

UNIVERSITE A. MIRA – BEJAIA  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

---

RHEOLOGIE : Introduction

---

**A. BENSLIMANE**

---

Laboratoire Mécanique, Matériaux et Energétique  
Département de Génie Mécanique- Faculté de Technologie  
Université A. MIRA de Bejaia  
[benslimane.ah@gmail.com](mailto:benslimane.ah@gmail.com) ; [abdelhakim.benslimane@univ-bejaia.dz](mailto:abdelhakim.benslimane@univ-bejaia.dz)



Ce cours sert de support à l'enseignement dispensé par A. BENSLIMANE au travers de séances de cours magistraux et de séances de travaux dirigés.

Il est détaillé autour de différents chapitres à savoir:

1. Eléments d'analyse tensorielle
2. Définitions et généralités
3. Equations de base
4. Applications : Ecoulement de fluides réels dans les conduites
5. Rhéométrie
6. viscoélasticité linéaire

Ces derniers s'articulent autour de concepts théoriques et pratiques et font largement appel à des exemples pour illustrer les différents phénomènes décrits.



# Chapitre 1

# Eléments d'analyse tensorielle



# Chapitre 1

## Eléments d'analyse tensorielle

L'introduction aux tenseurs en tant qu'objets algébriques est faite progressivement, en profitant du fait que l'algèbre tensorielle est en premier lieu une reformulation de notions bien connues.

### 1.1. Vecteurs et tenseurs

#### 1.1.1. Notations

##### 1.1.1.1 Vecteur

Dans un espace euclidien à trois dimensions, un vecteur  $V$  représenté par ses trois composantes  $V_1, V_2, V_3$ :

$$\bar{V} = V_1\bar{e}_1 + V_2\bar{e}_2 + V_3\bar{e}_3 \quad (\text{I.1})$$

En utilisant la convention de sommation, ou convention d'Einstein, on écrit :

$$\bar{V} = V_i\bar{e}_i \quad (\text{I.2})$$

où, chaque fois qu'un indice est répété, il convient de faire varier cet indice de 1 à 3 et de faire la somme. Dans l'expression (2) c'est-à-dire :

$$V_i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^3 V_i \bar{e}_i = V_3 \bar{e}_3 + V_2 \bar{e}_2 + V_1 \bar{e}_1 \quad (\text{I.3})$$

Un indice répété est appelé *indice muet*, en général on écrit :

$$u_i v_i = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \quad (\text{I.4})$$

On définit le symbole de Kronecker par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

En particulier la matrice identité est représentée par :

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.6})$$

### 1.1.1.2 Tenseurs

Un tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur  $\mathbf{V}$  de l'espace euclidien un vecteur  $\mathbf{W}$  de ce même espace.

$$W_i = T_{ij} V_j \quad (\text{I.7})$$

Cet opérateur peut être représenté par une matrice 3x3, notée  $[T]$  ou  $\bar{\bar{T}}$

$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

Le tenseur identité noté  $\bar{\bar{I}}$  est un tenseur particulier car ses composantes sont les mêmes dans toute base orthonormée et donnent la matrice identité :

$$\bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

Autrement dit :  $I_{ij} = \delta_{ij}$

Un tenseur est dit symétrique si  $T_{ij} = T_{ji}$

Un tenseur est dit antisymétrique si  $T_{ij} = -T_{ji}$

On peut toujours décomposer un tenseur en une partie symétrique et antisymétrique :

$$\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}}^s + \bar{\bar{T}}^A \quad \text{ou} \quad T_{ij} = T_{ij}^s + T_{ij}^A \quad (\text{I.10})$$

Avec :  $T_{ij}^s = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$  et  $T_{ij}^A = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$

La trace d'un tenseur d'ordre 2 est la somme de ses termes diagonaux :

$$tr(\bar{\bar{T}}) = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad (\text{I.11})$$

On introduit le symbole de permutation :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i,j,k \text{ est une permutation paire de } 1,2,3 \\ -1 & \text{si } i,j,k \text{ est une permutation impaire de } 1,2,3 \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux} \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Les invariants fondamentaux du tenseur  $\mathbf{A}$  :

$$\begin{cases} I_1 = \det(\bar{\bar{A}}) \\ I_2 = \frac{1}{2} \left( \left( tr \bar{\bar{A}} \right)^2 - tr \left( \bar{\bar{A}}^2 \right) \right) \\ I_3 = tr \bar{\bar{A}} \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

### 1.1.1.3 Opérations sur les tenseurs

Produit contracté :

Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 2 défini par :

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}} \bullet \overline{\overline{B}} \quad C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \quad (\text{I.14})$$

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un scalaire :

$$s = \overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}} = A_{ij} B_{ij} = \text{tr} \left( \overline{\overline{A}} \bullet \overline{\overline{B}} \right) \quad (\text{I.15})$$

Le produit contracté d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} \bullet \overline{\overline{b}} &= \overline{\overline{c}} & A_{ij} b_j &= c_i \\ \overline{\overline{b}} \bullet \overline{\overline{A}} &= \overline{\overline{d}} & b_i A_{ij} &= d_j \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Le produit contracté (appelé plus couramment produit scalaire) de deux vecteurs est un scalaire :

$$s = \overline{\overline{a}} \bullet \overline{\overline{b}} \quad s = a_i b_i \quad (\text{I.17})$$

Le résultat d'un produit contracté est simple à définir. Soit  $n$  l'ordre du premier tenseur et  $m$  l'ordre du second ( $m = 1$  pour un vecteur, 2 pour un tenseur d'ordre 2, ...). Le résultat d'un produit simplement contracté est un tenseur d'ordre  $n + m - 2$  et le résultat d'un produit doublement contracté est un tenseur d'ordre  $n + m - 4$ .

