**Université A. MIRA-Béjaia**
**Faculté de Technologie** **Mai 2023**
**Département de Technologie** **Durée :01 heure 30**

# <u>Examen de Maths 2</u>

**Exercice 1.** (**04 pts**)
On considère les primitives suivantes :

$$I = \int \frac{e^x + 1}{e^x + 2} dx; \quad J = \int \frac{1}{e^x + 2} dx.$$

Calculer $I + J$ et $I - J$. En déduire $I$ et $J$.

**Exercice 2.** (**8 pts**)

I. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + y = xe^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

II. Soit l'équation différentielle suivante,

$$y'' - 2y' + y = e^{3x} + \left(x^2 + 1\right) e^x \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à $(E)$.
2. Vérifier que $h(x) = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right) e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$ est une solution particulière de $(E)$, et déduire la solution générale de $(E)$.

**Exercice 3.** (**08 pts**)
Considérons la matrice carrée $3 \times 3$ suivante,

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -\alpha \\ (\alpha - 1)^2 & 1 & 2 \\ (\alpha - 1) & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

I. Calculer $\det(A)$ en utilisant la méthode de Sarrus. En déduire pour quelles valeurs de $\alpha$ la matrice $A$ serait inversible.

II. Dans cette partie on considère $\alpha = 1$

1. Calculer $A^2$, en déduire $A^{-1}$.
2. Calculer $A^{-1}$ en utilisant la définition.
3. Résoudre le système :

$$(S) \begin{cases} -x - y - z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ -z = 1 \end{cases}$$

en utilisant la méthode de Cramer ainsi que la méthode de l'inverse.

III. Pour $\alpha = -1$. Résoudre le système $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot de Gauss.

**Bon courage**

Exo 01 : 04

1) $I+J=\int \frac{e^x+1+1}{e^x+2}\,dx = \int 1\,dx = x+C$ 1

$I-J=\int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = \ln(e^x+2)+k$ 1

2) $I+\cancel{J}+I-\cancel{J} = x+\ln(e^x+2)+\underset{(k+c)}{\alpha}$

$2I = x+\ln(e^x+2)+\alpha$ 1

alors: $I = \frac{x+\ln(e^x+2)}{2}+B.$

$J = x+C-I = \frac{x}{2}-\frac{\ln(e^x+2)}{2}+\gamma$ 1

Exo 02 :

1) $\begin{cases} y'+y = xe^{-x} \to (E) \\ y(0)=1 \end{cases}$

* Equation homogène : $y'+y=0 \to$ E.H.

$y_h = k e^{\int -1\,dx} = ke^{-x}.$ 1

* Solution particulière de E : ?

$y_p = k(x)e^{-x}.$ $K(x) = \int \frac{x\cancel{e^{-x}}}{\cancel{e^{-x}}}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ 1,5

$y_p = \frac{x^2}{2}e^{-x}.$

* Solution générale de E : $y = y_h+y_p = ke^{-x}+\frac{x^2}{2}e^{-x}.$

mais on sait que : $y(0)=1$

Donc : $1 = k\cdot e^{-0}+0 = k \Rightarrow k=1.$ 1,5

alors : $\boxed{y = e^{-x}+\frac{x^2}{2}e^{-x}}$

2) $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x + e^{3x}$ — (E)

a) $y'' - 2y' + y = 0$ -- (E.H) 0.1r

$r^2 - 2r + r = 0$ .... (E.C) 0.1r

$\Delta = 0$, $r = 1$,

$y_h = (\alpha x + B)e^x$. 0.1r

b) $h(x) = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$.

$h'(x) = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x\right)e^x + \frac{3}{4}e^{3x}$. 0.1r

$h''(x) = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1\right)e^x + \frac{9}{4}e^{3x}$ 0.1r

$$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = \left[\frac{x^4}{12} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1 - \frac{x^4}{6} - x^2 - \frac{2}{3}x^3 - 2x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right]e^x$$

$$+ \left[\frac{9 - 6 + 1}{4}\right]e^{3x}$$

$$= (x^2+1)e^x + e^{3x}$$ 1

Donc : $h(x)$ est bien solution particulière de (E)

* Solution générale de E : $y = y_h + h(x)$

$y = (\alpha x + B)e^x + \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$

0.1r

1)

$$\det A = \left|\begin{matrix} -\alpha & -1 & -2 \\ (\alpha-1)^2 & 1 & 2 \\ (\alpha-1) & 0 & -1 \end{matrix}\right.\left.\begin{matrix} -\alpha & -1 \\ (\alpha-1)^2 & 1 \\ (\alpha-1) & 0 \end{matrix}\right| \quad 0,25$$

$$= \alpha - 2(\alpha-1) + 0 - (-\alpha)(\alpha-1) - 0 - (-1)(\alpha-1)^2(-1)$$

$$= \cancel{\alpha} - \cancel{2\alpha} + 2 + \cancel{\alpha^2} - \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha^2} - 1 + \cancel{2\alpha} = 1. \quad 0,25$$

$\det A = 1$.

* $\det A = 1$, pour tout $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

$\det A \neq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow A$ est inversible pour tout $\alpha$ réel. 0,5

2), $\underline{\alpha = 1}$ :
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 0,25$$

* $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Id_3$. 1

alors : $A^{-1} = A$. 0,25

* Calcul de $A^{-1}$ par la définition :

0,5 $\left(A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} (\mathrm{com}(A))^t\right.$, $\det A = 1$.

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad 0,5$$

$$A^{-1} = (\mathrm{com}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A \quad 0,5$$

## (*) Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

### (*) → Méthode de Cramer :

$$x = \frac{|\quad|_x}{\det A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad 0,5 \begin{cases} 0,25 \\ 0,25 \end{cases}$$

$$y = \frac{|\quad|_y}{\det A} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad 0,5 \begin{cases} 0,25 \\ 0,25 \end{cases}$$

$$z = \frac{|\quad|_z}{\det A} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad 0,5 \begin{cases} 0,25 \\ 0,25 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

### (*) → Méthode de l'inverse :

$$A \cdot X = B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors : $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$

alors : $Id_3 \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$\Rightarrow \underbrace{X = A^{-1} \cdot B}_{0,5} = A \cdot B = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{0,5}.$$

3) $\underline{\alpha = -1}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Résoudre $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ par la méthode de Gauss :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

01r

On aura :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{5} L_2$ 01r

On aura :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{11}{5} \end{array}\right]$$

$L_3 \Rightarrow \frac{1}{5} z = \frac{11}{5} \Rightarrow \boxed{z = 11}$.

$L_2 \Rightarrow 5y - 2z = -2 \Rightarrow y = \frac{-2 + 2z}{5}$

$\Rightarrow y = \frac{-2 + 22}{5} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow \boxed{y = 4}$ 01r

$L_1 \Rightarrow x - y + z = 1 \Rightarrow x = 1 + y - z = 1 + 4 - 11$

$\Rightarrow \boxed{x = -6}$.