République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

Support de Cours

destiné aux étudiants de L2 et L3

Notions fondamentales en Probabilités

D^r. Khimoum Noureddine

Béjaia, 2020-2021.

Table des matières

Introduction

Le calcul des probabilités est la suite logique de la statistique descriptive où l'on introduit de façon empirique les différentes notions du langage de probabilités. C'est Dante (1265-1321) qui parla pour la première fois des probabilités de gains avec trois dés. Blaise Pascal (1632-1662) et Pierre Fermat (1601 - 1665) pour la solution qu'ils ont proposé au problème du chevalier de Méré ont donné une impulsion à la théorie des probabilités. Le premier traité de probabilités est du à Jacques Bernoulli (1654-1705). Le traité ≪ Théorie analytique des probabilités ≫ de Pierre Simm Laplace (1749-1827) publié en 1812 introduit plusieurs outils Mathématiques pour évaluer les probabilités de divers phénomènes naturels. C'est dans l'ouvrage de Denis Poisson (1781-1840) intitulé ≪Recherche sur les probabilités de jugements ≫ publié en 1837 qu'apparaît pour la première fois la loi qui porte son nom. C'est Colaievitch Kolmogorov une des figures de l'école soviétique des probabilités qui a donné les axiomes vers 1930 du calcul des probabilités dans le cadre de la théorie de la mesure.

CHAPITRE

1 Analyse combinatoire

1.1 Introduction

L'analyse combinatoire est l'étude permettant de determiner sans dénombrement direct le nombre de résultats possibles d'une experience particulière, ou le nombre d'éléments d'un ensemble particulier.

1.2 Principe fondamental de dénombrement

Le principe de dénombrement établit en gros que si une expérience peut produire m résultats et une autre n, alors il y a $m \times n$ résultats possibles lorsqú'on considère ces deux expériences ensemble.

Théorème 1 *Supposons qu'il faille réaliser deux expériences. Si l'expérience 1 peut produire l'un des m résultats possibles et si, pour chacun d'entre eux, il y a n résultats possibles pour l'expérience 2, alors il existe $m \times n$ résultats pour les deux expériences prises ensemble.*

Exemple 1 *Une petite communauté se compose de dix hommes et de leurs fils, chaque homme ayant trois fils. Si un homme et l'un de ses fils doivent être désignés père et fils exemplaires, combien y a-t-il de choix différents possibles ?*

Réponse *En considérant le choix du père comme la première expérience et ensuite le choix de l'un de ses fils comme la seconde, nous conclurons d'après le principe fondamental qu'il y a 10× 3 = 30 choix possibles.*

Exemple 2 *Supposons qu'une plaque d'immatriculation est composée de deux lettres distinctes et de trois chiffres dont le premier est différent de zero. De combien de façons peut-on imprimer les plaques ?*

1.3 Permutations

Soit E un ensemble donné formé de n éléments.

Théorème 2 *Le nombre de permutations possibles des n éléments de E est égal à $n!$*

Exemple 3 *Combien de nombres de 5 chiffres différents peut-on former avec les chiffres $\{1,2,3,4,5\}$?*

Réponse

$$5!$$

Définition 1 (Permutation avec répétition)
Une permutation avec répétition de r objets parmi n est un arrangement de r objets parmi n pris dans un ordre donné avec possibilité de répétition

Théorème 3 *Il y a n^r permutations différentes avec répétition de r objets parmi n.*

Exemple 4 *combien de mots de passe de 3 chiffres peut-on former avec les chiffres* $\{1,2,3,4,5\}$ *?*

Réponse

$$5^3 = 125$$

Théorème 4 *Le nombre de permutations de n objets, dont n_1 sont semblables, n_2 sont semblables,..., n_r sont semblables est :*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$$

Exemple 5 *Combien de mots différents peut-on former avec le mot ≪ esses ≫ ?*

Réponse

$$\frac{4!}{2!\times 2!} = 6$$

1.4 Arrangements

Définition 2 (Arrangements)
Un arrangement de r objets parmi n est une permutation de r objets parmi n pris dans un ordre donné et sans répétition.

Théorème 5 *Le nombre d'arrangements de r éléments parmi n noté A_n^r est*

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemple 6 *Combien de mots de passe de 3 chiffres différents peut-on former avec les chiffres* $\{1,2,3,4,5\}$ *?*

Réponse

$$A_5^3 = 10$$

Cas particulier : Dans le cas particulier où $r = n$, on a : $A_n^n = n!$.

Exemple 7 *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire r boules l'une après l'autre et on inscrit le numéro de la boule. De combien de façons peut-on faire l'experience, si*

1. *l'on remet la boule après chaque tirage ;*
2. *l'on ne remet pas la boule après chaque tirage.*

1.5 Combinaisons

Définition 3 *On appelle combinaison de r objets parmi n, une collection de r objets parmi n pris sans répétition ou sans tenir compte de l'ordre.*

Exemple 8 *Soit l'ensemble $E = \{1,2,3,4\}$. Les combinaisons de ces quatres éléments pris trois à trois sont :*

$$\{(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)\}$$

Théorème 6 *Le nombre de combinaisons possibles de n éléments pris r à r noté C_n^r est :*

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Propriétés

1. Par convention $0! = 1$.

2. Pour tout entier naturel k, $0 \leq k \leq n$, $\quad C_n^k = C_n^{n-k}$.
3. Pour tout entier naturel k, $0 \leq k \leq n$, $\quad C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.
4. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

Exemple 9 *Quel est le nombre de comités de 3 hommes et 2 femmes que l'on peut former à partir de 7 hommes et 5 femmes ?*

Réponse

$$C_7^3 \times C_5^2$$

1.6 Exercices Corrigés

Exercice 1 En supposant dans cet exercice qu'il n y a aucune répétition et à l'aide des chiffres 2, 9, 3, 7, 5 et 6, déterminer :

1. le nombre total de nombres de 3 chiffres que l'on peut former.
2. le nombre de nombres de 3 chiffres qui sont inférieurs à 400.
3. le nombre de nombres de 3 chiffres qui sont pairs.
4. le nombre de nombres de 3 chiffres qui sont impairs.
5. le nombre de nombres de 3 chiffres qui sont multiples de 5.

Réponse Considérons trois cases représentant un nombre de 3 chiffres, on aura :

1. La case de gauche peut être occupée de 6 manières différentes, celle du milieu de 5 manières différentes et celle de droite de 4 manières différentes. On aura alors

$$6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ nombres de 3 chiffres.}$$

2. La case de gauche peut être occupée de 2 manières différentes, 2 ou 3, puisque le nombre doit être plus petit que 400. Celle du milieu de 5 manières différentes et celle de droite de 4 manières différentes. On aura alors

$$2 \times 5 \times 4 = 40 \text{ nombres de 3 chiffres inférieurs à 400.}$$

3. La case de droite peut être occupée de 2 manières différentes, 2 ou 6, puisque le nombre doit être pair. Celle de gauche de 5 manières différentes et celle dû milieu de 4 manières différentes. On aura alors

$$5 \times 4 \times 2 = 40 \text{ nombres pairs de 3 chiffres .}$$

4. La case de droite peut être occupée de 4 manières différentes, 3,5,7 ou 6, puisque le nombre doit être impair. Celle de gauche de 5 manières différentes et celle dû milieu de 4 manières différentes. On aura alors

$$5 \times 4 \times 4 = 80 \text{ nombres impairs de 3 chiffres} .$$

5. La case de droite peut être occupée d'une seule manière, à savoir par 5, puisque le nombre doit être multiple de 5. Celle de gauche de 5 manières différentes et celle du milieu de 4 manières différentes. On aura alors

$$5 \times 4 \times 1 = 20 \text{ nombres de 3 chiffres multiples de 5}.$$

Exercice 2 De combien de manières, 3 garçons et 2 filles peuvent-ils prendre place sur un banc, si

1. Tous les garçons s'assoient l'un à coté de l'autre ?
2. Toutes les filles s'assoient l'une à coté de l'autre ?
3. Seulement les filles s'assoient ensemble ?
4. Sans restriction (c'est-à-dire, on impose rien) ?

Réponse

1. Il y a 3 façons de distribuer les personnes, de sorte que les garçons soient groupés, gggff, fgggf ou ffggg. Dans chacun de ces cas, les garçons peuvent s'asseoir de $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ façons, et les filles de $2 \times 1 = 2$ façons. Il y a ainsi en tout $3 \times 3! \times 2! = 3 \times 6 \times 2 = 36$ façons différentes.
2. Il y a 4 façons de distribuer les personnes, de sorte que les filles soient groupées, ffggg, gffgg, ggffg ou gggff. Dans chacun de ces cas, les garçons peuvent s'asseoir de $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ façons, et les filles de $2 \times 1 = 2$ façons. Il y a ainsi en tout $4 \times 3! \times 2! = 4 \times 6 \times 2 = 48$ façons différentes.
3. Ce troisième cas où seulement les filles peuvent être ensemble, correspond au cas précèdent en éliminant les configurations où les garçons peuvent être ensemble. Il y a ainsi 2 façons de distribuer les personnes, de sorte que seulement les filles soient groupés et non les garçons, gffgg, ggffg. Il y a ainsi $2 \times 3! \times 2! = 2 \times 6 \times 2 = 24$ façons différentes.
4. Les cinq personnes peuvent prendre place de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ façons.

Exercice 3 Si un étudiant veut suivre deux cours de mathématiques et deux cours d'informatique, et qu'il y a 5 cours de mathématiques et quatre cours d'informatique appropriés, de combien de façons peut-il choisir les quatre cours ?

Réponse Il peut choisir les cours de mathématiques de $C_5^2 = 10$ façons et les cours d'histoire de $C_4^2 = 6$ façons, de sorte qu'il peut faire les deux choses ensemble de $10 \times 6 = 60$ façons.

Exercice 4 Supposons que vous avez 11 amis très proches, et que vous souhaitez en inviter 5 à dîner.

1. Combien de groupes différents d'invités pouvez vous en avoir ?
2. Combien de possibilités y a-t-il si parmi vos amis il y a un couple marié et les deux personnes ne peuvent venir donc qu'ensemble ?
3. Combien de possibilités y a-t-il si le couple précédent est divorcé, l'homme et la femme ne peuvent pas être invités ensemble ?

Réponse

1. On choisit un groupe de 5 parmi 11, c'est-à-dire $C_{11}^5 = 462$.
2. Les deux personnes mariées sont soit invitées ensembles, soit ignorées ensemble. Si elles sont invitées alors il faudra choisir encore 3 personnes parmi les 9 restantes, c'est-à-dire $C_{11-2}^3 = 84$. Si par contre les deux personnes ne sont pas invitées alors il faudra choisir les 5 invitées parmi 9, c'est-à-dire $C_9^5 = 126$. En faisant ainsi la somme on aura $C_9^3 + C_9^5 = 250$ possibilités.
3. Si l'homme est invité alors il faudrait choisir encore 4 personnes parmi les 9 restantes, c'est-à-dire $C_9^4 = 126$. de même si c'est la femme qui est invitée. Enfin si ni l'homme ni la femme n'est invité alors on choisira 5 personnes parmi les 9 restantes, $C_9^5 = 126$. On aura au total $C_9^4 + C_9^4 + C_9^5 = 378$ possibilités.

Exercice 5 A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10.

1. Combien de choix possibles y a-t-il ?
2. Combien de choix y a-t-il s'il doit répondre aux 3 premières questions ?
3. Combien de choix y a-t-il s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?

Réponse

1. Il y a $C_{10}^8 = 45$ choix possibles pour les 8 questions.
2. Si l'étudiant répond aux trois premières questions, il peut choisir les 5 autres parmi les 7 questions restantes de $C_7^5 = 21$ façons différentes.
3. Si l'étudiant réponds aux 5 premières questions il peut choisir les 3 autres de $C_5^3 = 10$ façons différentes. Par contre, s'il répond à 4 parmi les 5 premières questions, il peut faire son choix de $C_5^4 = 5$ façons différentes et choisir ensuite 4 des 5 dernières questions de $C_5^4 = 5$ façons différentes. par conséquent, il peut choisir les 8 questions de 5 ×5 = 25 façons différentes et ainsi il y a un total de 10 + 25 = 35 choix possibles.

Exercice 6 Combien de mots différents peut-on former à partir du mot ≪ essence ≫ ?

Réponse On peut former $\frac{7!}{3!.2!} = 420$ mots différents.

Exercice 7 Parmi les 10 participants à un tournoi d'échec, on compte 4 russes, 3 américains, 2 anglais et un Algérien. Si dans le classement du tournoi on ne peut lire que la liste des nationalités des joueurs mais pas leur identité, à combien de classements individuels différents une telle liste correspond-elle ?

Réponse

$$\frac{10!}{4!3!2!1!} = 12600$$

Exercice 8 Le poste de police de l'Université de Béjaia compte 8 agents de sécurité. Si l'organisation de ces agents est d'avoir 4 agents en patrouille, 2 fixés à l'ancien portail et 2 autres au nouveau portail, à combien de répartitions de ces agents en trois groupes ainsi définis peut-on procéder ?

Réponse Le nombre de répartitions des agents en trois groupes est : $\frac{8!}{4!2!2!} = 420$.

Exercice 9 Considérons l'équation suivante :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \tag{1.1}$$

1. Determiner est le nombre de solutions entières strictement positives qui vérifient l'equation (1.1) ?
2. Determiner est le nombre de solutions entières positives ou nulles qui vérifient l'equation (1.1) ?

Réponse

1. Considérons 12 boules identiques que l'on désire diviser en 3 groupes non vides. Les 12 boules peuvent être réparties par exemple comme suit :

$$\underbrace{0.0.0}_{x_1=3} \,|\, \underbrace{0.0.0.0.0}_{x_2=5} \,|\, \underbrace{0.0.0.0}_{x_3=4}$$

   on obtient ainsi la solution $(x_1, x_2, x_3) = (3, 5, 4)$, et comme il y a C_{11}^2 choix possibles parmi les 11 points (vides entre deux 0) pour installer les deux séparateurs, alors il y a en tout $C_{11}^2 = 55$ solutions entières strictement positives.

2. On pose $x_i = y_i - 1$. L'equation (1.1) devient :

$$\begin{aligned} & y_1 - 1 + y_2 - 1 + y_3 - 1 = 12, \quad y_i > 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\} \\ \Rightarrow & y_1 + y_2 + y_3 = 15, \quad y_i > 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\} \end{aligned} \tag{1.2}$$

   En appliquant le principe précédent au problème (1.2), le nombre de solutions entières positives ou nulles du problème (1.1) est égal à $C_{14}^2 = 91$

Exercice 10 Considérons un ensemble de n étudiants alignées, dont au plus la moitié sont des garçons. Supposons que les filles soient d'une ressemblance parfaite entre elles et que les garçons le soient également entre eux.

1. Combien de configurations peut-on trouver pour lesquelles deux garçons ne sont jamais voisins ?
2. Reprendre la question précédente en supposant que les étudiants forment un cercle au lieu d'être alignées.

Réponse

1. Soit un alignement composé des m étudiantes. Si deux étudiants ne doivent jamais être voisins, les espaces entre les étudiantes ne peuvent contenir chacun qu'au plus un étudiant. Considérons le schéma suivant :

$$gfgfgf \dots fgfgfg$$

   où f désigne un emplacement d'une étudiante et g un emplacement pour au plus un étudiant. Parmi les $m+1$ positions de type g il faut en choisir $n-m$ où mettre effectivement les étudiants. Il y a par conséquent C_{m+1}^{n-m} dispositions pour lesquelles on trouve toujours une étudiante au moins entre deux étudiants.
2. En supposant que les étudiants forment un cercle au lieu d'être alignés, le nombre de positions de type g est égal à m

$$\begin{array}{cccc} & f & g & \\ g & & & f \\ f & & & g \\ g & & & f \\ & f & g & \end{array}$$

   parmi lesquelles il faut en choisir $n-m$ où mettre les étudiants. Il y a par conséquent C_m^{n-m} dispositions possibles.

Exercice 11 De combien de façons quatre couples peuvent-ils être assis autour d'une table ronde, en alternance par sexe ?

Réponse La solution implique les bonnes manières. Nous plaçons les dames en premier ! Il y a essentiellement une façon de placer la première dame, puis les autres dames peuvent être placées (en alternance) en 3 ! façons. Cela laisse quatre espaces pour les hommes, qui peuvent être assis en 4 ! façons. Ainsi, la réponse est $3! \times 4! = 144$ façons.

CHAPITRE

2 Introduction au calcul des probabilités

2.1 Introduction

La théorie des probabilités est considérée comme la science dont l'objet est l'étude des phénomènes aléatoires ou simplement des expériences dont le résultat dependent du hasard.

2.2 Phénomène aléatoire

L'exemple canonique et fondateur de l'aléatoire est le résultat du jet de dés, dans le sens où le résultat en question est déterminé par un certain nombre de paramètres, à savoir :

– Position initiale du dé dans la main
– Direction et force du jet
– Distance au sol et masse du dé ...

Le dé obéit dans son mouvement aux lois physiques qui n'ont rien d'aléatoire, mais ces paramètres sont si difficiles à appréhender que l'on ne peut que declarer que le phénomène est aléatoire.

2.3 Notions de base : définitions et propriétés

Définition 1 (Épreuve)
Les différents résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appellent les épreuves ou les réalisations de l'expérience.

Définition 2 (Ensemble fondamental)
On appelle ensemble fondamental ou référentiel noté Ω l'ensemble des résultats possibles d'une expérience.

Exemple 1 *On jette un dé et l'on observe le résultat obtenu. L'ensemble fondamental est :*

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Définition 3 (Événement)
On appelle événement aléatoire toute situation qui peut être réalisée par une ou plusieurs épreuves.

Un événement aléatoire est donc totalement déterminé par l'ensemble des épreuves par lesquelles l'événement se réalise. On peut donc interpréter ou identifier chaque événement avec un sous-ensemble de Ω de toutes les épreuves de l'expérience.

Exemple 2 *Considérons l'événement A = " obtenir un chiffre pair" dans l'experience de l'exemple 1, on aura :*

$$\Omega_A = \{2,4,6\}$$

Remarque 2.1 *La non réalisation d'un événement A est aussi un événement noté $\bar{A}$.*

Remarque 2.2 *On admet toujours l'existence d'un événement qui ne se réalise jamais appelé événement impossible noté $\emptyset$ et un événement qui se réalise toujours appelé événement certain noté Ω.*

Propriétés

L'ensemble E des événements associés à une experience aléatoire admet la structure d'Algèbre suivante :

1. $\Omega \in E$
2. $\forall A, B \in E, A \cup B \in E$
3. $\forall A \in E, \bar{A} \in E$

2.4 Opérations dans l'algèbre des événements

Soit E une algèbre d'événements, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Considérons deux événements A et B dans E. On a les propriétés suivantes :

Reunion

$A \cup B = \{w \in \Omega / w \in A$ ou $w \in B\}$ et on lit " l'événement A ou B s'est réalisé si et seulement, si l'événement A s'est réalisé ou l'événement B s'est réalisé. On peut généraliser à un nombre infini d'événements $(A_i)_{i \in L}, A \in E$

$$\bigcup_{i \in L} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

On lit l'un au moins des événements $A_1, A_2, \ldots$ se réalise. Cette opération est commutative et associative dans E.

Propriétés

1. $\forall A \in E, A \cup A = A$
2. $\forall A \in E, A \cup \emptyset = A$
3. $\forall A \in E, A \cup \Omega = \Omega$
4. On dit que les deux événements A et B sont égaux s'ils se réalisent ou ne se réalisent pas en même temps.

Intersection

$A \cap B = \{w \in \Omega / w \in A$ et $w \in B\}$ et on lit " l'événement A et B s'est réalisé, si et seulement, si les événements A et B se réalisent simultanément. Cette opération est aussi associative et commutative dans E.

1. $\forall A \in E, A \cap A = A$
2. $\forall A \in E, A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $\forall A \in E, A \cap \Omega = A$
4. On dit que les deux événements A et B sont égaux s'ils se réalisent ou ne se réalisent pas en même temps.

Propritė 2.1 *Soient les événements A et B dans E, l'événement $\overline{A\cup B}$ signifie que l'événement A ou B ne se réalise pas, donc $\bar{A}$ et $\bar{B}$ se réalisent simultanément. On a :*

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

Généralisation

$$\overline{\bigcup_{i\in L}A_i}=\bigcap_{i\in L}\overline{A_i}$$

Propritė 2.2 *Soient les événements A et B dans E, l'événement $\overline{A\cap B}$ signifie que les événements A et B ne se réalise pas en même temps, donc ou bien $\bar{A}$ se réalise ou bien $\bar{B}$ se réalise. On a :*

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

Généralisation

$$\overline{\bigcap_{i\in L}A_i}=\bigcup_{i\in L}\overline{A_i}$$

Définition 4 *Soient les événements A et B dans E. Si $A\cap B=\emptyset$, on dit que les deux événements A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps, on dit alors que les deux événements sont incompatibles.*

Exemple 3 (Jet d'un dé) *Soient les événements A='Obtenir un chiffre pair' et B='Obtenir un chiffre impair'. alors :*

$$\Omega_A=\{2,4,6\}\ et\ \ \Omega_B=\{1,3,5\}$$

$$A\cap B=\emptyset$$

Inclusion

$A\subseteq B=\{w\in\Omega/w\in A\Rightarrow w\in B\}$ et on lit " la réalisation de l'événement A entraîne la réalisation de l'événement B.

Exemple 4 *Soient les événements A='Obtenir le chiffre 1 ou 5' et B='Obtenir un chiffre impair'. alors :*

$$A \subseteq B$$

Propriétés

1. $\forall A \in E, \emptyset \subseteq A$
2. $\forall A \in E, A \subseteq \Omega$
3. $\forall A, B, C \in E$, si $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ alors $A \subseteq C$
4. $\forall A \in E, A \subseteq A$
5. $\forall A, B \in E, A \subseteq B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$

2.5 Système complet d'événements

Soit $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ une famille d'événements, $A_i \in E, \forall i = 1,\ldots,n$. On dit que le système $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ est complet d'événements si :

1. $A_i \neq \emptyset, \forall i = 1,\ldots,n$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$
3. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Exemple 5 *Considérons l'experience qui consiste à jeter un dé. Soient les événements :*
– A='Obtenir un chiffre pair'
– B='Obtenir un chiffre impair'
L'espace fondamental est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Le système $\{A,B\}$ est un système complet d'événements, en effet :
$A = \{1,3,5\} \neq \emptyset$, $B = \{2,4,6\} \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ *et* $A \cup B = \Omega$

2.6 Concept de probabilité

Définition classique

Considérons une experience aléatoire dont l'espace fondamental Ω contient exactement n événements élémentaires incompatibles :

$$\Omega = \{w_i, i = 1,\ldots,n\}$$

Soit n_A le nombre d'événements élémentaires qui réalisent l'événement A. La probabilité de réalisation de l'événement A serait alors :

$$p(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Définition fréquentielle

Soit une experience aléatoire qui admet plusieurs résultats possibles et soit A un événement qui est un résultat possible de l'experience. En repetant l'experience n fois, l'événement apparaîtra k fois, avec $0 \leq k \leq n$. Si l'on refait l'experience n fois encore, l'événement apparaîtra k' fois, avec $0 \leq k' \leq n$. Si l'on refait l'experience pendant un grand nombre de fois par tranches de n experiences, la fréquence relative de l'événement A peut être définie comme la limite du pourcentage du nombre de fois où A apparaît par rapport au nombre total des répétitions. C'est donc la fréquence limite de A.

Définition théorique

Cette dernière approche est celle de l'axiomatique moderne de la théorie des probabilités. Nous admettrons que pour chaque événement A de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ il existe une valeur $P(A)$ appelée probabilité de A. Nous admettrons alors que ces probabilités satisfont à un certain groupe d'axiomes qui sont en accord avec la notion intuitive des probabilités. Considérons une expérience dont l'ensemble fondamental est Ω. Pour chaque événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$ il existe un nombre $P(A)$ qui satisfait aux axiomes suivants :

1. Axiome 1
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
2. Axiome 2
$$P(\Omega) = 1$$
3. Axiome 3 Pour chaque séquence d'événements mutuellement exclusifs $A_1, A_2, \ldots$, on a :
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Remarque 2.3 *Le triplet* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *est appelé espace probabilisé.*

Exemple 6 *Considérons l'experience qui consiste à jeter deux dés. Quelle est la probabilité que la somme des faces soit égale à 7 ?*
Rép :

Notons l'événement :

D_i = 'le dé amène le chiffre i
D = 'la somme des faces est égale à 7

La probabilité recherchée est :

$$P(D) = \sum_{i=1}^{6} P(D_i \cap D_{7-i}) = \frac{1}{6}$$

Proprité 2.3 *Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé tels que $A \subseteq B$, alors :*

$$P(A) \leq P(B)$$

Proprité 2.4 *Soit A un événement d'un espace probabilisé, alors :*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Proprité 2.5 *Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé, alors :*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple 7 *Dans une section contenant 10 filles et 20 garçons, la moitié des garçons et la moitié des filles ont les yeux marrons. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit un garçon ou bien une personne ayant les yeux marrons ?*
Rép :
Soient les événements :

G = 'la personne est un garçon'
M = 'la personne possède les yeux marrons'

La probabilité recherchée est :

$$\begin{aligned} P(G \cup M) &= P(G) + P(M) - P(G \cap M) \\ &= \frac{20}{30} + \frac{15}{30} - \frac{10}{30} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Théorème 1 (Poincare) *Soit $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ une famille finie d'événements quelconques, alors :*

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\ + \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\ + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)\end{aligned}$$

La somme $\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ est prise sur les combinaisons C_n^k sous-ensembles possibles de taille k de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2.7 Exercices

Exercice 1 Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4). On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Tirer trois jetons verts ?
2. Ne tirer aucun jeton vert ?
3. Tirer au plus 2 jetons verts ?