## 1.2. Formules essentielles en mécanique

Soit un vecteur  $\overline{\overline{v}} = v_x \overline{\overline{e}}_x + v_y \overline{\overline{e}}_y + v_z \overline{\overline{e}}_z$  :

$$\nabla(\bar{v}) = \overline{\nabla v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{I.18})$$

$$\text{div}(\bar{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{tr}(\overline{\text{grad} v}) = \nabla \bar{v} : \bar{I} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{I.19})$$

$$\Delta \bar{v} = \text{div}(\nabla \bar{v}) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \bar{e}_i = \Delta v_x \bar{e}_x + \Delta v_y \bar{e}_y + \Delta v_z \bar{e}_z \quad (\text{I.20})$$

Soit un tenseur :  $\bar{T} = T_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$

$$\text{div}(\bar{T}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \bar{e}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{I.21})$$

$$\Delta \bar{T} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \begin{bmatrix} \Delta T_{xx} & \Delta T_{xy} & \Delta T_{xz} \\ \Delta T_{yx} & \Delta T_{yy} & \Delta T_{yz} \\ \Delta T_{zx} & \Delta T_{zy} & \Delta T_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{I.22})$$



# Chapitre 2

## Définitions et généralités



# Chapitre 2

## Définitions et généralités

### 2.1. Milieux continus

La mécanique des milieux continus est une branche particulière de la physique dans laquelle la matière, quelle que soit sa phase ou sa structure, est traitée par la même théorie. Les propriétés macroscopiques particulières des solides, des liquides et des gaz sont décrites par des équations dites des lois de comportement. Les lois de comportement représentent des modèles macromécaniques pour les matériaux réels.

### 2.2. Rhéologie

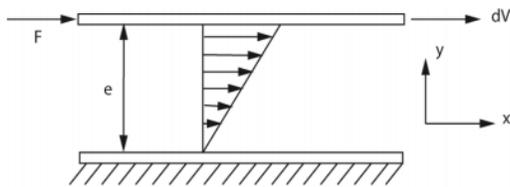
La rhéologie est la science des déformations et écoulements de la matière, des contraintes qui en résultent et efforts qu'il faut appliquer pour les obtenir. Cette science repose sur les bases de la mécanique des milieux continus, dont l'objet est de déterminer les contraintes et les déformations en chaque point d'un milieu continu. Elle consiste à déterminer la relation qui relie la contrainte de cisaillement aux taux de déformation. Cette relation peut être linéaire ou non-linéaire dans le cas d'un fluide complexe. Ces fluides complexes dits aussi non-newtoniens sont caractérisés différemment, soit parce que la viscosité évolue en fonction de cisaillement soit

parce qu'il apparaît des termes diagonaux dans le tenseur des contraintes qui sont le signe d'effets élastiques (viscoélasticité).

### 2.3. Comportement Newtonien

Considérons une couche fluide confinée entre deux plaques planes, parallèles et distantes d'une épaisseur  $e$  (figure 2.1) et d'aire  $A$ . si maintenant, une force constante  $F$  est appliquée à la plaque supérieure, le fluide s'écoule en couches planes parallèles entre elles. On admet que les couches du fluide au contact des deux surfaces planes sont solidaires de ces dernières, ce qu'on appelle l'hypothèse de non glissement à la paroi, la figure montre le profil de vitesse résultant en régime stationnaire.

Pour un fluide newtonien, incompressible en écoulement laminaire, la contrainte de cisaillement est proportionnelle aux taux de cisaillement :



**Figure 2.1** Schéma d'un écoulement à cisaillement simple

$$\frac{F}{A} = \tau_{yx} = \mu \left( -\frac{du}{dy} \right) = \mu \dot{\gamma}_{yx} \quad (\text{II.1})$$

Deux grandeurs sont apparues qui vont nous permettre de caractériser quantitativement le cisaillement. La vitesse de cisaillement notée:  $\dot{\gamma}$ , qui caractérise la variation de la vitesse entre les couches fluides. La vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  ( $s^{-1}$ ) dépend non seulement de la vitesse de déplacement, mais aussi, de l'épaisseur cisillée, elle est définie par la relation :

$$\dot{\gamma}_{yx} = \frac{du}{dy} \quad (\text{II.2})$$

L'autre grandeur est la contrainte de cisaillement  $\tau$  (Pa) qui est définie comme étant la force de frottement tangentielle entre les différentes couches mobiles rapportée à l'unité de surface :

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (\text{II.3})$$

La constante de proportionnalité  $\mu$ (Pa.s), appelée newtonienne, est par définition pour un fluide newtonien, indépendante du taux de cisaillement et de la contrainte de cisaillement. C'est une propriété intrinsèque du matériau qui ne dépend que de la pression et de la température.

La viscosité caractérise complètement le comportement de l'écoulement d'un fluide newtonien à température et pression constantes.

D'un point de vue plus général et en utilisant l'écriture sous forme tensorielle, l'état de contrainte d'un fluide Newtonien en mouvement est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (\text{II.4})$$

Où  $p$  désigne la pression statique du fluide.

Pour un fluide incompressible :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} \quad (\text{II.5})$$

Au final la loi de comportement d'un fluide Newtonien incompressible s'énonce simplement :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (\text{II.6})$$

Ici  $\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  le tenseur taux de déformation

## 2.4 Fluides non-Newtoniens

On dit d'un fluide qu'il est non Newtonien lorsque sa courbe d'écoulement est non linéaire, c'est-à-dire que la viscosité n'est plus constante mais dépendante des conditions d'écoulement, du taux de cisaillement et parfois même de l'histoire de l'élément fluide. La caractérisation rhéologique d'un fluide consiste à établir la relation qui existe entre sa déformation et la

contrainte qui lui est appliquée. En fonction de sa réponse, liserait dit dépendance du temps ou non :

- Fluides indépendants du temps : le comportement rhéologique est indépendant de l'histoire mécanique antérieure de l'échantillon.
- Fluides dépendants du temps : le comportement rhéologique dépend en outre de la durée de cisaillement et de l'historique de l'échantillon.

