / 2	0	1	0	-19 / 2
X_2	2	3	0	1	0	0	0	0	1
→ X_1	1	11 / 4	1	0	1 / 4	0	0	0	3 / 4
E_4	0	1 / 4	0	0	-1 / 4	0	0	1	-3 / 4
E_2	0	7 / 2	0	0	1 / 2	1	0	0	1 / 2
Z		35 / 4	0	0	1 / 4	0	0	0	11 / 4

La solution optimale est $Z = 35 / 4$

$X_1 = 11 / 4$

$X_2 = 3$

La solution n'est pas entière on construit la nouvelle coupe.

$$\left\{\frac{1}{4}\right\} e_1 + \left\{\frac{3}{4}\right\} e_r \geq \left\{\frac{11}{4}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4} e_1 + \frac{3}{4} e_r \geq \frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow e_1 + 3 e_r \geq 3. \quad \text{— III}$$

d'après la F.S : $e_1 = 2 - 4x_1 + 3x_2$.

$e_r = 3 - x_2$.

$$\text{III} \Rightarrow 2 - 4x_1 + \cancel{3x_2} + 9 - \cancel{3x_2} \geq 3.$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 \leq 2}$$

on ajoute la nouvelle contrainte au problème :

$$\begin{cases} \text{Max } Z = x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ -6x_1 + 14x_2 \leq 35 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 3. \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 5			1	2	0	0	0	0	0
Base	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_3	0	3	0	0	1	0	0	-4	3
P_2	2	3	0	1	0	0	0	0	1
P_1	1	2	1	0	0	0	0	1	0
P_5	0	5	0	0	0	0	1	6	-14
P_4	0	2	0	0	0	1	0	2	-1
Z		8	0	0	0	0	0	1	2

La solution optimale est Z = 8
$X_1 = 2$
$X_2 = 3$

La solution est entière donc optimale pour le problème.

$x_1 = 2$ avec $\boxed{Z = 8}$
$x_2 = 3$