Réponse Soit l'événement $v_i =\ll$ Le i^{eme} jeton tiré est vert $\gg$

1. $P(A) = P(v_1 \cap v_2 \cap v_3) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{42} = 0,12.$
2. $P(B) = P(\bar{v_1} \cap \bar{v_2} \cap \bar{v_3}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21} = 0,04.$
3. $P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42} = 0,88.$

Exercice 2 Dix boules numérotées de 1 à 10 sont alignées au hasard une après l'autre. Trouver la probabilité que la boule numérotée 5 apparaisse juste après la boule numérotée 4.

Réponse

$$\frac{9.8!}{10!} = \frac{1}{10}$$

Exercice 3 On Considère n boules et N Urnes numérotées de 1 à N avec $N > n$. On distribue au hasard les n boules dans les N urnes.

1. Quelle est la probabilité que la première urne contienne exactement k boules ($k < n$) ?
2. Quelle est la probabilité que les n premières urnes contiennent chacune un boule ?
3. Quelle est la probabilité que n urnes contiennent chacune un boule ?

Réponse

Considérons les événements suivants :
A=" la première urne contient exactement k boules",
B="Les n premières urnes contiennent chacune une boule",
C="n urnes contiennent chacune une boule".
On a :

1. $P(A) = \dfrac{C_n^k (N-1)^{n-k}}{N^n}$
2. $P(B) = \dfrac{n!}{N^n}$
3. $P(C) = \dfrac{C_N^n n!}{N^n}$

Exercice 4 Une urne contient N boules dont M sont rouges et $N-M$ sont blanches. En faisant un tirage sans remise, quelle est la probabilité d'obtenir la première boule rouge au k^{eme} tirage ?

Réponse

$$p = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{A_{N-M}^{k-1} \times C_M^1 \times (N-k)!}{N!}$$

Exercice 5 Une personne possède n clés parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. Quelle est la probabilité qu'elle ouvre la porte de sa maison au k^{eme} essai ?

Réponse

$$p = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{A_{N-1}^{k-1} \times 1 \times (N-k)!}{N!} = \frac{1}{N}$$

Exercice 6 Une urne contient N boules dont M sont rouges et $N-M$ sont blanches. On tire $n \leq N$ boules sans remise, quelle est la probabilité d'obtenir k boules rouges ?

Réponse

$$p = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

Exercice 7 On jette trois dés bien équilibrés. Calculer :

1. la probabilité d'avoir exactement un 6.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.

Réponse Soit l'événement A_i = "le i^{eme} dé donne le chiffre 6 et les autres différents de 6".

1. On note A l'événement ≪ avoir exactement un 6 ≫, alors :
$P(A) = P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) = 3(\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}) = \frac{75}{216} = 0,34$
2. On note B l'événement ≪ obtenir au moins un 6 ≫, alors :
$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} = 0,42$
3. On note C l'événement ≪ obtenir au moins deux faces identiques ≫, alors :
$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - (\frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6}) = 1 - \frac{120}{216} = \frac{96}{216} = 0,44$

Exercice 8 Une urne contient une boule rouge et trois boules blanches.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche.
2. On tire deux boules sans remise. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soit blanches.
3. On tire trois boules avec remise. Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soit blanches.

Réponse On note $B_i =$≪ La ième boule tirée est blanche ≫.

1. $P(B_1) = \frac{3}{4}$.
2. $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 P(B_2/B_1) = \frac{3}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.
3. $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1 P(B_2)P(B_3) = \frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$.

Exercice 9 On considère 3 urnes $U1$, $U2$ et $U3$. La première contient initialement 2 boules blanches, 3 boules rouges. La deuxième contient 2 boules vertes et 4 boules blanches. La troisième contient 5 boules noires et 2 boules rouges.

1. On choisit au hasard une urne parmi les trois urnes et on tire une boule. Quelle est la probabilité quelle soit blanche ?
2. On tire au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2. Puis on tire au hasard une boule de U_2. Quelle est la probabilité quelle soit blanche ?

3. On tire au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2. Puis on tire au hasard une boule dans U_2 que l'on place dans U_3. Enfin on tire une boule dans U_3. Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes de couleurs différentes ?

Réponse Considérons les événements suivants :

B_i ="La ième boule tirée est blanche"

V_i ="La ième boule tirée est verte"

R_i ="La ième boule tirée est rouge"

N_i ="La ième boule tirée est noire"

U_i ="La boule est tirée de l'urne U_i"

1. Soit l'événement B="la boule tirée est blanche".

$$\begin{aligned} P(B_1) &= p(B_1 \cap U_1) + p(B_1 \cap U_2) + p(B_1 \cap U_3) \\ &= p(U_1)P(B_1/U_1) + p(U_2)P(B_1/U_2) + p(U_3)P(B_1/U_3) \\ &= \frac{2}{5}.\frac{1}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{16}{45} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap R_1) \\ &= p(B_1)P(B_2/B_1) + p(R_1)P(B_2/R_1) \\ &= \frac{2}{5}.\frac{5}{7} + \frac{3}{5}.\frac{4}{7} = \frac{22}{35} \end{aligned}$$

3. Considérons l'événement D="les trois boules sont différentes".

$$\begin{aligned} P(D) &= p(B_1 \cap V_2 \cap N_3) + p(B_1 \cap V_2 \cap R_3) + p(R_1 \cap V_2 \cap N_3) + p(R_1 \cap B_2 \cap N_3) \\ &= p(B_1P(V_2/B_1)P(N_3/B_1 \cap V_2) + p(B_1P(V_2/B_1)P(R_3/B_1 \cap V_2) \\ &+ p(R_1P(V_2/R_1)P(N_3/R_1 \cap V_2) + p(R_1P(B_2/R_1)P(N_3/R_1 \cap B_2) \\ &= \frac{1}{14} + \frac{1}{35} + \frac{3}{28} + \frac{3}{14} = \frac{413}{980} = 0.4214 \end{aligned}$$

Exercice 10 On répartit au hasard 8 boules numérotées de 1 à 8 sur 4 urnes numérotées de 1 à 4. Plusieurs boules peuvent être placés sur une même urne. Quelle est la probabilité qu'une urne au moins soit vide ?

Réponse Soit l'événement V_i="la ième urne est vide", i=1,...,4. On a :

$$\begin{aligned}
P(V_i) &= \left(\frac{3}{4}\right)^8, \forall i = 1,\ldots,4 \\
P(V_i \cap V_j) &= \left(\frac{2}{4}\right)^8, \forall i,j = 1,\ldots,4, \quad i \neq j. \\
P(V_i \cap V_j \cap V_k) &= \left(\frac{1}{4}\right)^8, \forall i,j,k = 1,\ldots,4, \quad i \neq j \neq k. \text{(deux à deux)} \\
P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) &= 0.
\end{aligned}$$

D'où la probabilité recherchée :

$$\begin{aligned}
P(V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4) &= P(V_1) + P(V_2) + P(V_3) + P(V_4) - P(V_1 \cap V_2) - P(V_1 \cap V_3) \\
&- P(V_1 \cap V_4) - P(V_2 \cap V_3) - P(V_2 \cap V_4) - P(V_3 \cap V_4) \\
&+ P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap V_2 \cap V_4) + P(V_1 \cap V_3 \cap V_4) \\
&+ P(V_2 \cap V_3 \cap V_4) - P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) \\
&= 4\left(\frac{3}{4}\right)^8 - 6\left(\frac{2}{4}\right)^8 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^8 = \frac{24712}{65536} = 0.377
\end{aligned}$$

Chapitre

3

Probabilités conditionnelles et indépendance

3.1 Introduction

L'importance du concept des probabilités conditionnelles réside d'une part dans le fait que l'on s'intéresse souvent à calculer des probabilités alors qu'une partie de l'information concernant le résultat de l'expérience est disponible ; dans une telle situation les probabilités cherchées sont appelées probabilités conditionnelles. D'autre part, même lorsqú'aucune information partielle n'est disponible, il est souvent avantageux d'utiliser un détour par certaines probabilités conditionnelles pour réussir le calcul des probabilités cherchées.

3.2 Probabilités conditionnelles

Soient A et B deux événements de $E = \mathcal{P}(\Omega)$, tel que $P(B) > 0$.

Définition 1 *On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B la probabilité*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple 1 *Considérons l'experience qui consiste à jeter un dé. Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair sachant qu'il est supérieur à 3 ?*

Réponse

$$\frac{2}{3}$$

Exemple 2 *Une pièce de monnaie est lancée deux fois. Si nous supposons que les quatre points de l'ensemble fondamental sont équiprobables, quelle est la probabilité que les deux jets donnent face sachant que le premier jet a donné face ?*

Réponse

$$\frac{1}{2}$$

Exemple 3 *Une urne contient 10 billes blanches, 5 jaunes et 10 noires. Une bille est tirée au hasard de l'urne et l'on constate qu'elle n'est pas noire. Quelle est la probabilité qu'elle soit jaune ?*

Réponse

$$\frac{1}{3}$$

Théorème 1 *Soit $(\Omega, E, \mathcal{P})$ un espace probabilisé. Pour tout $B \in E$, la probabilité $P(A/B)$ définit pour tout $A \in E$ une probabilité.*

Preuve 1 *on a :*

1. $P(\Omega/B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
2. $P(A/B) = \dfrac{P \cap B}{P(B)} \geq 0$
3. $P((A \cup C)/B) = \dfrac{P[(A \cup C) \cap B]}{P(B)} = \dfrac{P[(A \cap B) \cup (C \cap B)]}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} + \dfrac{(C \cap B)}{P(B)}$
   $= P(A/B) + P(C/B)$

Théorème 2 (Formule des probabilités totales)
Soient $(\Omega, E, \mathcal{P})$ *un espace probabilisé et* $B \in E$*. Soit* $(A_i)_{i=1..n}$ *un système complet d'événements, alors*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)$$

Preuve 2 *On a :*

$$\begin{aligned}
B &= B \cap \Omega \\
&= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \\
&= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n) \\
\Rightarrow P(B) &= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)] \\
&= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) \\
&= P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)
\end{aligned}$$

Exemple 4 *Une urne contient 8 boules rouges et 4 blanches. On tire sans remise deux boules de l'urne et l'on admet qu'à chaque étape tous les tirages possibles sont équiprobables. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient rouges ?*

Réponse

$$\frac{14}{33}$$

Exemple 5 *Une urne contient 8 boules rouges et 4 blanches. On tire sans remise trois boules de l'urne et l'on admet qu'à chaque étape tous les tirages possibles sont équiprobables. Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient rouges ?*

Réponse

$$\frac{14}{55}$$

Théorème 3 (Bayes) *Soient* $(\Omega, E, \mathcal{P})$ *un espace probabilisé et* $B \in E$. *Soit* $(A_i)_{i=1..n}$ *un système complet d'événements, alors :*

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}, i = 1, \dots, n$$

Preuve 3 *On a :*

$$\begin{aligned} P(A_i/B) &= \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)} \end{aligned}$$

Exemple 6 *Un étudiant qui répond à une question à choix multiple, est face à l'une des deux situations suivantes : soit il connaît la réponse, soit il la devine. Soit* p *la probabilité que l'étudiant connaisse la réponse et donc* $1-p$ *celle qu'il la devine. On admet que l'étudiant qui devine répondra correctement avec probabilité* $\frac{1}{m}$ *où* m *est le nombre de réponses possibles. Quelle est la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à une question s'il y a répondu correctement ?*

Réponse *Considérons les événements suivants :*

C = 'L'étudiant répond correctement à la réponse'
R = 'L'étudiant connaît réellement la réponse '

Alors :

$$\begin{aligned} P(R/C) &= \frac{P(R \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C/R).P(R)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C/R).P(R)}{P(C/R).P(R) + P(C/\bar{R}).P(\bar{R})} \\ &= \frac{p}{p + (1/m)(1-p)} \\ &= \frac{mp}{1 + (m-1)p} \end{aligned}$$

3.3 Indépendance

On dit qu'un événement B est indépendant d'un événement A si la probabilité pour que B se produise n'est pas influencée par le fait que A se soit ou ne se soit pas produit. En d'autres termes, B est indépendant de A si la probabilité de B est égale à la probabilité conditionnelle de B, sachant que A s'est produit : $P(B) = P(B/A)$. Si maintenant on remplace $P(B/A)$ par $P(B)$ dans le théorème de la multiplication $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$, on obtient :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Définition 2 (Indépendance de deux événements)
Soit $(\Omega, E, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in E$. On dit que les événements A et B sont indépendants, si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemple 7 *On lance trois fois une pièce de monnaie et on considère les événements suivant :*
– A="le premier jet donne face"
– B=" le deuxième jet donne face"
– C="On obtient exactement deux faces de suite"
Étudier l'indépendance des événements A, B et C ?

Théorème 4 *Soit $(\Omega, E, \mathcal{P})$ un espace probabilisé. Si A et B sont deux événements de E indépendants, alors A et $\bar{B}$ le sont aussi.*

Preuve 4 *A et $\bar{B}$ sont indépendants si et seulement si*

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$$

On a :

$$\begin{aligned}
A &= A \cap \Omega \\
&= A \cap (B \cup \bar{B}) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \\
\Rightarrow P(A) &= P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\
&= P(A)P(B) + P(A \cap \bar{B}) \\
\Rightarrow P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)[1 - P(B)] \\
&= P(A)P(\bar{B})
\end{aligned}$$

Définition 3 (Indépendance totale de n événements)
Un ensemble d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est dit totalement indépendant, si pour tout sous-ensemble $A_1, A_2, \ldots, A_k, k \leq n$, on a :

$$P(A_1 A_2 \ldots A_k) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_k)$$

Exemple 8 *Considérons les événements $A, B, C \in E$. Les événements A, B et C seront dits totalement indépendants, s'ils sont deux à deux indépendants et*

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

Exemple 9 *On jette deux pièces de monnaie bien équilibrées. Considérons les événements suivants :*
– *A = " face apparaît sur la première pièce "*
– *B = " face apparaît sur la deuxième pièce "*
– *C = " face apparaît sur une seule des deux pièces "*
Étudier l'independence des événements A, B et C.

Théorème 5 *Soit $(\Omega, E, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et soient A, B et C trois événements de E mutuellement indépendants, alors les événements :*
– *A et $B \cap C$ sont indépendants*

– *A et $B \cup C$ sont indépendants*
– *$\bar{A}$, B et C sont mutuellement indépendants*
– *$\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$ sont mutuellement indépendants*

3.4 Probabilités produit

Soient (Ω_1, E_1, P_1) et (Ω_2, E_2, P_2) deux espaces probabilisés. soient P_1 et P_2 les probabilités respectives des événements $(A_1, A_2) \in E_1 \times E_2$. Il existe alors une et une seule probabilité P définie comme suit :

$$\begin{aligned} P : E_1 \times E_2 &\to [0,1] \\ (A_1, A_2) &\mapsto P(A_1, A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2) \end{aligned}$$

telle que P est le produit des deux probabilités P_1 et P_2.

Exemple 10 *Trois tireurs tirent simultanément sur la même cible. Les probabilités respectives que chaque tireur touche la cible sont $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,3$ et $p_3 = 0,8$. Trouver la probabilité que la cible soit touchée.*

Réponse

1. *Soit A l'événement "la cible est touchée " et A_1, A_2, A_3 les événements "la cible est touchée par le premier, le deuxième et le troisième tireur" respectivement. Alors Par conséquent, on a :*

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ \Rightarrow P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{6}{10} + \frac{3}{10} + \frac{8}{10} - \frac{6}{10} \times \frac{3}{10} - \frac{6}{10} \times \frac{8}{10} - \frac{3}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{8}{10} = 0.94 \end{aligned}$$

3.5 Exercices

Exercice 1 Soient A et B deux événements avec $0 < P(A) < 1$.

1. Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(B/A) = P(B/\bar{A})$$

2. Les événements A et B peuvent-ils être incompatibles, si $P(A) = 1/2$ et P(B)=2/3 ?

Réponse

1. Soit $P(B/A) = P(B/\bar{A})$

$$P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B\cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B\cap A)+P(B\cap \bar{A})}{P(A)+P(\bar{A})} = \frac{P(B)}{P(\Omega)} = P(B)$$

Inversement, soient A et B deux événements indépendants, c'est à dire :

$$P(A\cap B) = P(A).P(B) \quad \text{et} \quad P(\bar{A}\cap B) = P(\bar{A}).P(B)$$

On a :

$$P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B).P(A)}{P(A)} = P(B) \tag{3.1}$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B\cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B).P(\bar{A})}{P(\bar{A})} = P(B) \tag{3.2}$$

Des relations (8.19) et (8.20) on a $P(B/A) = P(B/\bar{A})$

2. Les événements A et B ne peuvent être incompatibles du fait que $P(A)+P(B) > 1$.

Exercice 2 On jette une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir face est $P(F) = \frac{2}{3}$ et la probabilité d'obtenir pile est $P(P) = \frac{1}{3}$. Si c'est face qui apparait, on choisit au hasard un nombre entre 1 et 9, et si c'est pile que l'on obtient, on choisit au hasard un nombre entre 1 et 5. Calculer la probabilité p pour que ce soit un nombre pair qui ait été choisi ?

Réponse La probabilite de choisir un nombre pair compris entre 1 et 9 est $\frac{2}{9}$, et la probabilité de choisir un nombre pair entre 1 et 5 est $\frac{2}{5}$. D'où

$$P(pair) = \frac{2}{3}\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\frac{2}{5} = \frac{58}{135}$$

Exercice 3 On considère 3 cartes à jouer. Les deux faces de la première carte ont été colorées en noir, les deux faces de la deuxième carte en rouge tandis que la troisième porte une face noire et l'autre rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau puis une carte tirée au hasard en est extraite et placée au sol. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Réponse Soient RR, NN et RN respectivement les événements, ≪la carte choisie est entièrement rouge≫, ≪ entièrement noire ≫ et ≪ bicolore ≫. Soit R l'événement, ≪ la face apparente de la carte tirée est rouge ≫. On aura

$$P(RN/R) = \frac{P(RN \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R/RN)P(RN)}{P(R/RR)P(RR) + P(R/RN)P(RN) + P(R/NN)P(NN)} = \frac{1}{3}$$

Exercice 4 Trois machines A, B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont de 3%, 4% et 5%. Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité que cette pièce soit défectueuse ? Si l'on prend une pièce et qu'elle est défectueuse quelle est la probabilité qu'elle provient de la machine B ?

Réponse Considérons les événements suivants :

X = 'la pièce est défectueuse'
A = 'la pièce est fabriquée par la machine A'
B = 'la pièce est fabriquée par la machine B'
C = 'la pièce est fabriquée par la machine C'

1. La probabilité que la pièce est défectueuse est :

$$P(X) = P[(X \cap A) \cup (X \cap B) \cup (X \cap C)]$$

et comme les événements $(X \cap A), (X \cap B)$ et $(X \cap C)$ sont incompatibles alors :

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X \cap A) + P(X \cap B) + P(X \cap C) \\ &= P(A)P(X/A) + P(B)P(X/B) + P(C)P(X/C) \\ &= \frac{5}{10}\frac{3}{100} + \frac{3}{10}\frac{4}{100} + \frac{2}{10}\frac{5}{100} = \frac{37}{1000} \end{aligned}$$

2. La probabilité que la pièce soit fabriquée par la machine B sachant qu'elle est défectueuse est :

$$P(B/X) = \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = \frac{P(B)P(X/B)}{P(X)} = \frac{\frac{3}{10}\frac{4}{100}}{\frac{37}{1000}} = \frac{12}{37}$$

Exercice 5 Considérons trois urnes U_1, U_2 et U_3 avec les compositions suivantes :

Urne	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	2	0
U_2	1	1
U_3	0	2

Une urne a été choisie au hasard, et de cette urne on a tirée une boule, elle est noire. Quelle est la probabilité que l'autre boule de cette urne soit blanche ?

Réponse Considérons les événements suivants :

B = 'la boule extraite est noire' et A_i = 'la boule est extraite de l'urne U_i, i=1,2,3'

On a :

$$P(A_2/B) = \frac{P(B/A_2)P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B/A_i)P(A_i)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Exercice 6 9 boules sont réparties dans une urne A et une urne B. L'urne A contient deux boules portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2. L'urne B contient deux boules portant le numéro 2 et trois boules portant le numéro 3. On considère l'épreuve aléatoire suivante : on prend au hasard une boule dans l'urne A, on place cette boule dans l'urne B puis on prend au hasard une boule dans l'urne B et on la place dans l'urne A. Soit les événements suivants : A_i = $\ll$ La boule prise dans l'urne A porte le numéro i $\gg$ et B_j = $\ll$ La boule prise dans l'urne B porte le numéro j $\gg$.

1. Déterminer la probabilité de $B1/A1$.
2. Déterminer la probabilité de $B2/A2$.
3. Calculer la probabilité qu'à l'issue de l'épreuve, l'urne A se retrouve dans son état initial.

Réponse

1. $B1/A1 = \frac{1}{6}$
2. $B2/A2 = \frac{1}{2}$
3. $P(\text{A à l'état initial}) = P[(B_1 \cap A_1) \cup (A_2 \cap B_2)] = P(A1).P(B_1/A_1) + P(A2).P(B_2/A_2) = \frac{1}{3}$.

Exercice 7 Considérons deux urnes U_1 et U_2 avec les compositions suivantes :

Urne	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	2	1
U_2	1	5

On extrait une boule de l'urne U_1 et sans connaître sa couleur on l'introduit dans l'urne U_2. Ensuite on extrait une boule de l'urne U_2. Sachant que la boule extraite de l'urne U_2 est blanche, trouver la probabilité que la boule transférée de l'urne U_1 vers l'urne U_2 était noire.

Réponse Considérons les événements suivants :

E : " La boule extraite de l'urne U_2 est Blanche "
N : " La boule transférée de l'urne U_1 vers l'urne U_2 est Noire "
B : " La boule transférée de l'urne U_1 vers l'urne U_2 est Blanche "
On cherche la probabilité suivante :

$$\begin{aligned} P(N/E) &= \frac{P(N\cap E)}{P(E)} = \frac{P(E/N)P(N)}{P((E\cap B)\cup(E\cap N))} \\ &= \frac{P(E/N)P(N)}{P(E\cap B)+P(E\cap N)} = \frac{P(E/N)P(N)}{P(E/B)P(B)+P(E/N)P(N)} = \frac{\frac{1}{7}\frac{1}{3}}{\frac{2}{7}\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\frac{1}{3}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Exercice 8 On considère 3 urnes $U1$, $U2$ et $U3$. La première contient initialement 2 boules blanches, 3 boules rouges. La deuxième contient 2 boules vertes et 4 boules blanches. La troisième contient 5 boules noires et 2 boules rouges.

1. On tire au hasard une boule dans U_1. Quelle est la probabilité quelle soit blanche ?
2. On choisit au hasard une urne parmi les trois urnes et on tire une boule. Quelle est la probabilité quelle soit blanche ?
3. On tire au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2. Puis on tire au hasard une boule de U_2. Quelle est la probabilité quelle soit blanche ?
4. On tire au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2. Puis on tire au hasard une boule de U_2. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur ?
5. On tire au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2. Puis on tire au hasard une boule dans U_2 que l'on place dans U_3. Enfin on tire une boule dans U_3. Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes de couleurs différentes ?