On peut envisager des "complications possibles", la plus simple sera de dire que la viscosité dépend du cisaillement :

$$\mu = f(\dot{\gamma}) \quad (\text{II.7})$$

Suivant la variation de  $\mu(\dot{\gamma})$  on dira :

- Fluides rhéofluidisants: la viscosité diminue avec le cisaillement sang, shampoing, jus de fruit concentré, encres d'imprimerie, solutions de polymères ou de masse moléculaire élevée, suspensions de particules solides...
- Fluides rhéoépaississants: la viscosité augmente avec le cisaillement suspensions de particules, ou de cellules du sang dans du plasma, solutions de maïs...
- Fluides à seuil: il faut dépasser une certaine contrainte (le seuil) pour obtenir un écoulement. Le dentifrice, la mousse à raser, le Ketchup, la mayonnaise, le béton, les peintures, les boues de forage pétrolier...

On peut être cependant encore plus général et définir le "fluide visqueux généralisé" tel que pour ce type de matériau on suppose que la contrainte ne dépend que du taux de déformation:

$$\boldsymbol{\sigma} = f(2\mathbf{D}) \quad (\text{II.8})$$

Soit  $\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  le tenseur taux de déformation :

On note le premier invariant, la trace :

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{D}) = D_{11} + D_{22} + D_{33} \quad (\text{II.9})$$

Le second est :

$$I_2 = \frac{1}{2} \left( \text{tra}(\mathbf{D})^2 - \text{tra}(\mathbf{D}^2) \right) = D_{11}D_{22} + D_{22}D_{33} + D_{11}D_{33} - D_{12}D_{21} - D_{23}D_{32} - D_{31}D_{13} \quad (\text{II.10})$$

Pour le troisième c'est le déterminant :

$$I_3 = \det(\mathbf{D}) \quad (\text{II.11})$$

Par la suite, nous considérerons principalement des fluides incompressibles, c'est à dire :

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{D}) = D_{ii} = 0 \quad (\text{II.12})$$

La notation  $\dot{\gamma}$  (taux de cisaillement ou vitesse de cisaillement,  $s^{-1}$ ) est souvent utilisée en rhéologie et on peut généraliser à un tenseur  $\overline{\dot{\gamma}}$  :

$$\dot{\gamma} = 2\mathbf{D} \quad \text{où : } \dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (\text{II.14})$$

Les différents fluides réels peuvent être classifiés en catégories selon leurs propriétés matérielles les plus importantes. Dans ce cours, nous présenterons les différents modèles mathématiques de fluides dans les différentes catégories. Afin de définir quelques propriétés mécaniques simples à utiliser dans la classification, nous allons considérer l'expérience suivante avec différents liquides réels.

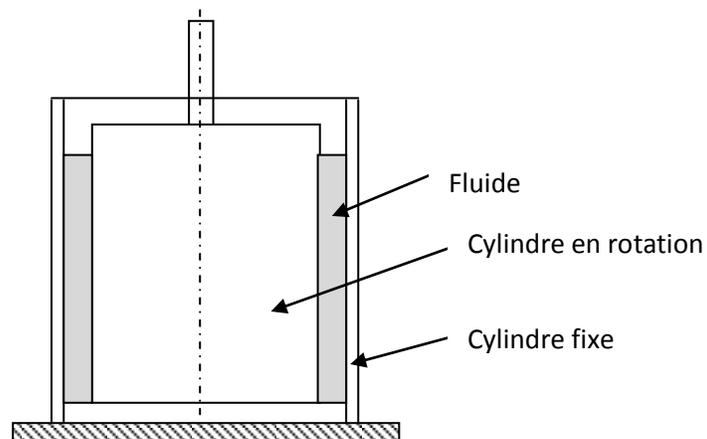


Figure 2.2 Viscosimètre cylindrique

La figure 2.2 montre un viscosimètre constitué de deux cylindres concentriques. L'espace annulaire entre les deux surfaces cylindriques concentriques est rempli d'un liquide. Le cylindre intérieur est soumis à un couple  $M$  et est animé d'une vitesse de rotation angulaire constante  $\omega$  autour d'un axe vertical. La distance  $h$  entre les deux surfaces cylindriques est si petite comparée au rayon  $r$  du cylindre de manière à ce que le mouvement du liquide peut être considéré comme un écoulement entre deux surfaces planes parallèles.

On peut montrer que pour valeurs de  $\omega$  modérées, le champ de vitesse est donné par :

$$v_x = \frac{v}{h} y, \quad v_y = v_z = 0, \quad v = \omega r \quad (\text{II.15})$$

$v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$  sont les composantes du vecteur vitesse ( $\mathbf{v}$ ) dans un système de coordonnées cartésien local  $Oxyz$ .

La déformation d'un élément de volume ( $dV = dx dy dz$ ) pendant un court intervalle de temps  $dt$  peut être donnée par le taux de déformation :

$$d\gamma = \dot{\gamma} dt = \frac{dv_x dt}{dy} = \frac{dv_x}{dy} dt = \frac{v}{h} dt = \frac{\omega r}{h} dt \quad (\text{II.16})$$

Avec :

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dy} = \frac{v}{h} = \frac{r}{h} \omega \quad (\text{II.17})$$

$\dot{\gamma}$  est le taux de cisaillement [1/s].

La contrainte de cisaillement peut être déterminée à partir la loi d'équilibre du moment cinétique appliquée au cylindre en rotation. Dans le cas d'un écoulement permanent à vitesse angulaire constante  $\omega$ , le couple  $M$  est équilibré par les contraintes de cisaillement  $\tau$  sur la paroi cylindrique de surface  $2\pi rH$ . Ainsi :

$$(\tau r)(2\pi rH) = M \Rightarrow \tau = \frac{M}{2\pi r^2 H} \quad (\text{II.18})$$

Le viscosimètre enregistre la relation entre le couple  $M$  et la vitesse angulaire  $\omega$ . En utilisant les relations pour le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et pour la contrainte de cisaillement  $\tau$ , on obtient une relation entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  appelée loi de comportement du fluide.

Nous allons maintenant discuter de ces relations.

Un fluide est dit purement visqueux si la contrainte de cisaillement  $\tau$  est une fonction uniquement du taux de cisaillement :

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}) \quad (\text{II.19})$$

Un fluide incompressible newtonien est un fluide purement visqueux dont l'équation constitutive est linéaire :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (\text{II.20})$$

Le coefficient  $\mu$  [Pa.s] est appelé viscosité dynamique du fluide.

Pour les fluides non newtoniens en écoulement de cisaillement simple, une fonction de viscosité  $\eta(\dot{\gamma})$  est introduite :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (\text{II.21})$$

La fonction de viscosité est également appelée viscosité apparente. La loi de comportement peut alors être donnée par :

$$\tau = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (\text{II.22})$$

Le modèle le plus couramment utilisé pour la fonction de viscosité est donné par la loi de puissance :

$$\eta(\dot{\gamma}) = K |\dot{\gamma}|^{n-1} \quad (\text{II.23})$$

Où  $K$  est le paramètre de consistance et  $n$  l'indice de la loi de puissance.

On dit d'un matériau qu'il est purement élastique si la contrainte de cisaillement est uniquement fonction de la déformation et indépendante de la vitesse de déformation, c'est-à-dire :

$$\tau = \tau(\gamma) \quad (\text{II.24})$$

Pour un matériau élastique linéaire:

$$\tau = G\gamma \quad (\text{II.25})$$

où G est le module de cisaillement.

Pour de nombreux matériaux réels, tant liquides que solides, la contrainte de cisaillement peut être dépendant à la fois de la déformation de cisaillement et de la vitesse de déformation de cisaillement. Ces matériaux sont appelés viscoélastiques :

$$\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma}) \quad (\text{II.26})$$

Les modèles de fluides peuvent être classés en trois catégories principales :

- I. Fluides indépendants du temps
- II. Fluides dépendants du temps
- III. Fluides viscoélastiques

### 2.4.1 Fluide indépendants du temps

Le comportement rhéologique est indépendant de l'histoire mécanique antérieure de l'échantillon. Ce groupe peut encore être divisé en deux sous-groupes :

- Fluides viscoplastiques

Le matériau se comporte tel un solide élastique lorsque la contrainte de cisaillement est inférieure à une certaine contrainte limite ( $\tau_y$ ) dite : contrainte seuil. Au-delà de cette contrainte limite ou contrainte seuil le matériau s'écoule tel un fluide visqueux. Le modèle de fluide

viscoplastique le plus simple est le fluide de Bingham, du nom du professeur Bingham, l'inventeur du nom de rhéologie. Le modèle se comporte comme un fluide newtonien lorsqu'il s'écoule, et l'équation constitutive en cisaillement simple est :

$$\begin{cases} \tau(\dot{\gamma}) = \left[ \mu + \frac{\tau_y}{|\dot{\gamma}|} \right] \dot{\gamma} & \dot{\gamma} \neq 0 \\ \tau(\dot{\gamma}) \leq \tau_y & \dot{\gamma} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

La figure 1 montre les graphiques caractéristiques de la fonction  $\tau(\dot{\gamma})$  pour les matériaux viscoplastiques.

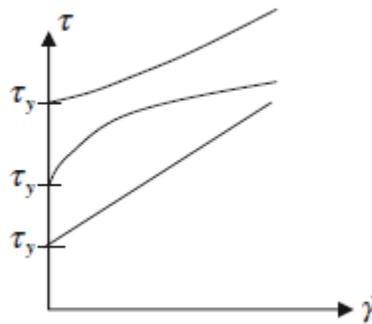


Figure 1. Fluide viscoplastique

Exemples de fluides présentant une contrainte seuil : fluides de forage, sable dans l'eau, matériaux granulaires, margarine, dentifrice, certaines peintures, certains polymères fondus et béton.

- Fluides purement visqueux
- Fluides rhéofluidifiants

On dit d'un fluide purement visqueux qu'il est rhéofluidifiant ou pseudo-plastique si la viscosité apparente diminue lorsque le taux de cisaillement augmente. La plupart des fluides non-newtoniens réels sont des fluides rhéofluidifiants.

Exemples : presque tous les polymères fondus, les solutions de polymères, les fluides biologiques, la mayonnaise...

Le modèle à loi de puissance décrit le comportement rhéofluidifiant quand  $n < 1$ .

- Fluides rhéoépaississants

Pour un groupe relativement restreint de liquides réels, la viscosité apparente augmente avec l'augmentation du taux de cisaillement. Ces fluides sont appelés fluides rhéoépaississants ou fluides dilatants.

Le modèle à loi de puissance décrit le comportement rhéoépaississants quand  $n > 1$ .