Réponse Considérons les événements suivants :
B_i ="La ième boule tirée est blanche"
V_i ="La ième boule tirée est verte"
R_i ="La ième boule tirée est rouge"
N_i ="La ième boule tirée est noire"
U_i ="La boule est tirée de l'urne U_i"

1. $P(B_1) = \frac{2}{5}$
2. Soit l'événement B="la boule tirée est blance".

$$\begin{aligned} P(B) &= p(B_1\cap U_1)+p(B_1\cap U_2)+p(B_1\cap U_3) \\ &= p(U_1)P(B_1/U_1)+p(U_2)P(B_1/U_2)+p(U_3)P(B_1/U_3) \\ &= \frac{2}{5}.\frac{1}{3}+\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{16}{45} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}P(B_2) &= P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap R_1)\\ &= p(B_1)P(B_2/B_1) + p(R_1)P(B_2/R_1)\\ &= \frac{2}{5}.\frac{5}{7} + \frac{3}{5}.\frac{4}{7} = \frac{22}{35}\end{aligned}$$

4. Considérons l'événement M="les deux boules sont de la même couleur".
$$\begin{aligned}P(M) &= p(B_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap R_2)\\ &= p(B_1)P(B_2/B_1) + p(R_1)P(R_2/R_1)\\ &= \frac{2}{5}.\frac{5}{7} + \frac{3}{5}.\frac{1}{7} = \frac{13}{35}\end{aligned}$$

5. Considérons l'événement D="les trois boules sont différentes".
$$\begin{aligned}P(D) &= p(B_1 \cap V_2 \cap N_3) + p(B_1 \cap V_2 \cap R_3) + p(R_1 \cap V_2 \cap N_3) + p(R_1 \cap B_2 \cap N_3)\\ &= p(B_1P(V_2/B_1)P(N_3/B_1 \cap V_2) + p(B_1P(V_2/B_1)P(R_3/B_1 \cap V_2)\\ &+ p(R_1P(V_2/R_1)P(N_3/R_1 \cap V_2) + p(R_1P(B_2/R_1)P(N_3/R_1 \cap B_2)\\ &= \frac{1}{14} + \frac{1}{35} + \frac{3}{28} + \frac{3}{14} = \frac{413}{980} = 0.4214\end{aligned}$$

Exercice 9 On considère n urnes $U_1, U_2, \dots, U_n, (n \in \mathbb{N}^*)$. L'urne U_k contient k boules blanches et (n-k) boules noires. On choisit une urne au hasard, puis on tire successivement et avec remise 2 boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches ?

Réponse Soit les événements B="obtenir deux boules blanches" et u_k="les tirages se font de la k-ème urne ". On a :

$$\begin{aligned}P(B) &= \sum_{k=1}^{n} P(B/u_k)P(u_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}.\frac{k}{n}.\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\\ &= \frac{1}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\end{aligned}$$

Exercice 10 On Considère n boules et N Urnes numérotées de 1 à N avec $N > n$. On distribue au hasard les n boules dans les N urnes.

1. Quelle est la probabilité que la première urne contienne exactement k boules ($k < n$) ?
2. Quelle est la probabilité que les n premières urnes contiennent chacune un boule ?
3. Quelle est la probabilité que n urnes contiennent chacune un boule ?

Réponse
Considérons les événements suivants : A=" la première urne contient exactement k boules", B="Les n premières urnes contiennent chacune une boule" et C="n urnes contiennent chacune une boule", on a :

1. $P(A) = \dfrac{C_n^k (N-1)^{n-k}}{N^n}$
2. $P(B) = \dfrac{n!}{N^n}$
3. $P(C) = \dfrac{C_N^n n!}{N^n}$

Chapitre

4

Variables aléatoires à une dimension

4.1 Introduction

Après avoir réalisé une expérience, il arrive bien souvent qu'on s'intéresse plus à une fonction du résultat qu'au résultat lui-même. L'lorsqú'on joue aux dés, certains jeux accordent de l'importance à la somme obtenue sur deux dés, 7 par exemple, plutôt qu'à la question de savoir si c'est la paire (1,6) qui est apparue, ou (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) ou plutôt (6,1). Dans le cas du jet d'une pièce, il peut être plus intéressant de connaître le nombre de fois où pile est apparu plutôt que la séquence détaillée des piles et faces. Ces grandeurs auxquelles on s'intéresse sont en fait des fonctions réelles définies sur l'ensemble fondamental et sont appelées variables aléatoires.
On distingue les variables aléatoires discrètes qui prennent leurs valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable et les variables aléatoires continues qui prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.

4.2 Variables aléatoires sur un ensemble fini

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé et E un ensemble fini.

Définition 1 *Une variable aléatoire discrète X sur un ensemble fini est l'application définie de Ω dans l'ensemble fini E, telle que l'inverse de chaque partie de E soit un événement de Ω, c'est à dire :*

$$X : \Omega \to E$$
$$\forall x \in E \quad X^{-1}(\{x\}) = \{w \in \Omega / X(w) = x\} = \{X = x\}$$

Remarque 4.1 *On notera X la variable aléatoire et x sa réalisation.*

Exemple 1 *Considérons l'expérience qui consiste à jeter trois pièces équilibrées. Si l'on désigne le nombre de piles par X. X est une variable aléatoire et peut prendre les valeurs*

$$\textit{val(X)}= \{0,1,2,3\}$$

avec pour probabilité respectives :

$$P(X=0) = P(FFF) = \frac{1}{8}$$
$$P(X=1) = P((PFF) \cup (FPF) \cup (FFP)) = \frac{3}{8}$$
$$P(X=2) = P((PPF) \cup (PFP) \cup (FPP)) = \frac{3}{8}$$
$$P(X=0) = P(PPP) = \frac{1}{8}$$

4.3 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 2 *Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète définie sur Ω et $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble de ses valeurs. On* *appelle distribution ou loi de probabilité de variable X la fonction P définie par :*

$$P_i = P(x_i) = P(X^{-1}\{x_i\}) = P(X = x_i)$$

Proprité 4.1 *La fonction P possède les propriétés suivantes :*

1. $P(x_i) \geq 0$
2. $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$

Remarque 4.2 *Pour caractériser une variable aléatoire X, il faut déterminer :*

1. *L'ensemble de ses valeurs : val(X).*
2. *La loi de probabilité de X : $P_i = P(X = x_i)$.*

Exemple 2 *On réalise une expérience dont le résultat sera interprété soit comme un succès soit comme un échec. On définit alors la variable aléatoire X en lui donnant la valeur 1 lors d'un succès et 0 lors d'un échec. La loi de probabilité de X est alors définie comme suit :*

$$\begin{aligned} &\textit{Val(X)}= \{0,1\} \\ &P(0) = P(X = 0) = 1 - p \\ &P(1) = P(X = 1) = p \end{aligned} \tag{4.1}$$

où p est la probabilité d'un succès, $0 < p < 1$.

Une variable aléatoire X est dite de Bernoulli s'il existe un nombre $p \in [0,1]$ tel que la loi de probabilité de X soit donnée par les relations (4.3).

4.4 Fonction d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et soit ϕ une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$. L'application $\phi(X)$ est aussi une variable aléatoire.

Exemple 3 *Considérons l'expérience qui consiste à jeter un dé. Soit X la variable aléatoire qui décrit le chiffre qui apparaît et considérons la fonction $\phi(X) = X^2 + 1$. Quelle est la loi de $\phi(X)$?*
On a :

$$\begin{aligned}
&\textit{Val(X)}= \{1,2,3,4,5,6\} \\
&P(i) = P(X = i) = \begin{cases} \frac{1}{6},, & \textit{si } i = 1,\ldots,6; \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit la nouvelle variable $Y = X^2 + 1$. On a :

$$\begin{aligned}
&\textit{Val(Y)}= \{2,5,10,17,26,37\} \\
&P(i) = P(Y = i) = P(X^2 + 1 = i) \\
&= P(X^2 = i - 1) \\
&= P(X = \sqrt{i-1}) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{6},, & \textit{si } i = 2,5,10,17,26,37; \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

4.5 Fonction de répartition

La fonction de répartition nous indique comment sont réparties les valeurs d'une variable aléatoire.

Définition 3 *Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète définie sur Ω caractérisée par :*

1. *L'ensemble de ses valeurs : val(X).*
2. *La loi de probabilité de X : $P_i = P(X = x_i)$.*

On appelle fonction de répartition la fonction F définie par :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$
$$x \in R \mapsto F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Propriété 4.2

– *F est non-décroissante, c'est-à-dire si $x < y$, alors $F(x) \leq F(y)$;*
– $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
– $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
– *F est continue à droite, c'est-à-dire* $\lim_{y \rightarrow x} F(y) = F(x)$.

Exemple 4 *Considérons l'expérience qui consiste à jeter un dé et soit X la variable aléatoire modélisant le chiffre qui apparaît. Quelle est la fonction de répartition de X ?*

On a :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$
$$x \mapsto F(x) = P(X < x)$$

on aura alors :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 1\,; \\ 1/6, & si\ 1 \leq x < 2\,; \\ 2/6, & si\ 2 \leq x < 3\,; \\ 3/6, & si\ 3 \leq x < 4\,; \\ 4/6, & si\ 4 \leq x < 5\,; \\ 5/6, & si\ 5 \leq x < 6\,; \\ 1, & si\ x \geq 6\,; \end{cases}$$

4.6 Moments d'une variable aléatoire

Définition 4 *Soit* (Ω, E, P) *un espace probabilisé et soit* X *une variable aléatoire définie sur* Ω *telle que :*
– $Val(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
– $Distribution(X) = (p_i)_{i=1\ldots n}$
On appelle moment d'ordre $r \in \mathbb{N}_+^*$ *de* X *et on note* $m_r(X)$ *la quantité :*

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r p_i$$

Cas particulier

Pour $r = 1$ le moment d'ordre 1 de X noté

$$m(X) = \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

est appelé espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Proprité 4.3 *Soit* X *une variable aléatoire définie sur* (Ω, E, P) *et soit* ϕ *une fonction réelle définie sur* $X(\Omega)$*, alors :*

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) p_i$$

Proprité 4.4 *L'espérance mathématique est un opérateur linéaire, i.e, pour deux fonction réelles* f *et* g*, on a :*

$$\mathbb{E}[\lambda f(X) + \mu g(X)] = \lambda \mathbb{E}[f(X)] + \mu \mathbb{E}[g(X)], \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Preuve 5 *On a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\lambda f(X)+\mu g(X)] &\triangleq \sum_{i=1}^{n}(\lambda f(X)+\mu g(X))p_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda f(X)p_i+\sum_{i=1}^{n}\mu g(X)p_i\\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n}f(X)p_i+\mu\sum_{i=1}^{n}g(X)p_i\\ &= \lambda\mathbb{E}(f(X))+\mu\mathbb{E}(g(X))\end{aligned}$$

Consquences 4.1 *Soit a une constante, alors :*
- $\mathbb{E}(a)=a$
- $\mathbb{E}(aX)=a\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(X+a)=a+\mathbb{E}(X)$

Exemple 5 *Calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de bernoulli de paramètre p. On a :*

$$\begin{aligned}&\mathit{Val(X)}=\{0,1\}\\ &P(0)=P(X=0)=1-p\\ &P(1)=P(X=1)=p\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{2}x_ip_i=1.p+0.(1-p)=p$$

Définition 5 *Soit (Ω,E,P) un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que :*
- *$Val(X)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$*
- *$Distribution(X)=(p_i)_{i=1\ldots n}$*

On appelle moment centré d'ordre $r\in\mathbb{N}_+^*$ de X et on note $\mu_r(X)$ la quantité :

$$\mu_r(X)=\mathbb{E}[X-\mathbb{E}(X)]^r=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mathbb{E}(X))^rp_i$$

Cas particuliers

1. Pour $r = 1$ le moment centré d'ordre 1 de X noté

$$\mu_1(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)] = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$$

2. Pour $r = 2$ le moment centré d'ordre 2 de X noté

$$\mu_2(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2 = \mathbb{V}ar(X)$$

   est appelé variance de la variable aléatoire X. Elle représente la dispersion des valeurs de X autour de l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

On peut aussi représenter la variance d'une variable aléatoire par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(X) &= \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2] \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}[2X\mathbb{E}(X)] + \mathbb{E}[\mathbb{E}(X)]^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2
\end{aligned}$$

Propriété 4.5 *1.* $\mathbb{V}ar(X) \geq 0$

2. $\mathbb{V}ar(X) = 0 \Leftrightarrow X = \ const$

3. $\mathbb{V}ar(a) = 0$

4. $\mathbb{V}ar(aX) = a^2\mathbb{V}ar(X)$

5. $\mathbb{V}ar(aX + b) = a^2\mathbb{V}ar(X)$

Exemple 6 *calculer la variance d'une variable aléatoire X qui suit une loi de bernoulli.*
On a :

$$\begin{aligned}
&\text{Val(X)= } \{0,1\} \\
&P(0) = P(X = 0) = 1 - p \\
&P(1) = P(X = 1) = p
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 p_i = 1^2.p + 0^2.(1-p) = p$$

alors

$$\mathbb{V}ar(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

Définition 6 *On appelle écart type d'une variable aléatoire X la racine carrée de sa variance, noté $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}$*

Définition 7 (Inégalité de BIENAME TCHEBYTCHEF) *Soit (Ω, E, P) un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que :*
- *$Val(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*
- *$Distribution(X) = (p_i)_{i=1\ldots n}$*

alors,

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{\varepsilon^2}$$

4.7 Exercices

Exercice 1 On lance 2 dés et on appelle X la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus. Déterminer la loi de X, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

Réponse

1. Loi de X :
   Val(X)=$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

P(X=0)=$\frac{6}{36}$, P(X=1)=$\frac{10}{36}$, P(X=2)=$\frac{8}{36}$, P(X=3)=$\frac{6}{36}$, P(X=4)=$\frac{4}{36}$, P(X=5)=$\frac{2}{36}$,

2. Fonction de répartition :

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} < 0\,; \\ 6/36, & 0 \leq x < 1\,; \\ 16/36, & 1 \leq x < 2\,; \\ 24/36, & 2 \leq x < 3\,; \\ 30/36, & 3 \leq x < 4\,; \\ 34/36, & 4 \leq x < 5\,; \\ 1, & \mathbf{x} \geq 5\,; \end{cases}$$

3. Espérance de X :
   $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{5} kP(X = k) = 35/18 = 1.94$

4. Variance de X :
   $\mathbb{V}$ar(X)=665/324=2.05

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6.

1. Quelle est la loi de X si l'on savait que

$$P(X < 5) = \frac{1}{6}, P(X > 5) = \frac{1}{2}, P(X \leq 3) = P(X = 4).$$

2. Calculer l'espérance de X.

Réponse

1. Il faut determiner $P(X=k)$ pour $k=3,4,5,6$. On a :

$$P(X=6)=P(X>5)=\frac{1}{2}$$
$$P(X<5)=P(X\leq 3)+P(X=4)=2\times P(X=3)=\frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow P(X=3)=\frac{1}{12}$$
$$P(X=4)=P(X=3)=\frac{1}{12}$$
$$P(X=5)=1-[P(X=3)+P(X=4)+P(X=6)]=1-[\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}]=\frac{1}{3}$$

2. $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=3}^{6}k.P(X=k)=3.\frac{1}{12}+4.\frac{1}{12}+5.\frac{1}{3}+6.\frac{1}{2}=\frac{21}{4}$

Exercice 3 On introduit au hasard 5 boules dans 3 boîtes numérotées de 1 à 3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui prend comme valeur le nombre de boules placées dans la première boîte.

1. Determiner la loi de X ?
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Réponse On a :

$$\text{Val}(X)=\{0,1,2,3,4,5\}$$
$$P(X=0)=\frac{C_5^0 2^5}{3^5}=\frac{32}{243}=0,13$$
$$P(X=1)=\frac{C_5^1 2^4}{3^5}=\frac{80}{243}=0,32$$
$$P(X=2)=\frac{C_5^2 2^3}{3^5}=\frac{80}{243}=0,32$$
$$P(X=3)=\frac{C_5^3 2^2}{3^5}=\frac{40}{243}=0,16$$
$$P(X=4)=\frac{C_5^4 2^1}{3^5}=\frac{10}{243}=0,04$$
$$P(X=5)=\frac{C_5^5 2^0}{3^5}=\frac{01}{243}=0,004$$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{5} kP(X=k)=0\times\frac{32}{243}+1\times\frac{80}{243}+2\times\frac{80}{243}+3\times\frac{40}{243}+4\times\frac{10}{243}+5\times\frac{1}{243}=\frac{405}{243}=1$$

$$\mathbb{V}ar(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2=1\times\frac{80}{243}+4\times\frac{80}{243}+9\times\frac{40}{243}+16\times\frac{10}{243}+25\times\frac{1}{243}-\frac{405^2}{243^2}=1.0$$

Exercice 4 Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20, on tire sans remise 3 boules. Quelqú'un parie qu'au moins une des boules tirées portera un numéro supérieur ou égal à 17. Soit X la variable aléatoire representant le plus grand numéro tiré.

1. Caractériser la variable aléatoire X.
2. Quelle est la probabilité que cette personne gagne son pari ?

Réponse

1. On a :

$$Val(X)=\{3,4\ldots,20\}$$
$$P(X=k)=\frac{C_{k-1}^{2}C_{1}^{1}}{C_{20}^{3}},\, k\in \text{Val }(X).$$

2. La probabilité que la personne gagne son pari revient à calculer :

$$\begin{aligned}P(X\geq 17)&=P(X=17)+P(X=18)+P(X=19)+P(X=20)\\&=\frac{C_{16}^{2}}{C_{20}^{3}}+\frac{C_{17}^{2}}{C_{20}^{3}}+\frac{C_{18}^{2}}{C_{20}^{3}}+\frac{C_{19}^{2}}{C_{20}^{3}}\\&=0.105+0.119+0.134+0.150=0.508\end{aligned}$$

Exercice 5 (*5 points*) Dans une urne qui contient 4 boules numérotées de 1 à 4, on en extrait avec remise 2 boules. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X représente le plus grand des 2 numéros tirés.

Réponse On a d'une part l'ensemble des valeurs de X :

$$val(X) = \{1,2,3,4\},$$

et d'autre part :

$$P(X=1) = \frac{1}{16}$$
$$P(X=2) = \frac{3}{16}$$
$$P(X=3) = \frac{5}{16}$$
$$P(X=4) = \frac{7}{16}$$

Exercice 6 Une urne contient une boule rouge et trois boules blanches. On tire les boules une à une jusqú'a ce qu'il ne reste que des boules de même couleur. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de tirages nécessaires jusqú'à l'arret de l'expérience. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Réponse Considérons les événements suivants :

R_i =' la i^{eme} boule tirée est rouge', et B_i= 'la i^{eme} boule tirée est blanche'.

On a :

$$Val(X) = \{1,2,3\}$$

et

$$P(X=1) = P(R_1) = \frac{1}{4}$$
$$P(X=2) = P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P(R_2/B_1) = \frac{3}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$
$$P(X=3) = 1-[P(X=1)+P(X=2)] = 1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 7 Une urne contient 6 boules dont 4 blanches et 2 noires. On extrait une boule de l'urne, puis on la remet et on effectue ensuite des tirages sans remise jusqú'à obtention d'une boule de même couleur.

Déterminer la loi de probabilité du nombre X de tirages après remise de la boule tirée initialement.

Réponse On a :

$$Val(X) = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= \frac{4}{6}.\frac{4}{6}+\frac{2}{6}.\frac{2}{6}=\frac{5}{9}\\
P(X=2) &= \frac{4}{6}.\frac{2}{6}.\frac{4}{5}+\frac{2}{6}.\frac{4}{6}.\frac{2}{5}=\frac{4}{15}\\
P(X=3) &= \frac{4}{6}.\frac{2}{6}.\frac{1}{5}.\frac{4}{4}+\frac{2}{6}.\frac{4}{6}.\frac{3}{5}.\frac{2}{4}=\frac{1}{9}\\
P(X=4) &= 0+\frac{2}{6}.\frac{4}{6}.\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3}=\frac{2}{45}\\
P(X=4) &= 0+\frac{2}{6}.\frac{4}{6}.\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3}.\frac{2}{2}=\frac{1}{45}
\end{aligned}$$

Exercice 8 Une urne contient deux boules vertes et une boule rouge. On tire une boule au hasard de l'urne. Si elle est rouge on la remet dans l'urne ; sinon on la met de côté. Puis on tire une seconde boule de l'urne.

1. Quelle est la probabilité que cette deuxième boule soit rouge ?
2. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la deuxième est rouge ?

On reprend la situation initiale, et on effectue plusieurs tirages successifs en appliquant la même règle : à chaque tirage, si la boule tirée est rouge on la remet dans l'urne ; sinon on la met de côté. On note X le rang d'apparition de la première boule rouge et Y le rang d'apparition de la première boule verte.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour X ? Calculer la loi de X.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour Y ? Quelle est la loi de Y ?

Réponse

1. Notons $R_i =\ll$ la i^{eme} boule tirée est rouge $\gg$. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}P(R_2) &= P[(R_2 \cap \bar{R}_1) \cup (R_2 \cap \bar{R}_1)] \\ &= P(R_2 \cap \bar{R}_1) + P(R_2 \cap \bar{R}_1) \\ &= P(R_2/\bar{R}_1).P(\bar{R}_1) + P(R_2/R_1).P(R_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}P(R_1/R_2) &= \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} \\ &= \frac{P(R_1).P(R_2/R_1)}{P(R_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

En effectuant plusieurs tirages successifs en appliquant la même règle, on aura :

1. Val(X) $= \{1,2,3\}$

$$\begin{aligned}P(X=1) &= P(R_1) = \frac{1}{3} \\ P(X=2) &= P(\bar{R}_1 \cap R_2) = P(\bar{R}_1).P(R_2/\bar{R}_1) = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ P(X=3) &= P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2) = P(\bar{R}_1).P(\bar{R}_2/\bar{R}_1) = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2. Val(Y) $= \{1,2,\ldots\}$

$$P(Y=k) = (\frac{1}{3})^{k-1} \times \frac{2}{3}$$

Exercice 9 Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule selon la règle suivante : Si la boule tirée est rouge, on l'a remet dans l'urne et on rajoute une boule rouge, si elle est blanche, on l'a remet dans l'urne et on rajoute

une boule blanche. Soit X_n la variable aléatoire representant le nombre de boules blanches rajoutées dans l'urne après n tirages.
Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

Réponse Considérons les événements suivants :

B_i =' la i^{eme} boule tirée est blanche', et R_i= 'la i^{eme} boule tirée est rouge'.

On a :

$$Val(X_2) = \{0, 1, 2\}$$

et

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 0) &= P(R_1 \cap R_2) \\
&= P(R_1) \times P(R_2/R_1) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\
P(X_2 = 1) &= P[(B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)] \\
&= P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) \\
&= P(B_1) \times P(R_2/B_1) + P(R_1) \times P(B_2/R_1) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\
P(X_2 = 2) &= P(B_1 \cap B_2) \\
&= P(B_1) \times P(B_2/B_1) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 10 Le long d'une autoroute, il y a trois barrières automatiques à des passages à niveau. La probabilité qu'une voiture qui circule sur cette autoroute trouve n'importe laquelle de ces barrières ouverte est $p = 0,8$.

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de passages à niveau consécutifs franchis sans rencontrer une barrière fermée.

Réponse

1. On a :

$$
\begin{aligned}
&Val(X) = \{0,1,2,3\}\\
&P(X=0) = q = 0.2\\
&P(X=1) = pq = 0.16\\
&P(X=2) = p^2 q = 0.128\\
&P(X=3) = p^3 = 0.512
\end{aligned}
$$

2. Que la voiture rencontre toutes les trois barrières ouvertes représente la valeur la plus probable.

3.

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0\,; \\ 0.2, & \text{si } 0 \le x < 1\,; \\ 0.36, & \text{si } 1 \le x < 2\,; \\ 0.448, & \text{si } 2 \le x < 3\,; \\ 1, & \text{si } x \ge 3. \end{cases}
$$

CHAPITRE

5 Lois classiques de probabilités Discrètes

5.1 Loi binomiale

Il existe de nombreuses situations où la question posée tourne autour du nombre de succès dans une suite d'expériences de Bernoulli.
Considérons l'exemple de n lancers d'une pièce de monnaie susceptible de tomber sur Pile [resp. Face] avec probabilité p [resp. $1^{-}p$] ($p \in [0,1]$).
On considère le nombre total S de succès (Pile) lors du jeu.
Soit X la variable aléatoire définie par

$$X = k \Leftrightarrow \text{ pile apparit } k \text{ fois sur } n$$

On a :
– $\mathrm{Val}(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$
– $\mathrm{Dist}(X) = (p_k)_k = P(X = k)$
Considérons un événement favorable quelconque E qui réalise k succès parmi n. Soit :

$$E = (\underbrace{pp\ldots p}_{kfois}\underbrace{ff\ldots f}_{(n-k)fois})$$

$$P(E) = P(\underbrace{pp\ldots p}_{kfois}\underbrace{ff\ldots f}_{(n-k)fois}) = p^k(1-p)^{n-k}$$

et comme il y a C_n^k possibilités de réaliser l'événement E, alors :

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

Définition 1 *On dit que la variable aléatoire X obéit à une loi binomiale de paramètres n et p, où $n \in N$ et $0<p<1$, si*

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-P)^{n-k}, 0 \leq k \leq n.$$

On écrira alors $X \rightsquigarrow B_{(n,p)}$.

Exemple 1 *On lance un dé 10 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?*

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

5.2 Loi Hypergéométrique

Considérons une urne qui contient N boules dont M sont rouges et $N-M$ sont blanches. On tire n boules $n \leq N$ sans remise. Soit X la variable aléatoire representant le nombre de boules rouges tirées parmi les n boules.

On a :

– $\mathrm{Val}(X)=\{0,1,\ldots,\min(n,M)\}$

– $\mathrm{Dist}(X)=(p_k)_k=P(X=k)$

$$p_k=P(X=k)=\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

Définition 2 *On dit que la variable aléatoire X obéit à une loi hypergéométrique de paramètres n, N, M, où $n, N, M \in \mathbb{N}$, si*

$$p_k=P(X=k)=\frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

Exemple 2 *Une urne contient 10 boules parmi lesquelles 3 sont rouges, 4 sont jaunes, 1 est bleue et 2 sont blanches. Les boules rouges, jaunes, bleue et blanches sont marquées de 2, 5, 10 et 20 points respectivement. Trouver la probabilité qu'en tirant 2 boules sans remise, on obtienne 7 points ?*

$$p_k = P(X=7) = \frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}} = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_{10}^2}$$

5.3 Loi géométrique

La loi géométrique représente le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p nécessaires à l'obtention d'un succès. Le nom de loi géométrique provienne du fait que les probabilités forment une progression géométrique.