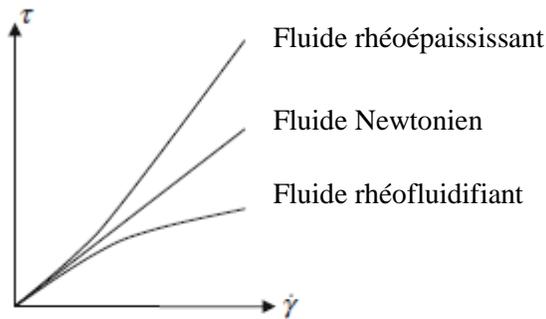


Figure 2. Fluide purement visqueux

### 2.4.2.1. Modèles rhéologiques

#### a. Modèle à loi de puissance ou modèle d'Oswald de Waele

De fait, on définit ainsi une classe des « fluides en loi de puissance » modèle d'Oswald de Waele. C'est un modèle particulier de dépendance simple du cisaillement à la contrainte. Par définition, un fluide en loi de puissance » est tel que pour un écoulement cisailé simple en 1D la contrainte est une puissance du cisaillement :

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \quad (\text{II.28})$$

En notation tensorielle il est plus commode d'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (\text{II.29})$$

Avec :

$$\boldsymbol{\tau} = k |\dot{\boldsymbol{\gamma}}|^{n-1} \boldsymbol{D} \quad (\text{II.30})$$

$$|\dot{\boldsymbol{\gamma}}| = \sqrt{2\boldsymbol{D} : \boldsymbol{D}} \quad (\text{II.31})$$

Où  $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|$  est le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation et  $k$  et  $n$  sont respectivement l'indice de consistance et l'indice d'écoulement.

Selon les valeurs de l'indice d'écoulement, ces fluides peuvent présenter un comportement rhéofluidifiant ( $n < 1$ ), rhéoépaississant ( $n > 1$ ) ou newtonien pour ( $n = 1$ ).

### b. Modèle de Cross

Le modèle de cross tient compte de la viscosité à cisaillement nul et infini. Il s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (\text{II.32})$$

Avec :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|)\boldsymbol{D} \quad (\text{II.33})$$

Où :

$$\frac{\mu(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|) - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \frac{1}{1 + \lambda |\dot{\boldsymbol{\gamma}}|^n} \quad (\text{II.34})$$

Où  $\lambda$  est un temps caractéristique de relaxation.  $\mu_0$  et  $\mu_\infty$  sont les viscosités à cisaillements nul et infini, respectivement.

### c. Modèle d'Herschel - Bulkley

Rappelons que certains fluides possèdent une structure suffisamment rigide leur permettant de résister à des valeurs élevées de la contrainte : ils se comportent comme des solides. Au-delà d'une valeur limite, appelée contrainte seuil, la structure rigide est détruite et le fluide s'écoule.

Le modèle d'Herschel- Bulkley est décrit par la loi :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (\text{II.35})$$

Avec :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \left( \frac{\tau_0}{|\dot{\gamma}|} + k|\dot{\gamma}|^{n-1} \right) \mathbf{D} & \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Où  $k$  est la consistance du fluide,  $n$  son indice d'écoulement et  $\tau_0$  la contrainte seuil. On notera que le modèle de Herschel-Bulkley peut facilement être modifié pour décrire les modèles précédemment cités.

### 2.4.2. Fluide dépendants du temps

Le comportement des fluides dépendants du temps, est tel que pour un taux de cisaillement constant et à température constante, la contrainte de cisaillement augmente ou diminue de façon monotone par rapport au temps. Les fluides retrouvent leurs propriétés initiales quelque temps après que le taux de cisaillement soit revenu à zéro. Les fluides dépendant du temps sont divisés en deux sous-groupes :

- Fluides thixotropes : Pour un taux de cisaillement constant, la contrainte de cisaillement diminue de façon monotone.
- Fluides rhéopectiques : Pour un taux de cisaillement constant, la contrainte de cisaillement augmente de façon monotone. Ces fluides sont également appelés fluides antithixotropes.

Ces fluides présentent une autre caractéristique fascinante. Quand un fluide thixotropique est soumis à une histoire de taux de cisaillement de  $\dot{\gamma} = 0$  à une valeur  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$  et de retour à  $\dot{\gamma} = 0$ , le graphe de la contrainte de cisaillement  $\tau$  en fonction de  $\dot{\gamma}$  montre une boucle d'hystérésis, voir Fig. 3.

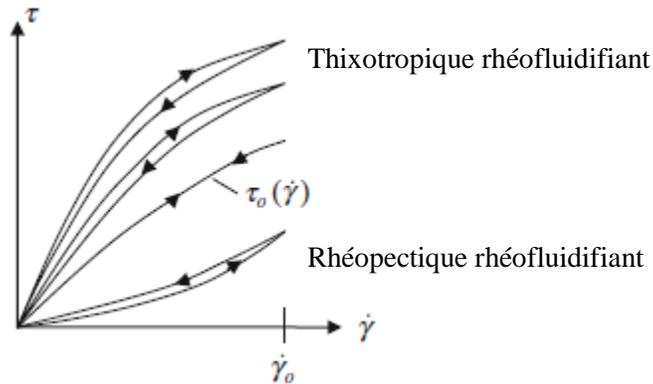


Figure 3. Histoire du taux de cisaillement

### 2.4.3. Fluide Viscoélastique

Le caractère viscoélastique est un comportement fréquemment rencontré dans les fluides non-Newtoniens. Nombreuses sont les substances qui manifestent un comportement intermédiaire entre celui d'un solide parfaitement élastique et celui d'un liquide visqueux ; elles sont dénommées fluides viscoélastiques. Dans le cas d'un fluide viscoélastique, le type de test qui permettra la détermination des propriétés viscoélastiques de ces fluides consiste à :

- imposer un cisaillement oscillatoire de pulsation donnée : évolution sinusoïdale de la contrainte et de la vitesse de cisaillement au cours du temps.
- imposer une contrainte (ou une déformation) de cisaillement constante et étudier la déformation qui en découle (ou la contrainte nécessaire pour maintenir la déformation constante).