Définition 3 *On dit que la variable aléatoire X obéit à une loi géométrique de paramètre p, où $0 \leq p \leq 1$, si*

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \;\; k = 1, 2, \ldots$$

On écrira alors $X \rightsquigarrow G(p)$.

Exemple 3 *Soit l'experience qui consiste à jeter une pièce de monnaie jusqú'a obtenir pile. Quel est le nombre de jets nécessaires pour réaliser l'experience ?*

$$P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$$

5.4 Loi binomiale négative

La loi binomiale négative appelle aussi la loi de Pascal représente le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p nécessaires pour obtenir un nombre r de succès.

Définition 4 *On dit que la variable aléatoire X obéit à une loi binomiale négative de paramètres p et r, où $0 \leq p \leq 1$ et $r \in \mathbb{N}$, si*

$$P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k \geq r$$

Remarque 5.1 *Si $r = 1$, on retrouve la loi géométrique de paramètre p, donc si $X \rightsquigarrow BN(1,p)$, alors $X \rightsquigarrow G(p)$. Dans ce dernier cas, la variable aléatoire X représente le nombre d'épreuves nécessaires jusqú'à l'obtention d'un succès.*

Exemple 4 *On exécute une série d'épreuves indépendantes, chacune aboutissant à un succès avec la même probabilité p, jusqú'à obtenir un total de r succès.*
- *Quel est le nombre d'épreuves nécessaires pour atteindre ce résultat ?*
- *Quelle est la probabilité que r succès apparaissent avant que le $m-ime$ échec ne survienne ?*

$$P(X = n) = C_{n-1}^{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n \geq r$$

5.5 Loi de Poisson

La loi de poisson décrit généralement les probabilités d'apparition d'événements rares sur un très grand nombre d'observations. Par exemple le nombre de fautes de frappe sur une page dans un livre ou le nombre d'individus souffrant d'une maladie rare ...

Définition 5 *On dit que la variable aléatoire X obéit à une loi de poisson de paramètre λ, si*

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1\dots$$

5.6 Loi uniforme

Définition 6 *On dit que la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'ensemble des valeurs $\{1,2,\dots,n\}$, si*

$$\forall k\in\{1,2,\dots,n\}, P_k=P(X=k)=\frac{1}{n}$$

5.7 Exercices

Exercice 1 Sachant que la probabilité qu'un étudiant soit diplômé est de 0.4, calculer pour un groupe de 5 étudiants la probabilité :

1. qu'aucun étudiant ne soit diplômé.
2. qu'un seul étudiant soit diplômé.
3. que deux étudiants soient diplômés.
4. qu'au moins deux étudiants soient diplômés.
5. que les 5 étudiants soient diplômés.

Réponse Considérons l'événement E$_j$= " l'étudiant j est diplômé ". On a :

$P(1.)=P(\cap_{j=1}^5\bar{E}_j)=\prod_{j=1}^5 P(\bar{E}_j)=(1-p)^5=(0.6)^5=0.077$

$P(2.)=C_5^1 p(1-p)^4=0.259$

$P(3.)=C_5^2 p^2(1-p)^3=0.345$

$P(4.) = C_5^2 p^2(1-p)^3 + C_5^3 p^3(1-p)^2 + C_5^4 p^4(1-p) + p^5 = 0.663$
$P(5.) = p^5 = 0.01$

Exercice 2 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$p(X=i) = k.\frac{\lambda^i}{i!}, i = 0,1,2,\ldots, \text{ où } \lambda \text{ est un réel positif}$$

Sachant que $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, calculer :

a) p(X=0)

b) p(X>2)

Réponse $P(X=i) = k.\frac{\lambda^i}{i!}$ est une loi de probabilité qui doit donc verifier :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) = 1 \\
\Rightarrow &\sum_{i=0}^{\infty} k.\frac{\lambda^i}{i!} = 1 \\
\Rightarrow &k.e^{\lambda} = 1 \\
\Rightarrow &k = e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
p(X=0) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} \\
&= e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
p(X>2) &= 1 - P(X \leq 2) \\
&= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) \\
&= 1 - \left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}\right) \\
&= 1 - \left(e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{0,1\ldots n\}$, et soit Y une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{-n,\ldots,n\}$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. On pose $Z=Y^2$. Déterminer la loi de Z et en déduire son espérance.

Réponse On a X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{0,1\ldots n\}$, alors :

$$Val(X) = \{0,1\ldots n\}$$
$$P(X=k) = \frac{1}{n+1}, \forall k \in \{0,1\ldots n\}$$

1. L'espérance et la variance de X :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(K=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2P(K=k) - \frac{n^2}{4} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k^2 - \frac{n^2}{4} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} \\
&= \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4}
\end{aligned}$$

2. Loi de $Z = Y^2$:
   On a Y une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{-n, \ldots n\}$, alors :

$$\begin{aligned} Val(Y) &= \{-n, \ldots n\} \\ P(Y = k) &= \frac{1}{2n+1}, \forall k \in \{-n, \ldots n\} \end{aligned}$$

   Par conséquent :

$$\begin{aligned} Val(Z) &= \{0, 1, 4, \ldots, n^2\} \\ P(Z = k) &= P(Y^2 = k) \\ &= P(Y = +\sqrt{k} \cup Y = -\sqrt{k}) \\ &= P(Y = +\sqrt{k}) + P(Y = -\sqrt{k}) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

   L'espérance de Z :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \sum_{k \in Val(Z)} kP(Z = k) \\ &= \sum_{k \in Val(Z)} k\frac{2}{2n+1} \quad \text{On peut faire le changement de variable } k = t^2, \text{on aur} \\ &= \sum_{t=0}^{n} t^2 \frac{2}{2n+1} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{2}{2n+1} = \frac{n(n+1)}{3} \end{aligned}$$

Exercice 4 Douze concurrents participent à un concours de piano, 7 hommes et 5 femmes. A la première étape, par tirage au sort, les concurrents sont divisés en 3 groupes égaux. Donner la loi de probabilité de la variable X qui représente le nombre d'hommes membres du premier groupe passant devant le jury.

Réponse

$$Val(X) = \{0,1,2,3,4\}$$
$$P(X=k) = \frac{C_7^k C_5^{4-k}}{C_{12}^4}, k \in \{0,1,2,3,4\}$$

Exercice 5 Soient a et b deux entiers positifs et soit X une variable aléatoire discrète à valeurs entières positives telles que :

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b}, & \text{si } 1 \leq k \leq ab\,; \\ 0, & \text{si } k > ab. \end{cases} \tag{5.1}$$

1. Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que la relation (5.1), puisse être considérée comme la loi de probabilité de X ?
2. Calculer l'espérance de X.
3. Déterminer les valeurs de a et b qui permettent d'avoir $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}$.

Réponse

1. La relation (5.1), est considérée comme la loi de probabilité de X, si

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} P(X=k) = 1$$
$$\sum_{k=1}^{k=ab} (\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) + \sum_{k=ab+1}^{k=\infty} 0 = 1$$
$$ab(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = 1$$
$$\Rightarrow a = b - 1$$

2. L'espérance de X :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{ab} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{ab} k(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) \\
&= \frac{ab(ab+1)}{2}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) \\
&= \frac{(b-a)(ab+1)}{2}
\end{aligned}$$

3.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}$$

$$\frac{(b-a)(ab+1)}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ et } b = 3$$

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire binomiale $B(n,p), n \in \mathbb{N}^*, p \in]0,1[$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Réponse

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k \in Val(Y)} kP(Y=k) \\
&= \sum_{k \in Val(Y)} kP(\frac{1}{X+1}=k) \\
&= \sum_{\frac{1}{k}-1=0}^{n} kP(X=\frac{1}{k}-1) \\
&= \sum_{t=0}^{n} \frac{1}{t+1} P(X=t), \quad \text{avec } t=\frac{1}{k}-1 \\
&= \sum_{t=0}^{n} \frac{1}{t+1} C_n^t p^t (1-p)^{n-t} \\
&= \sum_{t=0}^{n} \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{t+1} p^t (1-p)^{n-t} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} C_{n+1}^{r} p^{r-1} (1-p)^{n-(r-1)} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{r=1}^{n+1} C_{n+1}^{r} p^{r} (1-p)^{(n+1)-r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{p(n+1)} \left[\sum_{r=0}^{n+1} C_{n+1}^{r} p^{r} (1-p)^{(n+1)-r} - (1-p)^{n+1} \right] \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \left[1-(1-p)^{n+1} \right] \\
&= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}
\end{aligned}
$$

Exercice 7 Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire des boules une par une avec remise jusqú'à l'apparition d'une boule noire. Notons par X la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'apparition de la première boule noire.

1. Quelle est la loi de X ?

2. Quelle est la probabilité qu'il faille au moins 3 tirages ?

Réponse Notons par X la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'apparition de la première boule noire. Alors $X \rightsquigarrow G(p)$, où $p = \frac{b}{b+a}$.
La probabilité qu'il faille exactement k tirages est :

$$P(X = k) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{k-1} \frac{b}{a+b}$$

La probabilité qu'il faille au moins k tirages est alors :

$$\begin{aligned}
P(X \geq k) &= P[(X = k) \cup (X = k+1) \cup \ldots] \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} P(X = i) \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{i-1} \frac{b}{a+b} \\
&= \frac{b}{a+b} \sum_{i=k}^{\infty} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{i-1} \\
&= \frac{b}{a+b} \frac{\left(\frac{a}{a+b}\right)^{k-1}}{1 - \frac{a}{b+a}} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

Exercice 8 Un magasin spécialisé reçoit en moyenne 4 clients par jour, le nombre de clients étant distribué selon une loi de Poisson. Calculer la probabilité que le magasin soit visité le mercredi par :

1. aucun client
2. exactement 5 clients
3. au moins 6 clients.

Réponse On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients reçus par jour dans le magasin. La variable X étant distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λ et sachant que $\mathbb{E}(X) = \lambda$, alors $\lambda = 4$. Ainsi, la loi de X est donnée par :

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

1. $P(X = 0) = e^{-4}\frac{4^0}{0!} = 0.018$
2. $P(X = 5) = e^{-4}\frac{4^5}{5!} = 0.156$
3. $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - \sum_{k=0}^{5} P(X = k) = 0.215$

Exercice 9 On considère deux avions A et B ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ?

Réponse On note X et Y respectivement les variables aléatoires représentant le nombre de moteurs de A et B qui tombent en panne. La variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(4, p)$. En particulier, on a :

$$P(X = 0) + P(X = 1) = C_4^0 p^0 (1-p)^{4-0} + C_4^1 p^1 (1-p)^{4-1} = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3.$$

D'autre part, Y suit une loi binomiale $B(2, p)$. En particulier,

$$P(Y = 0) = (1-p)^2.$$

Nous aurons ainsi intérêt à prendre l'avion A si $P(X = 0) + P(X = 1) \geq P(Y = 0)$. Ceci donne :

$$p(1-p)^2(2-3p) \geq 0.$$

Donc, si $0 \leq p < 2/3$, il est préférable de choisir A. Si $p = 2/3$, le choix est indifférent, et si $p > 2/3$, il vaut mieux choisir B.

Exercice 10 Un fumeur a dans chacune de ses deux poches gauche et droite une boite d'allumettes qui contient initialement 5 allumettes. A chaque fois qu'il veut fumer une cigarette, il choisit au hasard une de ses deux poches et prend une allumette dans la boite qui s'y trouve. A un moment donné, il s'aperçoit que la Boite d'allumettes qu'il a choisi est vide. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre d'allumettes qui reste dans l'autre boite. Determiner la loi de la variable aléatoire X.

Réponse On a :

$$Val(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

On considère les événements suivants :

A_k =≪ Il reste k allumettes dans la boite de la poche droite du fumeur quand il découvre que la boite de la poche gauche est vide ≫.

B_k =≪ Il reste k allumettes dans la boite de la poche gauche du fumeur quand il découvre que la boite de la poche droite est vide ≫.

On a ainsi :

$$P(X = k) = P(A_k \cup B_k) = 2.P(A_k). \tag{5.2}$$

Cependant, l'événement favorable A_k ne peut avoir lieu que si le fumeur tente de prendre une $(n+1)^{eme}$ allumette dans la boite de sa poche gauche pour la $(n+n-k+1)^{eme}$ fois. Ce qui peut être traduit en termes d'événement par :

$$P(A_k) = C_{2n-k}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} . \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} . \left(\frac{1}{2}\right) \tag{5.3}$$

De (8.19) et (8.20), on aura :

$$P(X = k) = C_{2n-k}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

On aura ainsi :

$$P(X=0)=C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{35}{128}$$
$$P(X=1)=C_7^4\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{35}{128}$$
$$P(X=2)=C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{30}{128}$$
$$P(X=3)=C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{20}{128}$$
$$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{8}{128}$$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{4}k.P(X=k)=\frac{35}{128}+2.\frac{30}{128}+3.\frac{20}{128}+4.\frac{8}{128}=\frac{187}{128}=1,46.$$

Chapitre 6

Lois classiques de variables continues

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons traité des variables aléatoires dont l'ensemble des états est fini ou infini dénombrable. Il existe cependant des variables dont l'ensemble des états possibles est infini non dénombrable, comme la durée de vie d'un transistor par exemple.

6.2 Variables aléatoires continues

Définition 1 *On dit que X est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction f non négative définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant pour tout ensemble B de nombres réels la propriété :*

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx \tag{6.1}$$

La fonction f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X. En d'autres termes, la relation (6.1) signifie que la probabilité que

X prenne une valeur de B peut être obtenue en intégrant la densité de probabilité sur B. Du fait que X doit bien prendre une valeur, il résulte la contrainte suivante pour f :

$$P(x \in]-\infty, +\infty[) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

La probabilité de tout intervalle $[a, b]$ est définie par :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Définition 2 *Soit X une variable aléatoire continue de densité f. Le moment d'ordre r de la variable X noté $m_r(X)$ est défini par :*

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$$

Comme cas particulier, lorsque $r = 1$, on aura :

$$m_1(X) = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

C'est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Définition 3 *Soit X une variable aléatoire continue de densité f. Le moment centré d'ordre r de la variable X noté $\mu_r(X)$ est défini par :*

$$\mu_r(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^r = \int_{-\infty}^{+\infty} [X - \mathbb{E}(X)]^r f(x)dx$$

Comme cas particulier, lorsque $r = 2$, on aura :

$$\mu_2(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [X - \mathbb{E}(X)]^2 f(x)dx = \mathbb{V}ar(X)$$

C'est la variance de la variable aléatoire X.

6.3 Loi uniforme

Définition 4 *Soit X une variable aléatoire continue sur l'intervalle $[a,b]$. On dit que la variable aléatoire X est uniformément distribuée sur l'intervalle $[a,b]$ et on note $X \rightsquigarrow U_{[a,b]}$, si sa densité de probabilité s'écrit sous la forme :*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a\,; \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b\,; \\ 0, & \text{si } x > b. \end{cases} \tag{6.2}$$

On vérifie que (6.2) correspond à une densité de probabilité puisque $f(x) \geq 0$ et $\int_a^b f(x)dx = 1$.
A partir de $F(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$ et de (6.2) on obtient la fonction de répartition d'une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[a,b]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a\,; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b\,; \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases} \tag{6.3}$$

Exemple 1 *A partir de 7 heures, les bus passent toutes les 15 minutes à un arrêt de bus donné. Un usager se présente entre 7 h 00 et 7 h 30 à cet arrêt, l'heure exacte de son arrivée étant une variable aléatoire uniforme sur cette période. Trouver la probabilité qu'il doive attendre à l'arret moins de 5 minutes, puis plus de 10 minutes.*

Réponse *Désignons par X le nombre de minutes s'écoulant à partir de 7 h 00 jusqú'à l'arrivée de l'usager. X est une variable uniforme sur $[0,30]$, d'une part. D'autre part, l'attente n'est inférieure à 5 minutes que si l'usager arrive entre 7hl0 et 7hl5 ou entre 7 h 25 et 7 h 30. La probabilité d'attendre moins de 5 minutes est ainsi*

$$P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30) = \int_{10}^{15} \frac{1}{30}dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30}dx = \frac{1}{3}.$$

6.4 Loi exponentielle

On rencontre souvent la loi exponentielle lorsqu'il s'agit de représenter le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifié.

Définition 5 *On dit que la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre α, si sa densité de probabilité s'écrit sous la forme*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & si\ x \geq 0\,; \\ 0, & si\ x < 0. \end{cases}$$

On a

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}dx = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx = \alpha \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha x} \mid_0^{+\infty} = 1$$

La fonction de répartition F d'une variable exponentielle est donnée par

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^t \alpha e^{-\alpha t}dt = \alpha \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha t} \mid_0^x = 1 - e^{-\alpha x}, x \geq 0$$

6.4.1 Propriété d'absence de mémoire

Considérons la variable aléatoire X qui représente la durée de vie d'un certain instrument. La variable aléatoire X est dite sans mémoire, si la probabilité pour l'instrument dure au moins $s+t$ heures sachant qu'il en a déjà vécu t est la même que la probabilité non conditionnelle qu'il dure s heures à partir de la mise en fonction initiale. En d'autres termes, si l'instrument fonctionne encore après t heures de service, la distribution de sa durée de vie à partir de là est la même que la distribution de la durée de vie de l'appareil neuf. De manière formelle, on dira qu'une variable aléatoire non négative X est sans mémoire lorsque

$$P(X > t+s/X > t) = P(X > s), s,t > 0$$

En effet, on :

$$\begin{aligned}
P(X>t+s/X>t) &= \frac{P(X>t+s,X>t)}{P(X>t)} \\
&= \frac{P(X>t+s)}{P(X>t)} \\
&= \frac{1-P(X\leq t+s)}{1-P(X\leq t)} \\
&= \frac{1-\int_0^{t+s}\alpha e^{-\alpha y}dy}{1-\int_0^{t}\alpha e^{-\alpha y}dy} \\
&= \frac{1-\alpha[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha y}\mid_0^{t+s}]}{1-\alpha[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha y}\mid_0^{t}]} \\
&= \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha t}} \\
&= \frac{e^{-\alpha t}\times e^{-\alpha s}}{e^{-\alpha t}} \\
&= e^{-\alpha s} \\
&= 1-\underbrace{[1-e^{-\alpha s}]}_{F_X(s)} \\
&= 1-[P(X\leq s)] \\
&= P(X>s)
\end{aligned}$$

Exemple 2 *On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est une variable aléatoire* $X \rightsquigarrow Exp(\frac{1}{10})$. *Vous arrivez à une cabine téléphonique et quelqu'un passe juste devant vous. Quelle est la probabilité que vous attendiez plus de 10 minutes.*

Réponse

$$P(X>10) = \int_{10}^{\infty}\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}dx = \frac{1}{10}[-10e^{-\frac{1}{10}x}]_{10}^{\infty} = \frac{1}{e}$$

Exemple 3 *La durée de fonctionnement d'un ordinateur avant sa première panne est une variable aléatoire continue X dont la densité est donnée par*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\frac{1}{100}x}, & si\ x \geq 0\,; \\ 0, & si\ x < 0. \end{cases}$$

1. *Trouver la probabilité que la durée de fonctionnement soit comprise entre 50 et 150 heures.*
2. *Trouver la probabilité que l'ordinateur fonctionne moins de 100 heures.*

Réponse *On a :*

$$\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\frac{1}{100}x} dx = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{100}$$

alors

$$P(50 \leq X \leq 150) = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x} dx = -e^{-\frac{1}{100}x}\Big|_{50}^{150} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}$$

6.5 Loi normale

Définition 6 *Une variable aléatoire X est dite normalement distribuée, si la densité s'ecrit sous la forme*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(m,\sigma^2)}$ Montrer que f est une densité de probabilité revient à montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

En effectuant le changement de variable $y = \frac{(x-m)^2}{\sigma}$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy \tag{6.4}$$

Evaluons la quantité

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

On a

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\dfrac{-y^2}{2}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\dfrac{-x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\dfrac{-(y^2+x^2)}{2}} dxdy$$

En posant $x = rcos\theta$ et $y = rsin\theta$, on aura $dxdy = rd\theta dr$, et ensuite

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\dfrac{r^2}{2}} rd\theta dr \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\dfrac{r^2}{2}} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\dfrac{r^2}{2}} rdr \\
&= -2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\dfrac{r^2}{2}} (-r)dr \\
&= -2\pi e^{-\dfrac{r^2}{2}} \Bigg|_0^{+\infty} = 2\pi
\end{aligned}$$

ceci établit que $I = \sqrt{2\pi}$, et en remplaçant dans la relation (6.4), on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1$$

6.5.1 Espérance et Variance d'une loi Normale

Soit X une variable suivant une loi normale de paramètres m et σ^2, alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = m \tag{6.5}$$

Preuve 6 *En effectuant le changement de variable* $y = \frac{(x-m)}{\sigma}$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + m) e^{\frac{-y^2}{2}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma y e^{\frac{-y^2}{2}} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} m e^{\frac{-y^2}{2}} dy] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [-\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (-y) e^{\frac{-y^2}{2}} dy + m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\underbrace{-\sigma e^{\frac{-y^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + m \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy]}_{=\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times m \times \sqrt{2\pi} = m
\end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue, on trouve

$$\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$$

Preuve 7 *Exercice*

Remarque 6.1 *L'espérance* $\mathbb{E}(X) = m$ *et la variance* $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$ *sont les paramètres d'une loi normale.*

6.5.2 Propriétés d'une variable aléatoire normale

Propriété 6.1 *Soit X une variable suivant une loi normale de paramètres m et σ^2, alors la variable* $Y = \frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(0,1)}$

Preuve 8 *Soit $F_Y(y)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire Y. On a par définition :*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(\frac{X-m}{\sigma} \leq y) \\ &= P(X \leq \sigma y + m) \\ &= F_X(\sigma y + m) \end{aligned}$$

Par conséquent, la densité de Y est donnée par :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= F'_X(\sigma y + m) \\ &= (\sigma y + m)' f_X(\sigma y + m) \\ &= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(\sigma y + m - m)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{y^2}{2}} \end{aligned}$$

par conséquent, $Y = \dfrac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(0,1)}$

Dans ce cas, la variable Y est appelée variable normale centrée et réduite, dont la fonction de répartition est notée généralement

$$\phi(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$$

Les valeurs $\phi(y)$ pour des arguments y non-négatifs sont données dans des tables statistiques (voir annexe). Pour les arguments y négatifs, on calcule $\phi(y)$ grâce à l'équation

$$\phi(-y) = 1 - \phi(y)$$

Exemple 4 *Soit X une variable aléatoire de paramètres $m = 3$ et $\sigma^2 = 9$. Calculer :*

1. $P(2 \leq X \leq 5)$
2. $P(X > 0)$.

Réponse

$$P(2 \leq X \leq 5) = 0.3779$$

$$P(X > 0) = 0.8413$$

6.6 Exercices

Exercice 1 Soit la fonction

$$f(x) = \frac{k}{e^x + e^{-x}}.$$

Trouver la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité ?

Réponse Puisqu'on doit avoir $f > 0$, il s'ensuit qu'on doit avoir $k > 0$. Dans ce cas la fonction f est une densité de probabilité, si et seulement, si

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)dx &= k\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx \\
&= k\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx \quad \ldots\ldots \text{On pose } (e^x = t), \text{ on aura} \\
&= k\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt \quad \ldots\ldots \text{On pose } (tang\theta = t), \text{ on aura} \\
&= k\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = k\frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{x}}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Préciser k et trouver $E(5X^2 - 3X + 1)$.

Réponse

1. On a :

$$k\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2k\sqrt{x}|_0^1 = 2k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

2.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{5}$$

Alors :

$$\mathbb{E}(5X^2 - 3X + 1) = 5\mathbb{E}(X^2) - 3\mathbb{E}(X) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\mathbb{E}(e^X)$.

Réponse Soit $Y = e^X$. Déterminons d'abord la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y. Pour $1 < y < e$, on a

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^x < y) = P(X < \log y) = \int_0^{\log Y} f(x)dx = \log y$$

En dérivant $F_y(y)$, on obtient la densité de Y, $f_Y(y) = \frac{1}{y}, 1 < y < e$. Par conséquent

$$E(e^x) = E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_1^e dy = e - 1.$$

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & \text{si } -1 \leq x \leq 1\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver l'espérance de X^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Réponse

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \int_{-1}^{1} x^n f(x)dx \\ &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^{n+2}dx \\ &= \frac{3}{2}[\frac{1}{n+3}x^{n+3}]_{-1}^{1} \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{n+3}[1^{n+3}-(-1)^{n+3}] \\ &= \begin{cases} \frac{3}{n+3}, & \text{si n est pair}\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Exercice 5 A partir de 8 heures du matin, les bus passent toutes les 10 minutes à un arrêt de bus donné. Un usager se présente entre 8 h 02 et 8 h 17 à cet arrêt, l'heure exacte de son arrivée étant une variable aléatoire uniforme sur cette période. Trouver la probabilité qu'il doive attendre à l'arrêt :

1. Moins de 3 minutes
2. Plus de 5 minutes.

Réponse Désignons par X le nombre de minutes s'écoulant à partir de 8 h 00 jusqú'à l'arrivée de l'usager. X est une variable uniforme sur $[2,17]$.

1. L'attente n'est inférieure à 3 minutes que si l'usager arrive entre 08h07 et 08h10 ou à 08h17. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes est ainsi
$$P(7 < X < 10) + P(X = 17) = \int_{7}^{10} \frac{1}{15}dx + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

2. L'attente n'est supérieure à 5 minutes que si l'usager arrive entre 08h02 et 08h05 ou bien entre 08h11 et 08h15. La probabilité d'attendre plus de 5 minutes est ainsi
$$P(2<X<5)+P(10<X<15)=\int_2^5 \frac{1}{15}dx+\int_{10}^{15}\frac{1}{15}dx=\frac{8}{15}$$

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire continue de densité f. Montrer que
$$P(X\geq a)\leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}, a\in\mathbb{R}$$
On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

1. Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine prochaine dépasse 75 pièces ?
2. On sait de plus que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine à venir soit comprise entre 40 et 60 ?

Réponse On a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \int_0^\infty xf(x)dx\\ &= \int_0^a xf(x)dx+\int_a^\infty xf(x)dx\\ &\geq \int_a^\infty xf(x)dx \geq \int_a^\infty af(x)dx = a\int_a^\infty f(x)dx = aP(X\geq a)\\ &\Rightarrow P(X\geq a)\leq\frac{\mathbb{E}(X)}{a} \quad \text{(On appelle cette inégalité \textbf{\textit{Inégalité de Markov}})}\end{aligned}$$
Désignons par X le nombre de pièces produites en une semaine.

1. En appliquant l'inégalité de Markov, on aura :
$$P(X>75)\leq\frac{\mathbb{E}(X)}{75}=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}.$$
2. L'inégalité de Tchebytchev donne :
$$\begin{aligned}P(|x-50|\geq 10)&\leq\frac{\sigma^2}{10^2}=\frac{1}{4}\\ \Rightarrow P(|x-50|<10)&\geq 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [-1,3]. Determiner la loi de la variable aléatoire $Y = X^2$ et calculer son espérance.

Réponse

1. Notons que Y prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 9]$. Soit $F_X(x)$ la fonction de répartition de X. On a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1\,; \\ \frac{x+1}{3}, & -1 \leq x < 3\,; \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

et soit $F_Y(y)$ la fonction de répartition de Y.
– Si $y < 0$, alors $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = 0$
– Si $0 \leq y < 1$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \frac{\sqrt{y}+1}{3} - \frac{-\sqrt{y}+1}{3} = \frac{2\sqrt{y}}{3} \end{aligned}$$

– Si $1 \leq y < 9$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \frac{\sqrt{y}+1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition de la v.a. Y sécrit :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0\,; \\ \dfrac{2\sqrt{y}}{3}, & 0 \leq y < 1\,; \\ \dfrac{\sqrt{y}+1}{3}, & 1 \leq y < 9\,; \\ 1, & y \geq 9. \end{cases}$$

La densité de Y prend alors la forme suivante :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0\,; \\ \dfrac{1}{3\sqrt{y}}, & 0 \leq y < 1\,; \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & 1 \leq y < 9\,; \\ 0, & y \geq 9. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 y\frac{1}{3\sqrt{y}}dy + \int_1^9 y\frac{1}{6\sqrt{y}}dy = \frac{28}{9}$$

Exercice 8 Soient $X_1 < X_2 < X_3$ les statistiques d'ordre d'un échantillon aléatoire de taille 3 tiré d'une distribution uniforme avec fonction de densité

$$f(x) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta, \quad \theta > 0.$$

Determiner la loi de X_1 et X_3. et calculer leur espérances.

Réponse

1. a) Loi de X_1 : Considérons la variable $Y = \inf\limits_{1\leq i\leq 3} X_i$ de fonction de répartition $H_Y(y)$:

$$\begin{aligned} H_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(\inf_{1\leq i\leq 3} X_i \leq y) \\ &= 1 - P(\inf_{1\leq i\leq 3} X_i > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, X_3 > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > yP(X_3 > y) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{3}[1 - P(X_i \leq y)] \\ &= 1 - [1 - F(y)]^3 = 1 - (1 - \frac{x}{\theta})3 \end{aligned}$$

Soit $h_Y(y)$ la fonction de densité de la variable aléatoire Y, alors :

$$h_Y(y) = -3[1 - F(y)]^2[-f_Y(y)] = 3(1 - \frac{x}{\theta})^2\frac{1}{\theta}$$

b) Loi de X_3 : Considérons la variable $Z = \sup\limits_{1\leq i\leq 3} X_i$ de fonction de répartition $G_z(z)$:

$$\begin{aligned} G_z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P(\sup_{1\leq i\leq 3} X_i \leq z) \\ &= P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, X_3 \leq y) \\ &= P(X_1 \leq y)P(X_2 \leq yP(X_3 \leq y) \\ &= [F(y)]^3 = (\frac{x}{\theta})^3 \end{aligned}$$

Soit $g_z(z)$ la fonction de densité de la variable aléatoire Z, alors :

$$g_Z(z) = 3[F(y)]^2[f_Y(y)] = 3(\frac{x}{\theta})^2\frac{1}{\theta}$$

2.

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_0^\theta x3(1-\frac{x}{\theta})^2\frac{1}{\theta}dx = \frac{3}{\theta}\int_0^\theta x(1-\frac{x}{\theta})^2 dx = \frac{3}{\theta}\int_0^\theta (x - \frac{2x^2}{\theta} + \frac{x^3}{\theta^2})dx = \frac{3}{\theta}\left(\frac{\theta^2}{12}\right) =$$

$$\mathbb{E}(X_3) = \int_0^\theta x3(\frac{x}{\theta})^2\frac{1}{\theta}dx = \frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^3 dx = \frac{3}{\theta^3}\frac{\theta^4}{4} = \frac{3\theta}{4}$$

Exercice 9 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$p(X = k) = \alpha\frac{\lambda^k}{k!}, i = 0, 1, 2, \ldots, \text{ où } \lambda \text{ est un réel positif}$$

1. Sachant que $e^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$,
   a) Calculer la valeur de α pour que p_k soit une loi de probabilité.
   b) Déduire la loi que suit la variable aléatoire X.
   c) Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Soit Y la variable discrete définie par :

$$Y = \begin{cases} -2, & \text{si } X \leq 2\,; \\ 3, & \text{si } 2 < X \leq 5\,; \\ 10, & \text{si } X > 5\,; \end{cases}$$

a) Calculer la loi de probabilité de Y pour $\lambda = 2$.

b) Déduire $p(X > 2)$.

Réponse

1. a) $P(X = k) = \alpha.\frac{\lambda^k}{k!}$ est une loi de probabilité qui doit donc verifier :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1 \\
\Rightarrow &\sum_{k=0}^{\infty} \alpha.\frac{\lambda^k}{k!} = 1 \\
\Rightarrow &\alpha.e^{\lambda} = 1 \\
\Rightarrow &\alpha = e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

b) La variable aléatoire X suit donc une loi de Poisson de paramètre λ.

c) L'espérance et la variance de X :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\lambda^t}{t!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) - \lambda^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2 \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{(t+1)}}{t!} - \lambda^2 \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} t e^{-\lambda} \frac{\lambda^{(t+1)}}{t!} + \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{(t+1)}}{t!} - \lambda^2 \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{(t+1)}}{(t-1)!} + \lambda \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{t)}}{t!} - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 \sum_{t=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{(t-1)}}{(t-1)!} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

2. a) La loi de Y :

$$\begin{aligned}
P(Y=-2) &= P(X \leq 2) \\
&= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\
&= e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \\
&= (1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}) e^{-\lambda} \\
&= (1 + 2 + \frac{4}{2}) e^{-2} \quad \text{pour } \lambda = 2 \\
&= 5e^{-2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(Y=3) &= P(2 \leq X \leq 5) \\
&= P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) \\
&= (\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!})e^{-2} \\
&= \frac{34}{15}e^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(Y=10) &= P(X>5) \\
&= 1-P(X \leq 5) \\
&= 1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X= \\
&= 1-[1+2+2+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}+\frac{32}{125}]e^{-2} \\
&= 1-\frac{109}{15}e^{-2}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
P(X>2) &= 1-P(X \leq 2) \\
&= 1-P(Y=-2) \\
&= 1-5e^{-2}
\end{aligned}
$$

Exercice 10 Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées issues de la variable aléatoire X de densité :

$$f(x,\theta) = ke^{-|x-\theta|}, \theta \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de k pour que f soit une dentité de probabilité.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Réponse

1. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\theta)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-|x-\theta|}dx \\
&= \int_{\theta}^{+\infty} ke^{-(x-\theta)}dx + \int_{-\infty}^{\theta} ke^{-(\theta-x)}dx \\
&= ke^{\theta}\int_{\theta}^{+\infty} e^{-x}dx + ke^{-\theta)}\int_{-\infty}^{\theta} e^{x}dx \\
&= ke^{\theta}(-e^{-x})|_{\theta}^{+\infty} + ke^{-\theta}(e^{x})|_{-\infty}^{\theta} \\
&= ke^{\theta}(0+e^{-\theta}) + ke^{-\theta}(e^{\theta}) \\
&= 2k
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\theta)dx = 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\theta)dx \\
&= \frac{1}{2}e^{-\theta}\underbrace{\int_{-\infty}^{\theta} xe^{x}dx}_{I_1} + \frac{1}{2}e^{\theta}\underbrace{\int_{\theta}^{+\infty} xe^{-x}dx}_{I_2} \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

Pour le calcul de l'intégrale I_1 (par parties), on pose :

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{x} \end{cases}$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
I_1 &= xe^{x}|_{-\infty}^{\theta} - \int_{-\infty}^{\theta} e^{x}dx \\
&= \theta e^{\theta} - (e^{x})|_{-\infty}^{\theta} \\
&= \theta e^{\theta} - e^{\theta} \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

De la même manière, pour calculer I_2, on pose :

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

on a alors :

$$\begin{aligned} I_2 &= -xe^{-x}|_\theta^{+\infty} + \int_\theta^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= \theta e^{-\theta} - (e^{-x})|_\theta^{+\infty} \\ &= \theta e^{-\theta} + e^{-\theta} \end{aligned} \quad (6.9)$$

En remplaçant I_1 et I_2 dans la relation (6.7), on aura :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2}e^{-\theta}(\theta e^{\theta} - e^{\theta}) + \frac{1}{2}e^{\theta}(\theta e^{-\theta} + e^{-\theta}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\theta}e^{\theta}(\theta - 1) + \frac{1}{2}e^{\theta}e^{-\theta}(\theta + 1) \\ &= \frac{1}{2}(\theta - 1) + \frac{1}{2}(\theta + 1) \\ &= \theta \end{aligned}$$

On a : $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$. Pour le calcul de $\mathbb{E}(X^2)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,\theta)dx \\ &= \frac{1}{2}e^{-\theta}\underbrace{\int_{-\infty}^{\theta} x^2e^x dx}_{I_3} + \frac{1}{2}e^{\theta}\underbrace{\int_{\theta}^{+\infty} x^2e^{-x}dx}_{I_4} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Pour le calcul de l'intégrale I_3, on pose :

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = e^x \end{cases}$$

on a alors :

$$\begin{aligned} I_3 &= x^2e^x|_{-\infty}^{\theta} - 2\underbrace{\int_{-\infty}^{\theta} xe^x dx}_{I_1} \\ &= \theta^2e^{\theta} - 2(\theta e^{\theta} - e^{\theta}) \\ &= e^{\theta}(\theta^2 - 2\theta + 2) \end{aligned} \quad (6.11)$$

De la même manière, on calcule I_4, on pose :

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

on a alors :

$$\begin{aligned} I_4 &= -x^2e^{-x}|_{\theta}^{+\infty} + 2\underbrace{\int_{\theta}^{+\infty} xe^{-x}dx}_{I_2} \\ &= \theta^2 e^{-\theta} + 2(\theta e^{-\theta} + e^{-\theta}) \\ &= e^{-\theta}(\theta^2 + 2\theta + 2) \end{aligned} \tag{6.12}$$

En remplaçant, I_3 et I_4 dans la relation (8.18), on aura :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{2}e^{-\theta}e^{\theta}(\theta^2 - 2\theta + 2) + \frac{1}{2}e^{\theta}e^{-\theta}(\theta^2 + 2\theta + 2) \\ &= \frac{1}{2}(\theta^2 - 2\theta + 2) + \frac{1}{2}(\theta^2 + 2\theta + 2) \\ &= \theta^2 + 2 \\ \Rightarrow \mathbb{V}ar(X) &= \theta^2 + 2 - \theta^2 = 2 \end{aligned}$$

CHAPITRE

7

Convergences des suites aléatoires

7.1 Introduction

Les théorèmes de convergence en calcul des probabilités représentent un outil mathématique indispensable pour fonder le calcul des probabilités et la statistique mathématique, ainsi que leur connexion. Grâce à ces théorèmes de convergence, le calcul des probabilités trouve sa justification dans l'étude des phénomènes mettant en jeu des populations ou des observations nombreuses (méthodes de sondage, théorie de l'estimation, tests...).

Les modes de convergence les plus utilisés en probabilité sont les suivants :

– la convergence en probabilité notée p,

– la convergence presque sûre notée $p.s.$,

– la convergence en loi notée Loi,

– la convergence en moyenne quadratique notée $m.q.$

7.2 Convergence en probabilité

La convergence en probabilité tire ses origines de la théorie mathématique des phénomènes aléatoires où l'on avait remarqué que la conver-

gence de la fréquence d'un événement lorsque l'on répète indéfiniment l'épreuve correspond à la probabilité de l'événement.
Soit (X_n) une suite de n variables aléatoires possédant une variance finie, définies sur un même espace probabilisé (Ω, A, P). Et soit X une variable aléatoire possédant une variance finie, définie sur le même espace (Ω, A, P).

Définition 1 *On dit que la suite (X_n) converge en probabilité vers X lorsque n tend vers l'infini, et on écrit $X_n \xrightarrow{P} X$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to \infty} P(\mid X_n - X \mid < \varepsilon) = 1.$$

7.3 Convergence en moyenne quadratique

Définition 2 *Une suite de variables aléatoires (Xn), converge en moyenne quadratique vers X, si et on écrit $X_n \xrightarrow{M.Q} X$, si*

$$\lim_{n \to \infty} E \mid X_n - X \mid^2 = 0.$$

Théorème 1 *La convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité.*

Preuve 9 *En vertu de l'inégalité de Tchebytchev, on a :*

$$P(\mid Y \mid \geq \varepsilon) \leq \frac{E \mid Y \mid^2}{\varepsilon^2}. \tag{7.1}$$

En remplacant Y par $X_n - X$ dans la relation (7.1), on aura :

$$P(\mid X_n - X \mid \geq \varepsilon) \leq \frac{E \mid X_n - X \mid^2}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P(\mid X_n - X \mid < \varepsilon) \geq 1 - \frac{E \mid X_n - X \mid^2}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\mid X_n - X \mid < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \underbrace{\lim_{n\to\infty} E \mid X_n - X \mid^2}_{=0}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\mid X_n - X \mid < \varepsilon) \geq 1. \tag{7.2}$$

D'autre part, on sait que la probabilité d'un événement est inférieure ou égale à 1, alors :

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\mid X_n - X \mid < \varepsilon) \leq 1. \tag{7.3}$$

Des relations (7.2) et (7.3), on a :

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\mid X_n - X \mid < \varepsilon) = 1. \tag{7.4}$$

7.4 Convergence presque sûre

Définition 3 *On dit que la suite (X_n) converge presque sûrement vers X lorsque n tend vers l'infini, et on écrit $X_n \xrightarrow{P.S} X$, si*

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1.$$

7.5 Convergence en loi

Il est parfois souhaitable dans un calcul de probabilités, de savoir s'il serait possible de remplacer la loi de X_n par une loi plus commode (d'usage connu). Bien que ce mode de convergence est le plus faible, il est le plus utilisé en pratique.

Définition 4 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, A, P). Et soit X une variable aléatoire* *définie sur ce même espace (Ω, A, P).* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* F *leurs fonctions de répartition. On dit que* X_n *converge en loi vers* X *et on note* $X_n \overset{loi}{\to} X$*, si*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x),$$

en tout point x *où* F *est continue.*

1. Si les variables X_n et X sont discrètes (prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$, alors, on dira que X_n converge en loi vers X, si pour tout entier naturel k :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

2. Si les variables X_n et X sont continues (prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$, alors, on dira que X_n converge en loi vers X, si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

7.6 Exemples classiques de convergence en loi

7.6.1 Convergence de la loi hypergéométrique vers la loi binomiale

Théorème 2 *Soit* X_n *une suite de variables aléatoires discrètes telle que pour tout* $n \in N$*,* X_n *suit une loi hypergéométrique* $\mathcal{H}(N, n, p)$ *où* n *et* p *sont fixés. Alors,* X_n *converge en loi vers une variable aléatoire* X *de loi binomiale de paramètres* n *et* p *(*$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$*).*

Preuve 10 *Considérons une urne contenant* N *boules parmi les quelles il y a une proportion* p *de boules blanches et une proportion* q *de boules noires. On tire* n *boules (*$n \leq N$*) sans remise. Soit* X_n *=' le nombre de boules blanches tirées parmi les* n *boules'. On a :*

$$X_n \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, n, p)$$

alors

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \frac{C_{Np}^k . C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n} \\
&= \frac{\dfrac{Np!}{k!(Np-k)!}\dfrac{Nq!}{(n-k)!(Nq-n+k)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}} \\
&= \frac{n!(N-n)!}{N(N-1)\dots(N-n+1)!} \times \frac{Np(Np-1)\dots(Np-k+1)(Np-k)!}{k!(Np-k)!} \\
&\times \frac{Nq(Nq-1)\dots(Nq-n+k+1)(Nq-n+k)!}{(n-k)!(Nq-n+k)!} \\
&= \frac{n!}{N(N-1)\dots(N-n+1)!} \times \frac{Np\dots(Np-k+1)}{k!} \times \frac{Nq\dots(Nq-n+k+1)}{(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{Np(Np-1)\dots(Np-k+1)Nq(Nq-1)\dots(Nq-n+k+1)}{N(N-1)\dots(N-n+1)}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

D'autre part, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} Np(Np-1)\dots(Np-k+1) \simeq (Np)^k$$

$$\lim_{N\to+\infty} Nq(Nq-1)\dots(Nq-n+k+1) \simeq (Nq)^{n-k}$$

et

$$\lim_{N\to+\infty} N(N-1)\dots(N-n+1) \simeq (N)^n$$

La relation (7.5) serait ainsi équivalente à :

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(Np)^k(Nq)^{n-k}}{N^n} \\
&= C_n^k \frac{N^k p^k N^{n-k} q^{n-k}}{N^n} \\
&= C_n^k p^k q^{n-k} \\
&= C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Remarque 7.1 *On admet dans la pratique cette approximation si* $N > 10n$*.*

7.6.2 Convergence de la loi binomiale vers la loi de poisson

Théorème 3 *Soit X_n une suite de variables aléatoires discrètes telle que pour tout $n \in N$, X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ où n et p_n sont fixés, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda \in \mathbb{R}^+$. Alors, X_n converge en loi vers une variable aléatoire X de loi de poisson de paramètres λ ($X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$)*

Preuve 11 *On a $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p_n)$, alors*

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\
\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to+\infty} (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to+\infty} e^{\log(1-p_n)^{n-k}} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to+\infty} e^{(n-k)\log(1-p_n)} \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

et comme $\log(1-p_n) \simeq -p_n$ au voisinage de l'infini, alors la relation (7.6) devient :

$$P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to+\infty} e^{-(n-k)p_n}$$
$$P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to+\infty} e^{-np_n} e^{kp_n}$$
$$P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \lim_{n\to+\infty} e^{kp_n}$$
$$P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Consquence 7.1 *Si n est assez grand et p assez petit, on peut dans un calcul de probabilités, remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda = np)$.*

Remarque 7.2 *On admet dans la pratique cette approximation si $n \geq 30$, $p \leq 0.1$ et $np \leq 15$*

7.7 Lois des grands nombres

Les lois des grands nombres est un ensemble de théorèmes affirmant la convergence des n premiers termes d'une d'une suite de variables aléatoires.
On parle de loi faible des grands nombres lorsque la convergence a lieu en probabilité et de loi forte des grands nombres quand la convergence a lieu presque sûrement.

7.7.1 Loi faible des grands nombres

Théorème 4 (de Tchebychev) *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi, de même espérance μ et même variance σ^2. Alors la suite :*

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, n = 1, 2, \ldots$$

converge en probabilité vers μ, c'est à dire :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\mu|<\varepsilon\right)=1.$$

Preuve 12

D'prés l'inégalité de Bienayemé Tchebychev :

$$\begin{aligned}
&P(|S_n-E(S_n)|\geq\varepsilon)\leq\frac{Var(S_n)}{\varepsilon^2}\\
\Rightarrow &P(|S_n-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\\
\Rightarrow &\lim_{n\to+\infty}P(|S_n-\mu|\geq\varepsilon)\leq\lim_{n\to+\infty}\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}=0\\
\Rightarrow &\lim_{n\to+\infty}P(|S_n-\mu|\geq\varepsilon)=0
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}P(|S_n-\mu|<\varepsilon)=1$$

Exemple 1 *La fréquence d'apparition d'un événement dans un grand nombre d'épreuves indépendantes converge vers la probabilité d'apparition de cet événement, lorsque le nombre d'épreuves tend vers l'infini.*
En effet, soit la variable aléatoire X_i définie par :

$$X_i=\begin{cases}1, & \textit{si l'evenement A apparait à la } i^{eme} \textit{ epreuve ;}\\ 0, & \textit{sinon.}\end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{n}X_i$ *représente ainsi le nombre d'apparitions de l'événement A au cours des n expériences et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ représente la moyenne ou la fréquence d'apparition de l'événement A. La variable aléatoire X_i suit une loi de bernoulli de paramètre p d'espérance mathématique $E(X_i)=p$ et de variance $var(X_i)=1-p$. D'après la loi faible des grands nombres, la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ converge en probabilité vers p.*

7.7.2 Loi forte des grands nombres

La loi forte des grands nombres stipule que la moyenne d'une suite de variables aléatoires identiquement distribuées tendra avec une probabilité certaine vers l'espérance de cette distribution commune.

Théorème 5 (de Kolmogorov) *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi, de même espérance μ et même variance σ^2. Alors la suite :*

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, n = 1, 2, \ldots$$

converge presque sûrement vers μ, c'est à dire :

$$P\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \mu\right) = 1$$

7.7.3 Théorème central limit

Le théorème central limit est l'un des résultat les plus remarquables en théorie des probabilités. Il établit que la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes suit une distribution approximativement normale.

Théorème 6 (Lendelberg-Levy) *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, de même espérance μ et même variance σ^2 finie, alors :*

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(0,1)}$$

Exemple 2 *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes tel que pour tout* n, X_n *suit une loi binomiale de paramètres* (n,p)*, alors :*

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(0,1)}$$

En effet, la variable X_n *peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires suivant une loi de bernoulli de paramètre* p*, c'est à dire :*

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, avec\ Y_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$$

On a :

$$E(Y_i) = pet\ var(Y_i) = 1-p, \forall i.$$

En vertu du théorème central limit, on a :

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(0,1)}$$

mais

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{np}{n}}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - np}{n}}{\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(0,1)}$$

Consquence 7.2 *Si* n *est* assez grand *on peut approcher la loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$ *par la loi normale* $\mathcal{N}_{(np,np(1-p))}$*. Dans la pratique, ceci étant possible si* $n \geq 20$ *et* p *voisin de* $\frac{1}{2}$*.*

Exemple 3 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes tel que pour tout n, X_n suit une loi de poisson de paramètres $(n\lambda)$, alors :*

$$\frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(0,1)}$$

En effet, la variable X_n peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires suivant une loi de poisson de paramètre λ, c'est à dire :

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, avec\ Y_i \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

En vertu du théorème central limit, on a :

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(0,1)}$$

mais

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{n\lambda}{n}}{\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\lambda}{n}}{\frac{\sqrt{n\lambda}}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} = \frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(0,1)}$$

Consquence 7.3 *Dans la pratique, on peut approcher une loi de poisson $P(\lambda)$ par une loi normale $\mathcal{N}_{(\lambda,\lambda)}$ si $\lambda > 10$.*

7.8 Exercices

Exercice 1 Selon une rumeur bien fondée sur le choix des étudiants de Mathématiques Informatique, 25% d'entre eux s'inscrivent en Mathématiques Appliquées après le Tronc commun. Si l'on interroge 100 étudiants pris au hasard, quelle est la probabilité pour qu'au moins 35

d'entre eux aient choisi les Mathématiques Appliquées ?
NB : $P(Z \leq 2.31) = 0.9896$, où $Z \rightsquigarrow N(0,1)$.