# Chapitre 3

## Equations de base

# Chapitre 3

## Equations de base

### 3.1. Cinématique

Une portion de fluide est appelée un corps. Le corps a à tout instant  $t$  un volume  $V$  et une surface  $A$ . Un point matériel du corps est appelé particule. Afin de localiser les particules et de pouvoir décrire leurs mouvements, nous introduisons un référentiel, appelé en abrégé référence  $R_f$ , et un système de coordonnées cartésiennes  $Ox$ . Le point  $O$  est l'origine du système de coordonnées et  $x$  indique les axes  $x_1$  ;  $x_2$  ; et  $x_3$ , qui seront alternativement désignés par  $x$ ,  $y$ , et  $z$ .

Un point dans l'espace physique à trois dimensions est localisé par trois valeurs de coordonnées  $x_i$  pour  $i = 1, 2$  et  $3$ . Nous introduisons les conventions :

$$(x_1, x_2, x_3) \equiv x_i \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.1})$$

À un instant de référence  $t_0$  choisi arbitrairement, la position d'une particule dans le corps fluide est donnée par un ensemble de coordonnées  $X_i$ .

$$(X_1, X_2, X_3) \equiv X_i \equiv \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.2})$$

L'ensemble des positions  $X$  qui représente le corps au moment de référence  $t_0$ , est appelé la configuration de référence  $K_0$  du corps.

Le fluide est observé ou étudié à l'instant présent  $t$ . A cet instant, la particule  $X$  s'est déplacée à la position  $x$ . L'ensemble des positions  $x$  qui représente le corps à l'instant présent  $t$  est appelé la configuration actuelle  $K$  du corps. Ainsi, les relations suivantes existent :

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \equiv x_i(X, t) \Leftrightarrow X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) \equiv X_i(x, t) \quad (\text{III.3})$$

Ces relations représentent une correspondance entre les particules  $X_i$  dans  $K_0$  et les positions  $x$  dans  $K$ . Les fonctions  $x_i(X, t)$  représentent le mouvement du fluide.

La particule  $X$  et les positions  $x$  et  $\bar{x}$  sont également représentés par les vecteurs position ou vecteurs de lieu  $r_0$  ;  $r$  ; et  $\bar{r}$  : Les vecteurs unitaires  $e_i$  dans la direction des axes  $x_i$  sont appelés vecteurs de base du système de coordonnées  $Ox$ . Donc :

$$r_0 = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3 = \sum_{i=1}^3 X_i e_i \quad r = \sum_{i=1}^3 x_i e_i \quad \bar{r} = \sum_{i=1}^3 \bar{x}_i e_i \quad (\text{III.4})$$

En mécanique des milieux continus, nous travaillons avec des champs, qui sont des fonctions du lieu et du temps :

$$f = f(x_1, x_2, x_3, t) \equiv f(x, t) \quad (\text{III.5})$$

Le taux de variation dans le temps de  $f$ , lorsque  $f$  est liée à  $X$ , s'appelle la dérivée matérielle de  $f$  et est notée par :

$$\dot{f} = \frac{\partial f(X, t)}{\partial t} \equiv \partial_t f(X, t) \quad (\text{III.6})$$

La vitesse d'une particule de fluide est définie par :

$$v = \dot{r} = \frac{\partial r(X,t)}{\partial t} \equiv \partial_i r(X,t) \Leftrightarrow v_i = \dot{x}_i = \frac{\partial x_i(X,t)}{\partial t} \quad (\text{III.7})$$

$v_i$  sont les composantes de la vitesse dans les directions des axes de coordonnées.

En mécanique des fluides, il est généralement plus pratique de travailler en configuration eulériennes  $(x,t)$ . Pour un choix particulier de la position  $x$ , une fonction  $f(x,t)$  est liée à la position  $x$ . La vitesse de la particule  $v(x,t)$  représente alors la vitesse de la particule  $X$  passant par la position  $x$  au temps  $t$ .

Pour trouver la dérivée matérielle d'une quantité intensive représentée par une fonction  $f(x,t)$  ; on remplace les coordonnées de la position  $x$  par les fonctions  $x(X,t)$  pour obtenir une fonction de particule.

$$f = f(x(X,t),t) \quad (\text{III.8})$$

En utilisant la règle de la chaîne de différenciation, nous pouvons écrire :

$$\dot{f} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} \quad (\text{III.9})$$

On introduit les notations suivantes :

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \partial_t f \quad \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_i} = f_{,i} \quad (\text{III.10})$$

De plus, nous reconnaissons les termes  $\partial x_i / \partial t$  dans l'équation (9) comme les composantes de vitesse  $v_i$ . d'où :

$$\dot{f} = \partial_t f + \partial f_{,i} v_i \quad (\text{III.11})$$

L'opérateur nabla est un opérateur vectoriel défini par :

$$\nabla = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\text{III.12})$$

Ce qui nous laisse écrire :

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{III.13})$$

L'expression de la dérivée matérielle de la fonction de  $f(x,t)$  peut maintenant être présentée par la formule :

$$\dot{f} = \partial_t f + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f \quad (\text{III.14})$$

L'accélération est définie comme le taux de variation de la vitesse dans le temps. L'accélération  $\mathbf{a}$  d'une particule fluide  $X$  passant par la position  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$  est alors :