Réponse Notons Y_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par :

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si l'étudiant } i \text{ choisi les Mathématiques Appliquées, avec la probabilité } p \\ 0, & \text{sinon, avec la probabilité } p = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

La variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{100} Y_i$ qui représente le nombre d'étudiants ayant choisi les Mathématiques Appliquées, suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{4}$. D'après le théorème central limit, on a :

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi, la probabilité recherchée :

$$P(X > 35) = P\left(\frac{X-25}{\sqrt{100 \times \frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})}} > \frac{35-25}{\sqrt{100 \times \frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})}}\right) = P\left(\frac{X-25}{\sqrt{\frac{75}{4}}} > \frac{10}{\sqrt{\frac{75}{4}}}\right)$$
$$= P(X^* > 2.31) = 1 - P(X^* \leq 2.31) = 1 - 0.9896 = 0.0104.$$

Exercice 2 Le nombre d'inscriptions à un cours de probabilités est une variable aléatoire de Poisson d'espérance 100. L'enseignant de ce cours a décidé que, si le nombre d'étudiants présents dépasse 120, il créera deux sections et donnera donc deux cours, tandis qu'en deçà une seule section sera formée. Quelle est la probabilité que l'enseignant ait à donner deux fois le cours ?

Réponse On sait qu'une variable poissonienne de paramètre 100 peut être considérée comme la somme de 100 variables poissoniennes indépendantes de paramètre 1 chacune. Soit X le nombre d'inscriptions. En utilisant le théorème central limite, on aura :

$$\begin{aligned}
P(X \geq 120) &= P(\frac{X-100}{\sqrt{100}} \geq \frac{120-100}{\sqrt{100}}) \\
&= P(X^* \geq 2) \\
&= 1 - P(X^* \leq 2) \\
&= 1 - \Phi(2) = 0.02
\end{aligned}$$

Exercice 3 Une urne contient une 1 boule blanche et 99 boules noires. On tire n boules avec remise. Determiner n de telle sorte que la probabilité de tirer au moins une fois la boule blanche soit supérieure à 0.95.

Réponse Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. Sur n tirages, on a :

$$P(X=0) = (\frac{99}{100})^n \Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - (\frac{99}{100})^n.$$

$$P(X \geq 1) = 0.95 \Leftrightarrow 1 - (\frac{99}{100})^n = 0.95$$

d'où

$$0.99^n = 0.05 \Rightarrow n = \frac{\log 0.05}{\log 0.99} = 299.$$

Exercice 4 Une machine usine des pièces. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque pièce associe sa longueur x. On suppose que X suit une loi normale de moyenne $m = 54$ et d'écart type $\sigma = 0.2$. Une pièce est considérée comme défectueuse, si $x \leq 53.6$ ou $x \geq 54.3$.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
2. Pour verifier que la machine n'est pas déréglée, on détermine des cotes d'alerte $m-h$ et $m+h$ définies par $P(m-h \leq X \leq m+h) = 0.95$. Calculer les cotes d'alerte.

NB : $\phi(2) = 0.9772$, $\phi(1.5) = 0.9332$ et $\phi^{-1}(0.975) = 1.96$.

Réponse

1. Notons par D_i la i^{me} pièce est défectueuse. On a :

$$\begin{aligned} P(D_i) &= 1 - P(53.6 < X < 54.3) \\ &= 1 - P(\frac{53.6 - m}{\sigma} < \frac{X - m}{\sigma} < \frac{54.3 - m}{\sigma}) \\ &= 1 - P(-2 < X^* < 1.5), \quad \text{où } T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \\ &= 1 - [\phi(1.5) - \phi(-2)] \\ &= 2 - \phi(1.5) + \phi(2) = 0.0896 \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} & P(m - h \leq X \leq m + h) = 0.95 \\ \Rightarrow & P(\frac{-h}{\sigma} \leq \frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{h}{\sigma}) = 0.95 \\ \Rightarrow & \phi(\frac{h}{\sigma}) - \phi(\frac{-h}{\sigma}) = 0.95 \\ \Rightarrow & 2\phi(\frac{h}{\sigma}) - 1 = 0.95 \\ \Rightarrow & \phi(\frac{h}{\sigma}) = 0.975 \\ \Rightarrow & \phi^{-1}(0.975) = \frac{h}{\sigma} \\ \Rightarrow & h = 0.392 \end{aligned}$$

Exercice 5 On admet que la probabilité de défaut d'un objet fabriqué à la machine est 0,1. Trouver la probabilité qu'un lot de 10 objets comprenne au plus un élément affecté d'un défaut.

Réponse Notons par X la variable aléatoire qui donne le nombre d'éléments affectés d'un défaut parmi les 10 objets du lot. Alors $X \rightsquigarrow B(10, 0.1)$. La probabilité cherchée est

$$C_{10}^0 (0.1)^0 (0.9)^{10} + C_{10}^1 (0.1)^1 (0.9)^9 = 0.736100$$

alors que l'approximation donnée par la loi de Poisson mène à $e^{-1} + e^{-1} = 0,735800$, car $\lambda = 10 \times 0,1 = 1$.

Exercice 6 On lance 10 dés équilibrés. Quelle est la probabilité que la somme des dix résultats soit comprise entre 30 et 40 ?

Réponse Soit X_i la variable aléatoire representant le résultat du i^{eme} dé. On a :

$$\text{val}(X_i) = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad \mathbb{E}(X_i) = \frac{7}{2}, \quad \mathbb{V}ar(X_i) = \frac{35}{12}.$$

On obtient d'après le TCL :

$$\begin{aligned} P(30 \leq \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 40) &= P(\frac{30-35}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 35}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \leq \frac{40-35}{\sqrt{\frac{350}{12}}}) \\ &= P(-\sqrt{\frac{6}{7}} \leq X^* \leq \sqrt{\frac{6}{7}}), \quad \text{où } X^* \rightsquigarrow N(0,1) \\ &= 2\Phi(\sqrt{\frac{6}{7}}) - 1 = 0.65 \end{aligned}$$

Exercice 7 On sait par expérience qu'une certaine opération chirurgicale a 90% de chances de réussir. Cette opération est réalisée dans une clinique 400 fois chaque année. Soit N le nombre de réussites dans une année. On utilisera l'approximation normale pour N.

1. Calculer l'espérance et la variance de N.
2. Calculer la probabilité que la clinique réussisse au moins 345 opérations dans l'année.
3. Calculer la probabilité que la clinique rate plus de 28 opérations dans l'année.
4. L'assurance accepte de couvrir un certain nombre n d'opérations ratées qui n'a que 1% de chances d'être dépassé. Determiner le nombre n ? en raisonnant sur le nombre d'opérations réussies, puis sur le nombre d'opérations ratées R.

NB :

$$P(X \leq \alpha) = 0.01 \Rightarrow \alpha = -2.3263$$

$$P(X \leq \alpha) = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.8389$$

$$P(X \leq 2.5) = 0.9938$$
$$P(X \leq 2) = 0.9772$$

Réponse Considérons la variable aléatoire

$$X^i = \begin{cases} 1, & \text{si l'opération est reussie ;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note la variable aléatoire $N = \sum_{i=1}^{400} X^i$.

1.

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{400} X^i = 400 \times 0.90 = 360.$$
$$\mathbb{V}ar(N) = \mathbb{V}ar\sum_{i=1}^{400} X^i = 400 \times 0.90 \times (1-0.9) = 36$$

La variable N suit une loi normale de paramètres $\mu = 360$ et $\sigma^2 = 36$.

2.

$$P(N \geq 345) = P(\frac{N-360}{6} \geq \frac{345-360}{6}) = P(N^* \geq -\frac{5}{2}) = P(N^* \leq \frac{5}{2}) = 0.9938$$

3.

$$P(N \leq 400-28) = P(N \leq 372) = P(\frac{N-360}{6} \leq \frac{372-360}{6}) = P(N^* \leq 2) = 0.9772.$$

4. a) En raisonnant sur le nombre d'opérations réussies

$$\begin{aligned} & P(400-N \geq n) = 0.01 \\ \Rightarrow & P(N \leq 400-n) = 0.01 \\ \Rightarrow & P(\frac{N-360}{6} \leq \frac{400-n-360}{6}) = 0.01 \\ \Rightarrow & P(N^* \leq \frac{40-n}{6}) = 0.01 \\ \Rightarrow & \frac{40-n}{6} = -2.3263 \end{aligned}$$

d'où $n \simeq 54$.

b) En raisonnant sur le nombre d'opérations ratées $R = 400 - N$. La variable $R \rightsquigarrow B(400, 0.1)$, que l'on peut approximer par une loi $\mathcal{N}(40, 36)$. Le nombre recherché est :

$$\begin{aligned}
&P(R \geq n) = 0.01 \\
\Rightarrow &P(\frac{R-40}{6} \geq \frac{n-40}{6}) = 0.01 \\
\Rightarrow &P(R^* \geq \frac{n-40}{6}) = P(R^* \leq \frac{40-n}{6}) = 0.01
\end{aligned}$$

d'où $n \simeq 54$.

Exercice 8 On lance 10 dés équilibrés. Quelle est la probabilité que la somme des dix résultats soit comprise entre 30 et 40 ?

Réponse Soit X_i la variable aléatoire representant le résultat du i^{eme} dé. On a :

$$\text{val}(X_i) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \mathbb{E}(X_i) = \frac{7}{2}, \quad \mathbb{V}ar(X_i) = \frac{35}{12}.$$

On obtient d'après le TCL :

$$\begin{aligned}
P(30 \leq \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 40) &= P(\frac{30-35}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 35}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \leq \frac{40-35}{\sqrt{\frac{350}{12}}}) \\
&= P(-\sqrt{\frac{6}{7}} \leq X^* \leq \sqrt{\frac{6}{7}}), \quad \text{où } X^* \rightsquigarrow N(0,1) \\
&= 2\Phi(\sqrt{\frac{6}{7}}) - 1 = 0.65
\end{aligned}$$

Exercice 9 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes définies par :

$$P(X_n = 1) = 1 - p^n \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = p^n.$$

Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer l'espérance de S_n et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n)$.
2. Montrer que S_n converge en probabilité vers 1.

Réponse

1. On a :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - p^i - p^i = 1 - \frac{2p(1-p^n)}{n(1-p)}$$

   D'où

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_n) = 1$$

2. On a :

$$\mathbb{V}ar(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(4p^i - 4p^{2i}) = \frac{4p(1-p^n)}{n^2}$$

   D'après l'inégalité de Tchybetchev, on a :

$$P(|S_n - 1| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}ar(S_n)}{\varepsilon^2}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|S_n - 1| > \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{V}ar(S_n)}{\varepsilon^2} = 0$$

Exercice 10 Soit X_n, $n \geq 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta, \quad \theta > 0\,; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

1. Donner la fonction de densité de la variable aléatoire $Y_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i$.
2. Montrer que Y_n converge en probabilité et en moyenne quadratique vers θ.
3. Vers quelle loi converge $Z_n = n(Y_n - \theta)$?

Réponse

1. Soit $F_{Y_n}(y)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. On a :

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = 1 - (1 - F_X(y))^n.$$

La fonction de répartition de X est :

$$\begin{aligned} F_X(y) &= \int_\theta^x f_X(y)dy \\ &= \int_\theta^x e^{-(y-\theta)}dy \\ &= 1-e^{-(y-\theta)} \end{aligned}$$

D'où

$$F_{Y_n}(y) = 1-(1-(1-e^{-(y-\theta)})^n = 1-e^{-n(y-\theta)}, \quad y \geq \theta, \quad \theta > 0.$$

La fonction de densité de la variable aléatoire Y_n est alors :

$$f_{Y_n}(y) = ne^{-n(y-\theta)}, \quad y \geq \theta, \quad \theta > 0.$$

2. On a :

$$\begin{aligned} P(|Y_n-\theta| < \varepsilon) &= P(-\varepsilon < Y_n - \theta < \varepsilon) \\ &= P(\theta-\varepsilon < Y_n < \varepsilon+\theta) \\ &= F_{Y_n}(\varepsilon+\theta) - F_{Y_n}(\theta-\varepsilon) \\ &= F_{Y_n}(\varepsilon+\theta) \\ &= 1-e^{-n(\theta+\varepsilon-\theta)} \\ &= 1-e^{-n\varepsilon} \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n-\theta| < \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} 1-e^{-n\varepsilon} = 1.$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}|Y_n-\theta|^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_\theta^{+\infty} n(y-\theta)^2 e^{-n(y-\theta)}dy.$$

En posant $z = y-\theta$, on aura :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}|Y_n-\theta|^2 = \mathbb{E}|Y_n-\theta|^2 \int_0^{+\infty} nz^2 e^{-nz}dz.$$

En posant $t = nz$, on aura :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}|Y_n-\theta|^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\Gamma(3) = 0$$

3. La fonction de répartition de la variable aléatoire Z_n est :

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= P(Z_n \leq z) \\ &= P(n(Y_n - \theta) \leq z) \\ &= P(Y_n \leq \frac{z+n\theta}{n}) \\ &= F_{Y_n}(\frac{z+n\theta}{n}) \\ &= 1 - e^{-z}, \quad z \geq 0, \quad \theta > 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

D'où

$$g_{Z_n}(z) = e^{-z}, \quad z \geq 0, \quad \theta > 0.$$

Par conséquent, la loi de Z_n est indépendante de n.

CHAPITRE

8

Fonctions Génératrice et caractéristique

8.1 Introduction

L'intérêt principal de la fonction génératrice est d'obtenir par un procédé simple et systématique les moments d'ordre quelconque de la variable aléatoire sans avoir recours au calcul intégral. Il est effectivement plus facile d'obtenir les dérivées successives d'une unique fonction associée à la variable aléatoire, appelée fonction génératrice de la variable aléatoire.

8.2 Fonction génératrice des moments

Définition 1 *Soit* (Ω, A, P) *un espace probabilisé et soit* X *une variable aléatoire définie sur* Ω*. La fonction*

$$\begin{aligned} \varphi_X : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) \end{aligned}$$

est appelée fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X*.*

La fonction φ_X est appelée fonction génératrice des moments du fait que tous les moments d'ordre k de X peuvent être calculés en dérivant k fois φ_X puis en évaluant la dérivée au point $t=0$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_X'(t) &= \frac{d}{dt}\mathbb{E}(e^{tX})\\ &= \mathbb{E}(\frac{d}{dt}\left(e^{tX}\right))\\ &= \mathbb{E}(Xe^{tX}).\end{aligned}$$

En évaluant φ' au point $t=0$, on obtient le moment d'ordre 1 de X :

$$\varphi'(0) = \mathbb{E}(X), \tag{8.1}$$

qui est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et de manière analogue, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_X''(t) &= \frac{d}{dt}(\varphi_X'(t))\\ &= \frac{d}{dt}\mathbb{E}(Xe^{tX})\\ &= \mathbb{E}(\frac{d}{dt}(Xe^{tX}))\\ &= \mathbb{E}(X^2e^{tX}).\end{aligned}$$

En évaluant φ_X'' au point $t=0$, on obtient le moment d'ordre 2 de X :

$$\varphi''(0) = \mathbb{E}(X^2) \tag{8.2}$$

Remarque 8.1 *Soit X une variable aléatoire. Si la fonction génératrice des moments φ_X existe et le moment $E(X^k)$ existe, alors :*

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{d^{(k)}}{dt^k}\varphi_X(t)]_{t=0}.$$

8.2.1 Fonction génératrice des moments d'une v. a. discrète

Si la variable aléatoire X prends ses valeurs x_j avec les probabilités $p_j, j\in J$, alors :

$$\varphi_X(t) = \sum_{j\in J} p_j e^{tx_j}.$$

Exemple 1 *Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a :*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k\in\{0,1\}} e^{tk}P(X=k) = e^{t.0}(1-p) + e^{t.1}p = (1-p) + pe^t$$

d'où :

$$\varphi'_X(t) = pe^t \Rightarrow \varphi'_X(0) = \mathbb{E}(X) = p$$

et

$$\varphi''_X(t) = pe^t \Rightarrow \varphi''_X(0) = \mathbb{E}(X^2) = p$$

par conséquent :

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Exemple 2 *Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Déterminer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X et déduire son espérance et sa variance.*

Réponse *On a :*

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} e^{tk} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^t)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (pe^t + 1 - p)^n\end{aligned}$$

d'où

$$\varphi'_X(t) = n(pe^t + 1 - p)^{n-1} pe^t$$

Au point $t=0$, on aura d'après la relation (8.10

Au point $t=0$, on aura d'après la relation (8.2) :

$$\mathbb{E}(X^2) = \varphi_X''(0) = n(n-1)p^2 + np$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).\end{aligned}$$

8.2.2 Fonction génératrice des moments d'une v. a. continue

Si la variable aléatoire X est continue de densité f, alors :

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tX} f(x)dx$$

Exemple 3 *Trouver la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.*

Réponse *La densité de la variable aléatoire X d'écrit :*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tx}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x}dx \\ &= \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x}]_0^{\infty}\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $\varphi_X(t)$ n'existe que si $t < \lambda$. On obtient alors :

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, t \in]-\infty, \lambda[,$$

d'où

$$\varphi'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$

Au point $t = 0$, on aura :

$$\mathbb{E}(X) = \varphi'_X(0) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Le moment d'ordre 2 est donné par :

$$\varphi''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

Au point $t = 0$, on aura :

$$\varphi''_X(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ainsi, la variance vaut :

$$\mathbb{V}ar(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 1 *La fonction génératrice des moments d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale au produit des fonctions génératrices des moments individuels de ces variables.*

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t). \tag{8.3}$$

En effet, Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y de fonctions génératrices des moments respectives $\varphi_X(t)$ et $\varphi_Y(t)$. La fonction génératrice des moments de $X+Y$ est :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(e^{X+Y}) = \mathbb{E}(e^X)\mathbb{E}(e^Y) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

8.3 Fonction Génératrice d'une v. a. discrète positive

Définition 2 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la série entière suivante :*

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k), \quad -1 \leq t \leq 1$$

avec $G_X(1) = 1$.

La série $\sum_{k=0}^{\infty} t^k P(x = k)$ converge pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $|t| \leq 1$, car

$$\sum_{k=0}^{\infty} |t^k P(X = k)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$$

8.3.1 Moment Factoriel

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre $k \geq 1$. Alors, la fonction génératrice G_X est au moins k fois dérivable en 1. Dans ce cas, on aura :

$$G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1))$$

appelé moment factoriel d'ordre k.

Théorème 2 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans N. Alors :*

1. *X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1. Dans ce cas,*
$$G'_X(1) = \mathbb{E}(X);$$
2. *X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas,*
$$\mathbb{V}ar(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

Exemple 4 *Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi Binomiale de paramètres n et p.*

Réponse *On a :*

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (tp)^k (1-p)^{n-k} = (tp+1-p)^n$$

La première dérivée est :

$$G'_X(t) = np(tp+1-p)^{n-1}$$

Au point $t=1$, on aura :

$$G'_X(1) = np$$

La deuxième dérivée est :

$$G''_X(t) = n(n-1)p^2(tp+1-p)^{n-2}$$

Au point $t=1$, on aura :

$$G'_X(1) = n(n-1)p^2$$

d'où

$$\mathbb{V}ar(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

Théorème 3 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans N. La fonction G_X caractérise la loi suivie par la variable aléatoire X :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = \frac{d^{(k)}}{dt^k}\left(\frac{G_X(0)}{k!}\right).$$

La donnée de G_X permet d'obtenir $P(X=k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et on connaît ainsi la loi de X. Cette propriété très importante des fonctions génératrices est que leur donnée détermine de manière univoque la distribution des variables auxquelles elles correspondent.

Exemple 5 *Considérons la variable aléatoire X dont la fonction génératrice est donnée par :*

$$G_X(t) = (\frac{1}{2})^{10}(e^t + 1)^{10}.$$

Quelle est la loi de X ?
On a :

$$G_X(t) = (\frac{1}{2})(e^t + 1)^{10} = (\frac{1}{2}(e^t + 1))^{10} = (\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2})^{10} = (\frac{1}{2}e^t + 1 - \frac{1}{2})^{10},$$

que l'on retrouve sous la forme :

$$G_X(t) = (pe^t + 1 - p)^k \quad (\textit{voir l'exemple } 4)$$

où $p = \frac{1}{2}$ et $k = 10$. Par conséquent, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

8.3.2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Théorème 4 *Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors*

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Exemple 6 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, quelle est la loi de $X+Y$?*

On a :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_1} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} = e^{t\lambda_1}.$$

De manière analogue, on retrouve :

$$G_Y(t) = \mathbb{E}(t^Y) = e^{t\lambda_2}.$$

La fonction génératrice de leurs somme est :

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = e^{t\lambda_1}e^{t\lambda_2} = e^{t(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Par conséquent, la variable aléatoire $X+Y$ est aussi une variable poissonnienne de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

8.4 Fonction caractéristique

Tout comme les fonctions génératrices utilisées dans le calcul des moments d'une variable aléatoire, les fonctions caractéristiques représentent un outil extrêmement pratique pour étudier leurs comportement (somme, indépendance, limite,... etc).

Définition 3 *Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω. La fonction*

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\cos tX + i \sin tX), \end{aligned}$$

est appelée fonction caractéristique de la variable aléatoire X.

8.4.1 Fonction caractéristique d'une variable discrète

Si la variable aléatoire X prends ses valeurs x_j, avec les probabilités p_j, $j \in J$, alors :

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{j \in J} e^{itX_j} P(X = x_j).$$

Propriété 8.1 *La fonction caractéristique ϕ_X est bornée.*

$$\phi_X(t) = |\sum_{j\in J} e^{itX_j} P(X = x_j)| \leq \sum_{j\in J} P(X = x_j)|e^{itX_j}| \leq 1.$$

Propriété 8.2 *La fonction caractéristique ϕ_X ne s'annule pas au voisinage de 0.*

$$\phi_X(t) = \sum_{j\in J} e^{i0X_j} P(X = x_j) = \sum_{j\in J} P(X = x_j) = 1.$$

Exemple 7 *Déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.*
On a :

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{avec une probabilité } p\,; \\ 0, & \textit{avec une probabilité } 1-p. \end{cases}$$

Dans ce cas, la fonction caractéristique est donnée par :

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{2} e^{itk} P(X = k) = e^{it1} p + e^{it0}(1-p) = e^{it} p + (1-p).$$

Exemple 8 *Déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.*
On a :

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Propriété 8.3 *Si $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$, pour un $n \in \mathbb{N}$, alors la dérivée d'ordre n de ϕ_X existe et*

$$\frac{d^k}{dt^k} \phi_X(t)]_{t=0} = i^k \mathbb{E}(X^k), \quad k \leq n.$$

Exemple 9 *Calculer l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.*
On a :

$$\phi_X(t) = e^{it} p + (1-p) \Rightarrow \phi_X'(t) = ipe^{it}.$$

d'où

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\phi_X'(0)}{i} = \frac{ip}{i} = p.$$

On a :

$$\phi_X''(t) = -pe^{it}.$$

Le moment d'ordre 2 est :

$$\mathbb{E}(X^2) = \phi_X''(0) = p.$$

Ainsi, la variance est :

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p(1-p).$$

Remarque 8.2 *Soit X une variable aléatoire. Si $\mathbb{E}(X^k) < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors*

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}(X^k),$$

c'est-à-dire la fonction caractéristique ϕ_X est entièrement déterminée par la suite $\{\mathbb{E}(X^k); k \in \mathbb{N}\}$ et $\mathbb{E}(X^0) = 1$.

Proprité 8.4 *Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors :*

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

En effet, on a :

$$\phi_{X+Y}(t) = e^{it(X+Y)} = e^{it(X)} e^{it(Y)} = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

Exemple 10 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, quelle est la*

loi de $X+Y$?
On a :

$$\phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(it^{X+Y}) = \mathbb{E}(^{it(X+Y)}) = \mathbb{E}(^{itX})\mathbb{E}(^{itY}) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

D'après l'exemple (8), la fonction caractéristique de X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ_1 est :

$$\phi_X(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)},$$

d'où

$$\phi_{X+Y}(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}e^{\lambda_2(e^{it}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}.$$

Par conséquent, la variable aléatoire $X+Y$ est aussi une variable poissonnienne de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

8.4.2 Fonction caractéristique d'une variable continue

Si la variable aléatoire X est continue de densité f, alors :

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx.$$

Remarque 8.3 *Les propriétés sur la fonction caractéristique étudiée dans le cas discret restent valables dans le cas continu.*

Exemple 11 *Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire X qui suit une loi normale centrée et réduite.*

On a :

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2-2itx}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dx \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx.
\end{aligned}$$

En posant $y = x - it$, on aura :

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= e^{-\frac{t^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{=\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Exemple 12 *Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire Z qui suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2.*
Notons que $Z = \sigma X + \mu$, où X est variable normale centrée et réduite. La fonction caractéristique de Z est alors déterminée comme suit :

$$\begin{aligned}
\phi_Z(t) &= \mathbb{E}(e^{it(\sigma X+\mu)}) \\
&= \mathbb{E}(e^{it\mu})\mathbb{E}(e^{it\sigma X}) \\
&= e^{it\mu}\phi_X(t\sigma) \\
&= e^{it\mu} e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2}} \\
&= e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2} + it\mu}.
\end{aligned}$$

Pour calculer l'espérance de Z, on a :

$$\phi'_Z(t) = (-\sigma^2 t + i\mu) e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2} + it\mu} \Rightarrow \phi'_Z(0) = i\mu,$$

d'où

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\phi_Z'(0)}{i} = \mu.$$

Le moment d'ordre 2 de Z est :

$$\phi_Z''(t) = (-\sigma^2 t + i\mu)^2 e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2} + it\mu} - \sigma^2 e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2} + it\mu} \Rightarrow \phi_Z''(0) = -\mu^2 - \sigma^2.$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbb{E}(Z^2) = \frac{\phi_Z''(0)}{i^2} = \mu^2 + \sigma^2.$$

Par conséquent, on a :

$$\mathbb{V}ar(Z) = \sigma^2.$$

8.5 Exercices

Exercice 1 Une urne contient 4 boules portant respectivement les numéros 0, 1, 1, et 2. On y effectue n tirages avec remise et l'on note S la somme des points obtenue. Determiner la fonction génératrice de S et en déduire sa loi.