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (\text{III.15})$$

## 3.2. Contraintes

Nous présentons quelques notions sur les contraintes, définies par le tenseur de Cauchy noté  $\overline{\overline{\sigma}}$ . Une facette d'un milieu continu de normale  $\overline{\overline{n}}$  est soumise à une densité surfacique de force  $\overline{dF} = \overline{\overline{T}} ds$ .  $\overline{\overline{T}}$  est appelé le vecteur contrainte et s'exprime :

$$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{\sigma}} \overline{\overline{n}} \quad (\text{III.16})$$

Avec  $\overline{\overline{\sigma}}$  est un tenseur symétrique qui est donné sous la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sigma_{ij} e_i \otimes e_j \quad (\text{III.17})$$

Considérons une surface dont l'orientation est quelconque. Dans le repère cartésien, sa normale peut se décomposer en :

$$\overline{\overline{n}} = n_x \overline{e}_x + n_y \overline{e}_y + n_z \overline{e}_z \quad (\text{III.18})$$

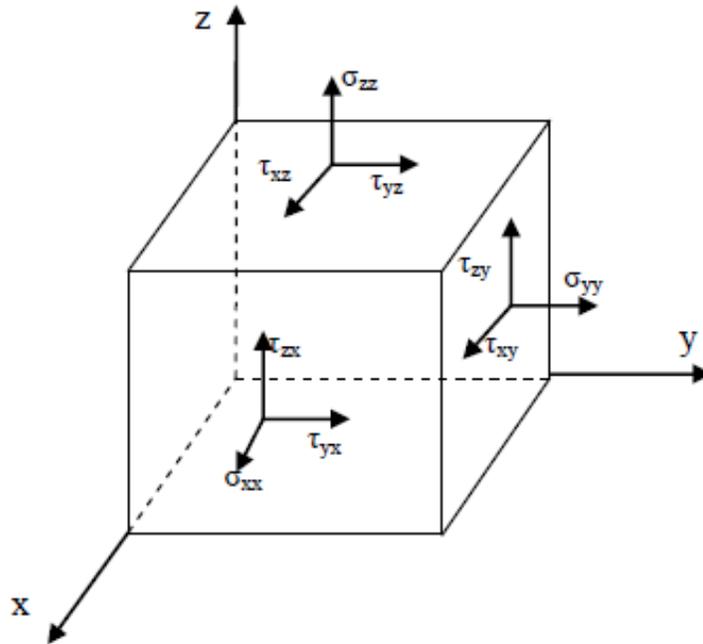


Figure 3.1 Etat de contrainte

Considérons une surface perpendiculaire à l'axe  $x$ . La normale à cette surface est :  $\bar{n} = \bar{e}_x$ . La contrainte exercée sur cette surface est alors notée :  $T_x$  et peut se décomposer comme suite :

$$\bar{T}_x = \sigma_{xx} \bar{e}_x + \tau_{xy} \bar{e}_y + \tau_{xz} \bar{e}_z \quad (\text{III.19})$$

On remarque que la contrainte exercée sur la surface se décompose en une composante normale et deux composantes tangentielles. On peut de même considérer la surface perpendiculaire à l'axe  $y$ .

On a ainsi la contrainte :

$$\bar{T}_y = \tau_{yx} \bar{e}_x + \sigma_{yy} \bar{e}_y + \tau_{zy} \bar{e}_z \quad (\text{III.20})$$

Et pour la surface  $\perp$  à l'axe  $z$  la contrainte s'exprime :

$$\bar{T}_z = \tau_{zx} \bar{e}_x + \tau_{zy} \bar{e}_y + \sigma_{zz} \bar{e}_z \quad (\text{III.21})$$

Le tenseur  $\sigma$  est appelé le tenseur des contraintes de Cauchy. Les composantes diagonales du tenseur des contraintes de Cauchy à savoir :  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont appelées les contraintes normales. Alors que les autres composantes à savoir :  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}$  et  $\tau_{zy}$  sont les contraintes de cisaillement.

Lorsque le milieu continu est au repos, ce qui implique que la vitesse du fluide est nulle à tout moment, toute contrainte agissant sur un élément de volume est appelée contrainte hydrostatique, sauf dans des cas très spécifiques de fluides non-newtoniens qui seront présentés dans les chapitres suivants. La contrainte hydrostatique est une contrainte normale, qui est indépendante de l'orientation. La contrainte hydrostatique peut être exprimée en notant  $-p$  :

$$\sigma = -p\mathbf{I} \quad (\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}) \quad (\text{III.22})$$

En incluant la contrainte hydrostatique, le tenseur des contraintes peut s'écrire comme suit :

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau \quad (\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}) \quad (\text{III.23})$$

Le tenseur des contraintes  $\tau$ , qui est souvent appelé tenseur des contraintes déviatoriques, peut inclure diverses composantes, en fonction du caractère physique du milieu continu, comme la compressibilité, la nature viscoélastique et les effets de champs externes (tels que les effets électromagnétiques).

### 3.3. Déformations

Une particule fluide à un temps  $t$  donnée est représenté par un vecteur position  $\mathbf{x} = x_i e_i$ .

La particule est animée d'une vitesse  $\mathbf{v} = v_i e_i$ . La dérivé  $d\mathbf{v}$  a les composantes suivantes :

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = v_{i,j} dx_j \quad (\text{III.24})$$

Les quantités  $v_{i,j}$  sont appelées gradient de vitesse et la matrice :

$$L_{ij} = v_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Est la matrice gradient de vitesse.