Réponse Soit Y_i la variable aléatoire qui représente le numéro tiré au i^{eme} tirage. On a :

$$Val(Y_i) = \{0, 1, 2\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

et

$$P(Y_i = 0) = \frac{1}{4}$$
$$P(Y_i = 1) = \frac{2}{4}$$
$$P(Y_i = 2) = \frac{1}{4}$$

La fonction génératrice de Y_i est donnée par :

$$\begin{aligned} G_{Y_i}(t) = \mathbb{E}(t^{Y_i}) &= \sum_{k=0}^{2} t^k P(Y_i = k) \\ &= t^0 \frac{1}{4} + t^1 \frac{2}{4} + t^2 \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Soit $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ représentant la somme des points obtenue. Les variables aléatoires Y_1, Y_2,...,Y_n étant indépendantes et de même loi, on a :

$$\begin{aligned} G_S(t) &= G_{Y_1}(t) \times G_{Y_2}(t) \times \ldots \times G_{Y_n}(t) \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1+t}{2}\right)^2 \times \ldots \times \left(\frac{1+t}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{2n} \end{aligned}$$

Pour determiner la loi de S, on réécrit sa fonction génératrice sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right)^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{2n}^k (\frac{1}{2}t)^k (\frac{1}{2})^{2n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{2n}^k (\frac{1}{2})^k t^k (\frac{1}{2})^{2n} (\frac{1}{2})^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k C_{2n}^k (\frac{1}{2})^{2n} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Par définition on a :

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(S = k) \tag{8.5}$$

Par identification des relations (8.12) et (8.13), on a :

$$P(S = k) = C_{2n}^k (\frac{1}{2})^{2n} = C_{2n}^k (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{2n-k}$$

Par conséquent, $S \rightsquigarrow B(2n, \frac{1}{2})$.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [0,1].

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = a + (b-a)X$.
2. Déterminer la fonction génératrice des moments de Y.
3. Déduire l'espérance et la variance de Y.

Réponse

1. Soient $F_X(x)$ et $G_Y(y)$ les fonctions de répartition respectivement des variables aléatoires X et Y.
   – Si $y \in [a,b]$, alors :

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(a + (b-a)X \leq y) \\ &= P(X \leq \frac{y-a}{b-a}) \\ &= F_X(\frac{y-a}{b-a}) \\ &= \frac{y-a}{b-a}, \quad y \in [a,b]. \end{aligned} \tag{8.6}$$

   – Si $y < a$, alors $F_X(\dfrac{y-a}{b-a}) = F_Y(y) = 0$
   – Si $y > b$, alors $F_X(\dfrac{y-a}{b-a}) = F_Y(y) = 1$
   Ainsi, la fonction de répartition de la v.a. Y s'écrit :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < a\,; \\ \dfrac{y-a}{b-a}, & a \leq y < b\,; \\ 1, & y \geq b. \end{cases}$$

   Par conséquent, Y suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$.

2.

$$
\begin{aligned}
\phi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) &= \int_a^b e^{ty} f_Y(y)dy, \\
&= \int_a^b e^{ty}\frac{1}{b-a}dy \\
&= \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} \qquad (8.7)
\end{aligned}
$$

3. En développant en série les fonctions e^{tb} et e^{ta} de la relation (8.7), on obtient :

$$\phi_Y(t) = \frac{1}{t(b-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(tb)^k}{k!}-\frac{(ta)^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{k!}\frac{b^k-a^k}{b-a}$$

En posant $n = k-1$, on aura :

$$\phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)(b-a)} \qquad (8.8)$$

Mais comme on a par définition :

$$\phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathbb{E}(Y^n) \qquad (8.9)$$

alors par identification des relations (8.8) et (8.9), on trouve :

$$\mathbb{E}(Y^n) = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}$$

Par conséquent, on a en particulier :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Y^2) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{b^2+2ab+a^2}{4} - \frac{b^2+ab+a^2}{3} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire dont la fonction génératrice des moments est :

$$\phi_X(t) = \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{2t}, \tag{8.10}$$

Calculer $P(|X| \leq 1)$.

Réponse En comparant la formule (8.10) avec la formule générale d'une fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire discrète X, qui prend ses valeurs x_j avec les probabilités p_j, $j \in J$ donnée par :

$$\phi_X(t) = \sum_{j \in J} e^{tx_j} p_j$$

nous déduisons que la variable aléatoire X prend les valeurs $\{-2, -1, 1, 2\}$, avec les probabilités respectives $P(X = -2) = \frac{1}{6}$, $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 1) = \frac{1}{4}$ et $P(X = 2) = \frac{1}{4}$. Ainsi :

$$P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Exercice 4 Soient $\theta \in]0,1[$ et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$P(X = k) = -\frac{\theta^k}{k \ln(1-\theta)}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

1. Calculer la fonction génératrice de X. On utilisera la formule

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x), \quad x \in]-1,1[.$$

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X-1))$ et $\mathbb{V}ar(X)$

Réponse

1. La fonction génératrice de la variable aléatoire X s'écrit :

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \mathbb{E}(t^X) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} t^k \left(-\frac{\theta^k}{k \ln(1-\theta)} \right) \\ &= -\frac{1}{\ln(1-\theta)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t\theta)^k}{k} \\ &= -\frac{1}{\ln(1-\theta)} (-\ln(1-t\theta)) \\ &= \frac{\ln(1-t\theta)}{\ln(1-\theta)}. \end{aligned} \tag{8.11}$$

2. La première dérivée est :

$$G'_X(t) = \frac{-\theta}{\ln(1-\theta)(1-t\theta)}$$

Au point $t = 1$, on aura :

$$G'_X(1) = \frac{-\theta}{\ln(1-\theta)(1-\theta)}$$

La deuxième dérivée est :

$$G''_X(t) = \frac{-\theta^2}{\ln(1-\theta)(1-t\theta)^2}$$

Au point $t = 1$, on aura :

$$G''_X(1) = \frac{-\theta^2}{\ln(1-\theta)(1-\theta)^2}$$

d'où

$$\mathbb{V}ar(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \frac{-\theta(\ln(1-\theta)+\theta)}{(\ln(1-\theta))^2(1-\theta)^2}$$

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire X.
2. Déduire le moment d'ordre k de la variable X.

Réponse

1. La fonction caractéristique de la variable aléatoire X s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) \\ &= \int_0^{\infty} e^{itx}e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{it-1}e^{x(it-1)}|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{1-it}\end{aligned}$$

2. La fonction caractéristique de la variable X peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \frac{1}{1-it} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(it)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\frac{(it)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n)\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}(X^n) = n!, \quad n \geq 1.$$

Exercice 6 Une urne contient 9 boules portant respectivement les numéros 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2. On y effectue n tirages avec remise et l'on note S la somme des points obtenue.

1. Determiner la fonction génératrice de S.
2. Déduire la loi de S.
3. Pour $n = 3$, calculer $P(S = 3)$.

Réponse

1. Soit Y_i la variable aléatoire qui représente le numéro tiré au i^{eme} tirage. On a :

$$Val(Y_i) = \{0,1,2\}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

et

$$P(Y_i = 0) = \frac{1}{9}$$

$$P(Y_i = 1) = \frac{4}{9}$$

$$P(Y_i = 2) = \frac{4}{9}$$

La fonction génératrice de Y_i est donnée par :

$$\begin{aligned} G_{Y_i}(t) = \mathbb{E}(t^{Y_i}) &= \sum_{k=0}^{2} t^k P(Y_i = k) \\ &= t^0 \frac{1}{9} + t^1 \frac{4}{9} + t^2 \frac{4}{9} \\ &= \left(\frac{1+2t}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Soit $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ représentant la somme des points obtenue. Les variables aléatoires Y_1, Y_2,...,Y_n étant indépendantes et de même loi, on a :

$$\begin{aligned} G_S(t) &= G_{Y_1}(t) \times G_{Y_2}(t) \times \ldots \times G_{Y_n}(t) \\ &= \left(\frac{1+2t}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1+2t}{3}\right)^2 \times \ldots \times \left(\frac{1+2t}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1+2t}{3}\right)^{2n} \end{aligned}$$

2. Pour determiner la loi de S, on réécrit sa fonction génératrice sous

la forme suivante :

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t\right)^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{2n}^{k}(\frac{2}{3}t)^{k}(\frac{1}{3})^{2n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^{k} C_{2n}^{k}(\frac{2}{3})^{k}(1-\frac{2}{3})^{2n-k} \end{aligned} \tag{8.12}$$

Par définition on a :

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{k} P(S=k) \tag{8.13}$$

Par identification des relations (8.12) et (8.13), on a :

$$P(S=k) = C_{2n}^{k}(\frac{2}{3})^{k}(1-\frac{2}{3})^{2n-k}$$

Par conséquent, $S \rightsquigarrow B(2n, \frac{2}{3})$.

3. Pour $n=3$, on aura :

$$P(S=3) = C_6^3(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^3 = \frac{160}{729} = 0.219$$

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $k \in \mathbb{N}$, avec les probabilités :

$$P(X=k) = \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Réponse

1. La fonction génératrice de la variable aléatoire X s'écrit :

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \mathbb{E}(t^X) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{2}{2-t} \end{aligned}$$

2. La première dérivée est :

$$G'_X(t) = \frac{2}{(2-t)^2}$$

Au point $t = 1$, on aura :

$$G'_X(1) = 2$$

La deuxième dérivée est :

$$G''_X(t) = \frac{4}{(2-t)^3}$$

Au point $t = 1$, on aura :

$$G''_X(1) = 4$$

d'où

$$\mathbb{V}ar(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = 2$$

Exercice 8 On repère le jet d'une pièce de monnaie susceptible de tomber sur pile avec une probabilité p. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de jets nécessaires pour obtenir pour la première fois pile.

1. Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire X.
2. Calculer son espérance et sa variance.

Réponse

1. On a $Val(X) = \{1, 2, \ldots\}$ et $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. La fonction géné-

ratrice de la variable aléatoire X s'écrit :

$$\begin{aligned}
G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) &= \sum_{k=1}^{\infty} t^k P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} t^k p(1-p)^{k-1} \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (t(1-p))^k \\
&= \frac{pt(1-p)}{1-p} \sum_{k=0}^{\infty} (t(1-p))^k \\
&= \frac{pt(1-p)}{1-p} \frac{1}{1-t+tp} \\
&= \frac{pt}{1-t+pt}
\end{aligned}$$

2. L'espérance est obtenue par la première dérivée de $G_X(.)$ au point $t=1$. On a :

$$G_X^{'}(t) = \frac{p}{(1-t+pt)^2},$$

d'où

$$\mathbb{E}(X) = G_X^{'}(1) = \frac{1}{p}.$$

On obtient la variance par la formule :

$$\mathbb{V}ar(X) = G_X^{''}(1) + G_X^{'}(1) - (G_X^{'}(1))^2.$$

On a :

$$G_X^{''}(t) = \frac{2p(1-p)}{(1-t+pt)^3},$$

et

$$G_X^{''}(1) = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

d'où :

$$\mathbb{V}ar(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exercice 9 Soit X une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[-1,1]$.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = |X|$.
2. Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Réponse

1. La fonction de répartition $F_X(x)$ de la variable aléatoire X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \dfrac{x+1}{2}, & -1 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Soit $G_Y(y)$ la fonction de répartition de la v.a $Y = |X|$.
– Si $0 \leq y \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} G_Y(y) = (Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y), \\ = \frac{y+1}{2} - \frac{-y+1}{2} = y. \end{aligned} \tag{8.14}$$

– Si $y < 0$, alors

$$G_Y(y) = P(Y \leq y) = 0 \tag{8.15}$$

– Si $y \geq 1$, alors

$$G_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 \tag{8.16}$$

De (8.14), (8.15) et (8.16), on a :

$$G_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ y, & 0 \leq y < 1; \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

Par conséquent, Y suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

2.

$$\phi_Y(t) = \begin{cases} \mathbb{E}(e^{ty}) = \int_0^1 e^{ty} dy = \dfrac{e^t}{t} - \dfrac{1}{t}, & t \neq 0\,; \\ 1, & \text{t=0.} \end{cases}$$

En développant en série l'expression e^{ty}, on aura :

$$\phi_Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{t.k!} - \frac{1}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{t.k!}.$$

On pose $k = n+1$:

$$\phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{t.(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{1}{n+1} \tag{8.17}$$

Mais par définition, on a :

$$\phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}(Y^n) \tag{8.18}$$

De 8.17) et (8.18), on obtient :

$$\mathbb{E}(Y^n) = \frac{1}{n+1}$$

3. En particulier, on a : $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Exercice 10 Soit X une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[0,1]$.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = -\ln X$.
2. Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Réponse

1. Soit $H_Y(y)$ la fonction de répartition de la v.a $Y = -\ln X$. On a :
   – Si $y \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} H_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln X \leq y), \\ = P(\ln \frac{1}{X} \leq y) \\ = P(X \geq e^{-y}) \\ = 1 - P(X \leq e^{-y}) = 1 - e^{-y}, \end{aligned} \tag{8.19}$$

– Si $y < 0$, alors

$$H_Y(y) = P(-\ln X \leq y) = 0, \quad (\text{puisque } -\ln X \geq 0), \tag{8.20}$$

De (8.19) et (8.20), on aura :

$$H_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y \geq 0\,; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Par conséquent, la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.

2. La fonction de densité de la variable aléatoire Y est donnée par :

$$h_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0\,; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

La fonction génératrice de Y s'écrit : On a :

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) = \int_0^{\infty} e^{ty} h(y)dy = \int_0^{\infty} e^{ty} e^{-y} dy = \int_0^{\infty} e^{(t-1)y} dy = \left. \frac{1}{t-1} e^{(t-1)y} \right]_0^{\infty} \tag{8.21}$$

Ainsi, la fonction $\varphi_Y(t)$ n'existe que si $t < 1$. On obtient alors :

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in]-\infty, 1[$$

3. On a :

$$\varphi'_Y(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Au point $t = 0$, on a :

$$\mathbb{E}(Y) = \varphi'_Y(0) = 1.$$

$$\varphi''_Y(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$$

Au point $t = 0$, on a :

$$\varphi''_Y(0) = 2.$$

Ainsi, la variance est :

$$\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 1.$$

CHAPITRE

9

Couples de Variables Aléatoires

9.1 Introduction

Considérons deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilité (Ω, A, P). Une variable aléatoire génère un ensemble fini de nombres réels. Soient $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $T = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ les valeurs des variables aléatoires X et Y respectivement.

Définition 1 *On appelle couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, toute application sous forme :*

$$\begin{aligned}(X,Y) : \Omega &\to \mathbb{R}^2 \\ w &\mapsto (X(w), Y(w)).\end{aligned} \tag{9.1}$$

9.2 Loi d'un couple de v. a. discrètes

Définition 2 *On appelle loi ou distribution conjointe des variables aléatoires X et Y la fonction $P(x_i, y_j) = P_{ij}$ définie sur l'ensemble $S \times T$ dans $[0,1]$ par :*

$$\begin{aligned} P_{ij} = P(x_i, y_j) &= P(w \in \Omega / X(w) = x_i, Y(w) = y_j) \\ &= P(X^{-1}(x_i), Y^{-1}(y_j)) \\ &= P(X = x_i, Y = y_j) \end{aligned}$$

Remarque 9.1 *Il est commode d'exprimer la loi conjointe de X et Y par un tableau à deux entrées.*

X \ Y	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	Σ
x_1	P_{11}	P_{12}	$\dots$	P_{1j}	$\dots$	P_{1n}	
x_2	P_{21}	$\ddots$					
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$			$\vdots$	
x_i	P_{i1}			P_{ij}			$P_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$		
x_m	P_{m1}		$\dots$			P_{mn}	
Σ				$P_{.j}$			

où

$$\begin{cases} P_{i.} = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}, \forall i = 1, \dots, n & \text{(Loi Marginale de X)} ; \\ P_{.j} = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}, \forall j = 1, \dots, m & \text{(Loi Marginale de Y).} \end{cases}$$

Exemple 1 *Considérons le couple de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :*

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	5/15	6/15	1/15	4/5
1	2/15	1/15	0/15	1/5
	7/15	7/15	1/15	

La loi marginale de la variable aléatoire X est :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	4/5	1/5

La loi marginale de la variable aléatoire Y est :

y_j	0	1	2
$P(Y = y_j)$	7/15	7/15	1/15

Propriétés

Soit $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ la loi du couple (X, Y), avec $P_{i.}$ et $P_{.j}$ les lois marginales des variables alétoires X et Y respectivement.

1. $P_{ij} \geq 0, \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$
2. $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = P_{i.}, \forall i = 1, \ldots, m$
3. $\sum_{i=1}^{m} P_{ij} = P_{.j}, \forall j = 1, \ldots, n$
4. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$

9.2.1 Indépendance de deux v. a. discrètes

Si les variables alétoires X et Y sont des variables discrètes, on a :

Définition 3 *Soit* $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ *la loi du couple* (X,Y)*, avec* $P_{i.}$ *et* $P_{.j}$*,* $i = 1,\dots,m$*,* $j = 1,\dots,n$ *les lois marginales de* X *et* Y *respectivement. On dit que les variables aléatoires* X *et* Y *sont indépendantes si*

$$P_{ij} = P_{i.}P_{.j}, i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n.$$

Exemple 2 *Considérons le couple de variables aléatoires* (X,Y)*, dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :*

X \ Y	2	4	
1	3/24	15/24	3/4
3	1/24	5/24	1/4
	1/6	5/6	

On a :

$$\begin{aligned}
P(x=1,Y=2) &= \frac{3}{24} = \frac{1}{6}\frac{3}{4} = P(X=1)P(Y=2)\\
P(x=1,Y=4) &= \frac{15}{24} = \frac{5}{6}\frac{3}{4} = P(X=1)P(Y=4)\\
P(x=3,Y=2) &= \frac{1}{24} = \frac{1}{6}\frac{1}{4} = P(X=3)P(Y=2)\\
P(x=3,Y=4) &= \frac{5}{24} = \frac{5}{6}\frac{1}{4} = P(X=3)P(Y=4)
\end{aligned}$$

donc les variables aléatoires X *et* Y *sont indépendantes.*

9.2.2 Fonction de répartition d'un couple de v. a. discrètes

Définition 4 *Soit* (X,Y) *un couple de v. a. de loi* $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$*. On appelle fonction de répartition du couple* (X,Y) *la fonction* F *définie* *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $[0,1]$ *par :*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to [0,1] \\ (x,y) &\mapsto F(x,y) = P(X < x, Y < y) \end{aligned} \tag{9.2}$$

On calcule $F(x,y)$ à partir de la loi conjointe du couple aléatoire (X,Y), en cumulant les probabilités :

$$F(X,Y) = \sum_{x_i<x}\sum_{y_i<y} P(X = x_i, Y = y_j).$$

Définition 5 *Soit* (X,Y) *un couple aléatoire. La fonction*

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto F_X(x) = P(X \leq x) = P(\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x) \end{aligned}$$

est appelée fonction de répartition marginale de la variable aléatoire X *et la fonction*

$$\begin{aligned} F_Y : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ y &\mapsto F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\omega \in \Omega, Y(\omega) \leq y) \end{aligned}$$

est appelée fonction de répartition marginale de la variable aléatoire Y.

On obtient les fonctions de répartition marginales des variables aléatoires X et Y à partir de la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire (X,Y), par

$$\lim_{y\to\infty} F(x,y) = F_X(x) \quad \text{(Fonction de répartition marginale de} X)$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x,y) = F_Y(y) \quad \text{(Fonction de répartition marginale de} Y)$$

Proprité 9.1 *La fonction de répartition conjointe du couple* (X,Y) *est non négative :*

$$F(x,y) \geq 0.$$

Exemple 3 *Soit* (X,Y) *un couple aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :*

X \ Y	2	4	
1	3/24	15/24	3/4
3	1/24	5/24	1/4
	1/6	5/6	

Trouver

1. *les lois marginales de probabilité des variables aléatoires* X *et* Y.
2. *la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire* (X,Y).

La loi marginale de X *est donnée par :*

x_i	1	3
$P(X=x_i)$	3/4	1/4

La loi marginale de Y *est donnée par :*

y_i	2	4
$P(Y=y_j)$	1/6	5/6

La fonction de répartition conjointe est :

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<1,\ y<2\,; \\ \frac{3}{24}, & 1\leq x<3,\ 2\leq y<4\,; \\ \frac{18}{24}, & 1\leq x<3,\ y\geq 4\,; \\ \frac{19}{24}, & x\geq 3,\ 2\leq y<4\,; \\ 1, & x\geq 3,\ y\geq 4. \end{cases}$$

9.2.3 Loi conditionnelle de v. a. discrètes

Les événements $\{X=x_i\}$ et $\{Y=y_j\}$ étant de probabilités non nulles on définit alors deux familles de lois conditionnelles selon que l'on connaît la valeur de X ou de Y.

Définition 6 *On appelle loi conditionnelle de Y si $X = x_i$, pour autant que $P(X = x_i) > 0$, la quantité*

$$P(Y = y_j/X = x_i) = \frac{P(Y = y_j, X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{i.}}$$

De même, on appelle loi conditionnelle de X si $Y = y_j$, pour autant que $P(Y = y_j) > 0$, la quantité

$$P(X = x_i/Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{P_{ij}}{P_{.j}}$$

Exemple 4 *Considérons le couple aléatoire (X,Y) dont la loi conjointe est donnée par :*

X \ Y	0	1
0	4/10	2/10
1	1/10	3/10

Quelle est la loi conditionnelle de X si $Y = 1$?
On a :

$$P(X = 0/Y = 1) = \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{P_{01}}{P_{.1}} = \frac{2}{5}$$

$$P(X = 1/Y = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{P_{11}}{P_{.1}} = \frac{3}{5}$$

9.2.4 Espérance conditionnelle de v. a. discrètes

Définition 7 *On définit l'espérance conditionnelle de Y sachant que $X = x$, pour autant que $P(X = x) > 0$, par :*

$$\mathbb{E}(Y/X = x) = \sum_y yP(Y = y/X = x) = \sum_y y\frac{P(y,x)}{P(x)}$$

Exemple 5 *On considère deux variables aléatoires binomiales X et Y, indépendantes et de mêmes paramètres n et p. Calculer l'espérance conditionnelle de X sous la condition $X+Y = m$.*
On a :

$$\begin{aligned}
P(X = k/X+Y = m) &= \frac{P(X = k, X+Y = m)}{P(X+Y = m)} \\
&= \frac{P(X = k, Y = m-k)}{P(X+Y = m)} \\
&= \frac{P(X = k)P(Y = m-k)}{P(X+Y = m)} \\
&= \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k} C_n^{m-k} p^{m-k} (1-p)^{m-n+k}}{C_{2n}^m p^m (1-p)^{2n-m}} \\
&= \frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}
\end{aligned}$$

Ainsi, la loi conditionnelle de $X/X+Y = m$ suit une loi hypergéométrique de paramètres n, n et m. Par conséquent :

$$\mathbb{E}(X/X+Y = m) = \frac{m}{2}$$

9.3 Loi d'un couple de v. a. continues

Le couple de variables aléatoires $Z = (X,Y)$ est dit absolument continu si les valeurs de Z sont dans $\mathbb{R}^2$ et s'il existe une application $f(x,y)$ vérifiant :

1. $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2. $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = 1$
3. $P((X,Y) \in \mathbb{D}) = \iint_{\mathbb{D}} f(x,y)dxdy$

La fonction $f(x,y)$ est appelée densité conjointe du couple (X,Y).

Remarque 9.2

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = f_X(x)$ *est la loi marginale de X*
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = f_Y(y)$ *est la loi marginale de Y*

Exemple 6 *Soit la densité conjointe du couple* (X,Y) *donnée par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \textit{0<x<1, 0<y<1 ;} \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

Trouver les densités marginales de X et Y ?
On a :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 f(x,y)dy \\ &= \int_0^1 (x+y)dy \\ &= x + \frac{1}{2}, 0 < x < 1. \end{aligned}$$

d'où

$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2}, & \textit{0<x<1 ;} \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

De manière analogue, on trouve :

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2}, & \textit{0<y<1 ;} \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

9.3.1 Indépendance de deux v. a. continues

Dans le cas d'un couple de variables aléatoires continues, on a :

Définition 8 *Soit $f(x,y)$ la densité conjointe du couple (X,Y), avec $f_X(x)$ et $f_Y(y)$, les lois marginales de X et Y respectivement. On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si*

$$f(X,Y) = f_X(x)f_Y(y), x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7 *La densité conjointe du couple (X,Y) est donnée par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & \textit{x>0, y>0 ;} \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
On a :

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dy = e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y} = e^{-x}[-e^{-y}]_0^{\infty} = e^{-x}, x > 0.$$

De manière analogue, on trouve :

$$f_Y(y) = e^{-y}, y > 0.$$

Par conséquent :

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y), x > 0, y > 0.$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

9.3.2 Fonction de répartition d'un couple de v. a. continues

Définition 9 *Soit (X,Y) un couple de v. a. de densité conjointe $f(x,y)$. On appelle fonction de répartition du couple (X,Y) la fonction F définie* *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $[0,1]$ *par :*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to [0,1] \\ (x,y) &\mapsto F(x,y) = P(X < x, Y < y) \end{aligned} \tag{9.3}$$

On calcule $F(x,y)$ à partir de la densité conjointe du couple aléatoire (X,Y), en intégrant la densité :

$$F(X,Y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv.$$

Définition 10 *Soit* (X,Y) *un couple aléatoire. La fonction*

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \end{aligned}$$

est appelée fonction de répartition marginale de la variable aléatoire X *et la fonction*

$$\begin{aligned} F_Y : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ y &\mapsto F_Y(y) = P(Y \le y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{y} f(v)dv \end{aligned}$$

est appelée fonction de répartition marginale de la variable aléatoire Y.

Exemple 8 *Trouver la fonction de répartition conjointe du couple* (X,Y) *de l'exemple 7*

On a :

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv \\
&= \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} e^{-(u+v)}dudv \\
&= \int_{0}^{x} e^{-u}du \int_{0}^{y} e^{-v}dv \\
&= (1-e^{-x})(1-e^{-y})
\end{aligned}$$

9.3.3 Loi conditionnelle de v. a. continues

Soient X et Y des variables de densité conjointe $f(x,y)$.

Définition 11 *On définit loi conditionnelle de X sous la condition $Y = y$, et lorsque $f_Y(y) > 0$, par la relation*

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

De même, on définit loi conditionnelle de Y si $X = x$, pour autant que $f_X(x) > 0$, par la relation

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Exemple 9 *Soient X et Y des variables ayant pour densité conjointe*

$$f(x,y) = \begin{cases} x(2-x-y), & \text{0<x<1, 0<y<1 ;} \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On cherche la densité conditionnelle de X, sachant que $Y = y$, où $0 < y < 1$.

On a :

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x(2-x-y)}{\int_0^1 x(2-x-y)dx} = \frac{6x(2-x-y)}{4-3y}$$

9.3.4 Espérance conditionnelle de v. a. continues

Définition 12 *Soit $f(x,y)$ la densité conjointe du couple (X,Y). On définit l'espérance conditionnelle de Y sachant que $X = x$, par :*

$$\mathbb{E}(Y/X = x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y/X}(y/x)dy,$$

pour toutes les valeurs de x telles que $f_X(x) > 0$.

Exemple 10 *On considère deux variables aléatoires X et Y, de densité conjointe :*

$$f(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}$$

Calculer l'espérance conditionnelle de X sous la condition $Y = y$.
On a :

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}dx = e^{-y}$$

d'où

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$$

Ainsi, l'espérance conditionnelle de X/Y suit une loi exponentielle de paramètre y.
En effet,

$$\mathbb{E}(X/Y = y) = \int_0^{+\infty} x f_{X/Y}(x/y)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx = y.$$

9.4 Moments d'un couple aléatoire

Soit (X,Y) un couple de v. a. de loi $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Définition 13 *On appelle moment d'ordre r par rapport à la variable X et d'ordre p par rapport à la variable Y, l'espérance mathématique de la variable X^rY^p, notée m_{rp}. On a alors :*

$$m_{rp} = \mathbb{E}(X^rY^p) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^r y_j^p P(X = x_i, Y = y_j).$$

Définition 14 *On appelle moment centré d'ordre r par rapport à la variable X et d'ordre p par rapport à la variable Y, la quantité :*

$$\mu_{rp} = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^r(Y - \mathbb{E}(Y))^p).$$

Pour $r = p = 1$, on a :

$$\mu_{11} = \mathbb{C}ov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

appelée covariance des variables aléatoires X et Y, qui mesure le degrés du lien entre X et Y.

propriétés

Soient a et b deux constantes.

1. $\mathbb{C}ov(a,X) = \mathbb{E}(aX) - \mathbb{E}(a)\mathbb{E}(X) = 0$,
2. $\mathbb{C}ov(a+X, b+Y) = \mathbb{C}ov(X,Y)$,
3. $\mathbb{C}ov(aX, bY) = ab\mathbb{C}ov(X,Y)$,
4. $\mathbb{C}ov(X,X) = \mathbb{V}ar(X)$.

Exemple 11 *Considérons le couple aléatoire (X,Y), dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :*

X \ Y	0	1	2	
1	2/18	1/18	4/18	7/18
3	4/18	2/18	5/18	11/18
	6/18	3/18	9/18	

Calculer la covariance de X et Y ?

$$\mathbb{C}ov(XY) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{45}{18} - \frac{40}{18}\frac{21}{18} = -\frac{30}{324}.$$

Remarque 9.3 *Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.*

Exemple 12 *Considérons le couple aléatoire (X,Y), dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :*

X \ Y	-1	0	1	
0	1/18	0/18	1/18	2/18
1	1/18	8/18	1/18	10/18
2	1/18	4/18	1/18	6/18
	3/18	12/18	3/18	

Calculer la covariance de X et Y ? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
On a :

$$\mathbb{C}ov(XY) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0 - \frac{22}{18}.0 = 0,$$

mais

$$P(X=0, Y=-1) = \frac{1}{18} \neq P(X=0)P(Y=-1) = \frac{1}{54}.$$

Par conséquent, les variables aléatoires X et Y sont dépendantes.

9.5 Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation est une mesure du degré de linéarité entre les variables aléatoires X et Y.

Définition 15 *On appelle coefficient de corrélation entre les variables aléatoires X et Y, le nombre*

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{C}ov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

où σ_X et σ_Y représentent respectivement les écarts types des variables X et Y, avec $\sigma_X\sigma_Y \neq 0$.

Les valeurs de $\rho(X,Y)$ proches de 1 ou — 1 indiquent une présence de relation linéarité entre X et Y, tandis que des valeurs proches de 0 indiquent une absence de toute relation linéaire. Lorsque $\rho(X,Y)$ est positif, Y a tendance à augmenter si X fait autant, tandis que pour $\rho(X,Y) < 0$, Y a tendance à diminuer si X augmente. Si $\rho(X,Y) = 0$, on dit que ces deux statistiques sont non corrélées.

Remarque 9.4 *Le coefficient de corrélation possède les propriétés suivantes :*

1. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq +1$
2. $\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{C}ov(X,Y) = 0$
3. $\rho(X,X) = 1$
4. $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$
5. *Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors $\rho(X,Y) = 0$.*

9.6 Exercices

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi conjointe est donnée par :

$$P(X=i,Y=j)=\frac{a}{2^{i+j}}, \quad i,j\in\mathbb{N}^*.$$

1. Déterminer a ?
2. Déterminer les lois marginales de X et Y et déduire leur lois ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Réponse

1. On a :
$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a}{2^{i+j}}=a.$$
D'où
$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a}{2^{i+j}}=1\Rightarrow a=1.$$
2. La loi marginale de X est donnée pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, par :
$$P(X=i)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=i,Y=j)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+j}}=\frac{1}{2^i},$$
que l'on peut réécrire sous la forme :
$$P(X=i)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$
Par conséquent, la variable X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
Par un raisonnement analogue, on trouve :
$$P(Y=j)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}.$$
La variable Y suit aussi une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

3. On a :

$$P(X=i)P(Y=j) = \frac{1}{2^i}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{i+j}} = P(X=i, Y=j).$$

Par conséquent, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 2 On tire au hasard deux boules d'une urne contenant cinq boules numérotées 1,1,2,2 et 3. Soit X la variable aléatoire représentant la somme des numéros tirés et Y le maximum des numéros tirés.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, y)
2. Donner les lois marginales de X et Y

Réponse

1. La loi conjointe de (X,Y) est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	1	2	3
2	$\frac{2}{20}$	0	0
3	0	$\frac{8}{20}$	0
4	0	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$
5	0	0	$\frac{4}{20}$

2. La loi marginale de X est :

x	2	3	4	5
$P(X=x)$	2/20	8/20	6/20	4/20

La loi marginale de Y est :

y	1	2	3
$P(Y=y)$	2/20	10/20	8/20

Exercice 3 On tire simultanément deux boules dans une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4. On note X le numéro de la première boule, et Y le numéro de la deuxième boule.

1. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).
2. Donner les lois marginales de X et Y.
3. Calculer la $\mathbb{C}ov(X,Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Réponse

1. La loi conjointe de (X,Y) est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	1	2	3	4
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

2. les lois marginales de X et Y sont données respectivement par les tableaux suivants :

x	1	2	3	4
P(X=x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

y	1	2	3	4
P(Y=y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3. On a :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{70}{12} - \frac{5}{2}\frac{5}{2} = -\frac{5}{12}.$$

Par conséquent, les variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 4 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, dont la loi du couple (X,Y) est donnée par :

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
3	0	0	$\frac{1}{10}$

1. Déterminer la loi de $\mathbb{E}(Y/X)$
2. Calculer l'espérance et la variance $\mathbb{E}(Y/X)$

Réponse

1. La loi conditionnelle de $Y/X=1$:

$$P(Y=1/X=1)=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{1}{6}$$
$$P(Y=1/X=2)=\frac{0}{\frac{3}{10}}=0$$
$$P(Y=1/X=3)=\frac{0}{\frac{1}{10}}=0$$

La loi conditionnelle de $Y/X=2$:

$$P(Y=2/X=1)=\frac{\frac{2}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{1}{3}$$
$$P(Y=2/X=2)=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$
$$P(Y=2/X=3)=\frac{0}{\frac{1}{10}}=0$$

La loi conditionnelle de $Y/X=3$:

$$P(Y=3/X=1)=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{1}{2}$$
$$P(Y=3/X=2)=\frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{3}$$
$$P(Y=3/X=3)=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}}=1$$

Par conséquent, l'espérance conditionnelle de Y sachant que $X=x_i$, i=1,...,3 est :

$$\mathbb{E}(Y/X=1)=1.\frac{1}{6}+2.\frac{1}{3}+3.\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$$
$$\mathbb{E}(Y/X=2)=1.0+2.\frac{1}{3}+3.\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$
$$\mathbb{E}(Y/X=3)=1.0+2.0+3.1=3$$

D'où, la loi de $\mathbb{E}(Y/X)$ donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\mathbb{E}(Y/X = x_i)$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3

2. On a :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y/X)) = \frac{7}{3}.\frac{6}{10} + \frac{8}{3}.\frac{3}{10} + 3.\frac{1}{10} = \frac{5}{2}$$
$$\mathbb{V}ar(\mathbb{E}(Y/X)) = (\frac{7}{3})^2\frac{6}{10} + (\frac{8}{3})^2\frac{3}{10} + 3^2.\frac{1}{10} - \frac{25}{4} = \frac{1}{20}$$

Exercice 5 On dispose d'une urne contenant une boule blanche et une boule noire et d'une pièce de monnaie non truquée. On jette une fois la pièce, si l'on obtient pile, on tire avec remise une boule de l'urne, si l'on obtient face, on tire sans remise une boule de l'urne. On répète cette expérience et on l'arrête si on a effectué 3 essais, ou si l'urne est vide. On note Y le nombre d'essais effectués et Z le nombre de boules blanches obtenues.

1. Quelle est la loi du couple (Y,Z) ?
2. Calculer les lois marginales de Y et Z ?
3. Determiner la covariance du couple (Y,Z) ?

Réponse

1. La loi du couple (Y,Z) est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2	3
2	0	8/32	0	0
3	1/32	11/32	11/32	1/32

TABLE 9.1: Loi du couple Y,Z

2. La loi marginale de Y est :

y	2	3
$P(Y = y)$	8/32	24/32

La loi marginale de Z est :

z	0	1	2	3
$P(Z=z)$	1/32	19/32	11/32	1/32

3. On a :

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{11}{4},\quad \mathbb{E}(Z)=\frac{11}{8},\quad \mathbb{E}(YZ)=\frac{31}{8}$$

Il s'ensuit :

$$\operatorname{cov}(Y,Z)=\mathbb{E}(YZ)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)=\frac{31}{8}-\frac{11}{4}\frac{11}{8}=\frac{3}{32}$$

Exercice 6 On tire au hasard deux boules sans remise d'une urne qui contient une boule blanche, trois boules noires et six boules jaunes. Soient X et Y les variables aléatoires représentant respectivement le nombre de boules blanches et noires obtenues.

1. Donner la loi de probabilité conjointe du couple aléatoire (X,Y).
2. Donner les lois marginales de probabilité des variables aléatoires X et Y.
3. Donner la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire (X,Y).
4. Calculer $\text{Cov}(X,Y)$ et $\text{Corr}(X,Y)$.
5. Vérifier si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes

Réponse

1. La loi de probabilité conjointe du couple aléatoire (X,Y) est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
0	5/15	6/15	1/15
1	2/15	1/15	0

TABLE 9.2: Loi du couple X,Y

2. La loi marginale de X est :

x	0	1
$P(X=x)$	12/15	3/15

La loi marginale de Y est :

y	0	1	2
$P(Y=y)$	7/15	7/15	1/15

3. La fonction de répartition conjointe du couple (X,Y) est :

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0, y<0\,; \\ 5/15, & 0\leq x<1,\quad 0\leq y<1\,; \\ 11/15, & 0\leq x<1,\quad 1\leq y\leq 2\,; \\ 12/15, & 0\leq x<1,\quad y\geq 2\,; \\ 14/15, & x\geq 1,\quad 0\leq y<1\,; \\ 15/15, & x\geq 1,\quad 1\leq y<2\,; \\ 1, & x\geq 1,\quad y\geq 2\,; \end{cases}$$

4. Pour le calcul de la covariance, on a :

$$\mathbb{E}(X)=\frac{3}{15},\quad \mathbb{E}(Y)=\frac{9}{15},\quad \mathbb{E}(XY)=\frac{1}{15}$$

Il s'ensuit :

$$\text{cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{15}-\frac{3}{15}\frac{9}{15}=-\frac{4}{75}$$

Pour le calcul de la corrélation, on a :

$$\mathbb{E}(X^2)=\frac{3}{15},\quad \mathbb{E}(Y^2)=\frac{11}{15},\quad \mathbb{E}(XY)=\frac{1}{15}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbb{V}ar(X)=\frac{3}{15}-\frac{9}{225}=\frac{4}{25}$$

et

$$\mathbb{V}ar(Y)=\frac{11}{15}-\frac{81}{225}=\frac{28}{75}$$

Par conséquent : $\rho_{X,Y}=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X)\mathbb{V}ar(Y)}}=-\frac{1}{\sqrt{21}}$

5. La covariance étant non nulle, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 7 Soit les variables aléatoires X et Y dont les lois de probabilité sont données par :

x	0	3
P(X=x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

et

y	-1	0	2
P(Y=y)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

On suppose que $P(X=3, Y=2) = 2P(X=0, Y=-1)$. On pose $P(X=0, Y=-1) = a$.

1. Donner la loi de probabilité conjointe du couple (X,Y) en fonction de a. Est-ce que a peut être quelconque ?
2. Calculer $\mathbb{C}ov(X,Y)$. Les variables aléatoires X et Y peuvent-elles être indépendantes ?

Réponse

1. On calcule les probabilités conjointes à partir des deux probabilités marginales de X et Y. On obtient le tableau suivant :

X \ Y	-1	0	2	
0	a	$\frac{1}{6}+a$	$\frac{1}{6}$-2a	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$-a	$\frac{1}{3}-a$	2a	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	

2. On a :

$$\mathbb{E}(X) = 1, \quad \mathbb{E}(Y) = 0, \quad \mathbb{E}(XY) = 15a - 1$$

d'où

$$\mathbb{C}ov(X,Y) = 15a - 1$$

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{C}ov(X,Y) = 0$, donc $a = \frac{1}{15}$. Mais pour cette valeur de a, on aura :

$$p(X=0, Y=-1) = \frac{1}{15} \neq P(X=0)P(Y=-1) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Donc les variables aléatoires X et Y ne sont jamais indépendantes.

Exercice 8 La densité conjointe du couple aléatoire (X,Y) est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y-3xy^2), & 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1\,; \\ 0, & \text{Ailleurs.} \end{cases}$$

1. Trouver les densités marginales des variables aléatoires X et Y.
2. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?

Réponse

1. En intégrant la densité conjointe par rapport à y, on trouve la densité marginale de X, donc :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 2(x+y-3xy^2)dy \\ &= 2xy+y^2-2xy^3|_0^1 = 1. \end{aligned}$$

donc :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1\,; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour la variable aléatoire Y, on trouve :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 2(x+y-3xy^2)dx \\ &= 2xy+y^2-2xy^3|_0^1 = 1+2y-3y^2. \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1+2y-3y^2, & 0<y<1\,; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

2. Comme

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$$

les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 9 Mélina et Mélissa se donnent rendez-vous à la cafétéria du campus. L'heure d'arrivée de chacune d'elles est une variable aléatoire uniformement distribuée entre midi et une heure. Quelle est la probabilité que la première arrivée doive attendre plus de 10 minutes ?

Réponse Désignons par X et Y respectivement l'écart (mn) entre midi et l'arrivée de Mélina ou de Mélissa. Les variables X et Y sont alors des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans l'intervalle [0, 60). La probabilité cherchée est $P(X+10<Y)+(Y+10<X)$, est par symétrie, elle est égale à :

$$\begin{aligned}
2P(X+10<y) &= 2\int_{10}^{60}\int_{0}^{y-10} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= 2\int_{10}^{60}\int_{0}^{y-10} f_X(x)f_Y(y)dxdy \\
&= 2\int_{10}^{60}\int_{0}^{y-10} (\frac{1}{60})^2 dxdy \\
&= 2\int_{10}^{60}\int_{0}^{y-10} (\frac{1}{60})^2 dxdy \\
&= 2(\frac{1}{60})^2\int_{10}^{60}(y-10)dy \\
&= 2(\frac{1}{60})^2(\frac{1}{2}y^2-10y)|_{10}^{60} \\
&= 2(\frac{1}{60})^2 1250 \\
&= \frac{25}{36}
\end{aligned}$$

Exercice 10 On considère un couple de variables aléatoires continues (X,Y) dont la densité jointe est donnée par :

$$f(x,y)=\begin{cases} k(\frac{1}{x^2}+y^2), & 1\leq x\leq 5 \text{ et } -1\leq y\leq 1\,; \\ 0, & \text{Ailleurs.}\end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de k la fonction f est-elle une densité ?
2. Calculer les densités marginales de X et de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la densité marginale de X sachant que $Y=0$.
5. Calculer la covariance de X et Y.

Réponse

1. Pour que f_{XY} soit une densité de probabilité, il faut que :
   – $f_{XY}\geq 0$

– $\int_1^5 \int_{-1}^1 f_{XY}(x,y)dxdy = 1$

D'une part, on a la première condition est vérifiée pour tout $k \geq 0$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^5 \int_{-1}^1 f_{XY}(x,y)dxdy &= \int_1^5 \int_{-1}^1 k(\frac{1}{x^2} + y^2)dxdy \\ &= \int_1^5 \int_{-1}^1 \frac{k}{x^2}dxdy + \int_1^5 \int_{-1}^1 ky^2dxdy \\ &= k\int_1^5 \frac{1}{x^2}dx \int_{-1}^1 dy + \int_1^5 kdx \int_{-1}^1 y^2dy \\ &= k\frac{64}{15}\end{aligned} \tag{9.4}$$

d'où, f_{XY} est une densité de probabilité pour $k = \dfrac{15}{64}$.

2. La densité marginale de X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-1}^1 \frac{15}{64}(\frac{1}{x^2} + y^2)dy, & 1 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{Ailleurs} \end{cases} = \begin{cases} \frac{15}{64}(\frac{2}{x^2} + \frac{2}{3}), & 1 \leq x \leq 5\,; \\ 0, & \text{Ailleurs.} \end{cases}$$

La densité marginale de Y est donnée par :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_1^5 \frac{15}{64}(\frac{1}{x^2} + y^2)dx, & -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{Ailleurs} \end{cases} = \begin{cases} \frac{15}{16}(y^2 + \frac{1}{5}), & -1 \leq y \leq 1\,; \\ 0, & \text{Ailleurs.} \end{cases}$$

3. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes, car la densité conjointe $f_{XY}(x,y)$ n'est pas de la forme $f_X(x)f_Y(y)$.

4. La densité conditionnelle de X sachant que $Y = 0$ est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{X/Y=0}(x) &= \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x,0)}{f_Y(0)} = \dfrac{\frac{15}{64x^2}}{\frac{3}{16}}, & 1 \leq x \leq 5\,; \\ 0, & \text{Ailleurs.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{5}{4x^2}, & 1 \leq x \leq 5\,; \\ 0, & \text{Ailleurs.} \end{cases} \end{aligned} \tag{9.5}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \int_1^5 \int_{-1}^1 xy f_{XY}(x,y)dxdy \\
&= \frac{15}{64}\int_1^5 \int_{-1}^1 xy(\frac{1}{x^2}+y^2)dxdy \\
&= \frac{15}{64}\int_1^5 \int_{-1}^1 \frac{y}{x}dxdy + \frac{15}{64}\int_1^5 \int_{-1}^1 xy^3 dxdy \\
&= \frac{15}{64}\int_1^5 \frac{1}{x}dx \int_{-1}^1 ydy + \frac{15}{64}\int_1^5 xdx \int_{-1}^1 y^3 dy = 0
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^5 x f_X(x)dx = \int_1^5 x\frac{15}{64}(\frac{2}{x^2}+\frac{2}{3})dx = \frac{15}{32}\int_1^5 (\frac{1}{x}+\frac{2x}{3})dx = \frac{15}{32}(\ln 5 + 4)$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-1}^1 y f_Y(y)dy = \int_{-1}^1 y\frac{15}{16}(y^2+\frac{1}{5})dy = \frac{15}{16}\int_{-1}^1 (y^3+\frac{y}{5})dy = 0$$

d'où

$$\mathbb{C}ov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$$

Références

Adjabi, S. (2011). *Statistique mathématique*. Editions Universitaires Européennes, Berlin.

Bertrand, F., & Maumy-Bertrand, M. (2011). *Statistique en 80 fiches pour les scientifiques*. Dunod, Paris.

Bouleau, N. (1986). *Probabilités de l'ingénieur, variables aléatoires et simulation*. Hermann, Paris.

Brémaud, P. (2009). *Initiation aux probabilités et aux chaines de markov*. Springer, Verlag.

Cantoni, E., Huber, P., & Ronchetti, E. (2009). *Maîtriser l'aléatoire : Exercices résolus de probabilités et statistique*. Springer.

Capinski, M., & Zastawniak, T. J. (2013). *Probability through problems*. Springer Science and Business Media.

Dress, F. (2007). *Les probabilités et la statistique*. Dunod, Paris.

Durrett, R. (1991). *Probability : Theory and examples*. Wadsworth and Brooks, Pacific Grove (California).

Foata, D., & Fuchs, A. (1998). *Calcul des probabilités : cours, exercices et problèmes corrigés*. Dunod, Paris.

Goldfarb, B., & Pardoux, C. (2011). *Introduction à la méthode statistique : Manuel et exercices corrigés*. Dunod, Paris.

Jacod, J., & Protter, P. (2003). *L'essentiel en théorie des probabilités*. Cassini.

Jourdain, B. (2009). *Probabilités et statistique*. Ellipses.

Lecoutre, J. P. (2009). *Statistique et probabilités : Travaux dirigés*. Dunod, Paris.

Lefebvre, M. (2006). *Applied probability and statistics*. Springer, Verlag.

Lejeune, M. (2010). *Statistique. la théorie et ses applications*. Statistique et probabilités appliquées.

Lesigne, E. (2001). *Pile ou face, une introduction aux théorèmes limites du calcul des probabilités*. Opuscules. Ellipses.

Lipschutz, S. (1993). *Probabilité, cours et problèmes*. Mc Graw-Hill,.

Marceil, J. (1992). *Aide mémoire de probabilités et statistiques*. Ellipses.

Phan, T., & Rowenczyk, J. P. (2012). *Exercices et problèmes de statistique et probabilités*. Dunod, Paris.

Ross, M. (1988). *Initiation aux probabilités*. Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Lausanne, Suisse).

Saporta, G. (1990). *Probabilités : analyse des données et statistique*. Technip.