Le tenseur taux de déformation est défini par :

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T) \quad (\text{III.26})$$

Ou encore :

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

En coordonnées cartésiennes (x, y, z) le tenseur de déformation est donné par :

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  le tenseur de déformation est donné par :

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{r \partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{r \partial \theta} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{III.29})$$

### 3.4. Principe de conservation

#### 3.4.1. Equation de continuité

En mécanique classique, la masse d'un corps se conserve. Ce principe de conservation est appliqué en mécanique des milieux continus par l'affirmation que la masse de tout corps d'un milieu continu est constante.

Ce principe de conservation est traduit par l'équation de continuité qui peut être donnée par :

$$\partial_i \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \partial_i \rho + (\rho v_i)_{,i} = 0 \quad (\text{III.30})$$

Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité est remplacée par la condition d'incompressibilité :

$$\text{div}(\mathbf{v}) \equiv \nabla \cdot (\mathbf{v}) \Leftrightarrow v_{i,i} = 0 \quad (\text{III.31})$$

#### 3.4.2. Equation de conservation de quantité de mouvement

L'équation de conservation de quantité de mouvement, sous forme locale est donnée par :

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{T}_{i,i} + \rho \mathbf{f} \quad (\text{III.32})$$

Ou bien sous la forme :

$$\rho \dot{v}_i = \sigma_{ij,j} + \rho f_i \quad (\text{III.33})$$

Pour les fluides, il est commode d'exprimer les contraintes de Cauchy comme une somme d'une pression isotrope  $p$  et du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\tau}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}) \quad (\text{III.34})$$

L'équation générale de mouvement pour un fluide peut s'écrire sous la forme :

$$\rho(\partial_t v_i + v_j v_{i,j}) = -p_{,i} + \tau_{ij,j} + \rho f_i \quad (\text{III.35})$$

L'équation précédente sous forme vectorielle est donnée par :

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad (\text{III.36})$$

Le terme :  $\nabla p$  est le gradient de pression. Le vecteur  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$  et la divergence du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\tau}$ .

L'équation de quantité de mouvements est donnée en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_x \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \rho g_y \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

En coordonnées cylindriques l'équation est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta v_r}{r} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.38})$$

### 3.5. Les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont les équations résultantes des équations de mouvement pour un modèle de fluide newtonien. L'état de contrainte d'un fluide Newtonien *i.e.* incompressible visqueux en mouvement et donné par :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{III.39})$$

Avec :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (\text{III.40})$$

Au final la loi de comportement d'un fluide Newtonien incompressible s'énonce simplement :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (\text{III.41})$$

Les équations du mouvement d'un fluide newtonien dites les équations de Navier-Stokes sont obtenues en remplaçant la loi de comportement dans les équations de conservation de quantité de mouvement :

$$\rho(\partial_t v_i + v_j v_{i,j}) = -p_{,i} + \mu v_{i,jj} + \rho f_i \quad (\text{III.42})$$

L'équation précédente sous forme vectorielle est donnée par :

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad (\text{III.43})$$



# Chapitre 4

## Applications : Ecoulement de fluides réels dans les conduites



## Chapitre 4

# Applications : Ecoulement de fluides réels dans les conduites

### 4.1. Ecoulement entre deux plans parallèles

La figure 4.1 illustre l'écoulement d'un fluide entre deux plans parallèles séparés par une distance  $h$ . L'une des plaques est au repos tandis que l'autre se déplace à une vitesse constante  $v_1$ . L'écoulement est entraîné par le mouvement de la plaque, par un gradient de pression dans la direction  $x$ . Les équations constitutives du fluide seront spécifiées ci-dessous.



Figure 4.1 Ecoulement entre deux plans parallèles

Le fluide est supposé incompressible et l'écoulement laminaire permanent et unidirectionnel, le champ de vitesse peut être écrit selon la forme suivante :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u(y) \\ v = 0 \\ w = 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

Les conditions aux limites du problème sont données comme suite :

$$u(0) = 0 \quad u(h) = v_1 \quad (\text{IV.2})$$

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

L'équation de quantité de mouvements est donnée en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_x \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \rho g_y \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

À partir de ce point de l'analyse, nous devons spécifier un modèle de fluide en introduisant des équations constitutives. Trois modèles de fluide seront considérés : le fluide newtonien, un fluide de loi de puissance, et le fluide de Bingham.

a) **Fluide Newtonien** :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{IV.5})$$

Avec :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} \quad (\text{IV.6})$$

Où :

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

Ce qui nous laisse écrire le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

Et par conséquent le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

La simplification de l'équation de quantité de mouvement aboutit au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

La première équation est intégrée pour obtenir :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + Ay + B \quad (\text{IV.11})$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées à l'aide des conditions aux limites :

$$u(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad u(h) = v_1 \Rightarrow A = \frac{v_1}{h} - \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) h \quad (\text{IV.12})$$

Le champ de vitesse est maintenant donné par :

$$u(y) = \frac{h^2}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( \frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) + \frac{v_1}{h} y \quad (\text{IV.13})$$

La figure 4.2 montre les profils de vitesse pour certains cas particuliers:

- a. Gradient de pression nul  $\frac{\partial p}{\partial x} = a = 0$

$$u(y) = \frac{v_1}{h} y \quad (\text{IV.14})$$

- b. Gradient de pression positif  $\frac{\partial p}{\partial x} = a > 0$  :

$$u(y) = \frac{h^2 a}{2\mu} \left( \frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) + \frac{v_1}{h} y \quad (\text{IV.15})$$

- c. Gradient de pression négatif  $\frac{\partial p}{\partial x} = a < 0$  :

$$u(y) = \frac{h^2 a}{2\mu} \left( \frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) + \frac{v_1}{h} y \quad (\text{IV.16})$$

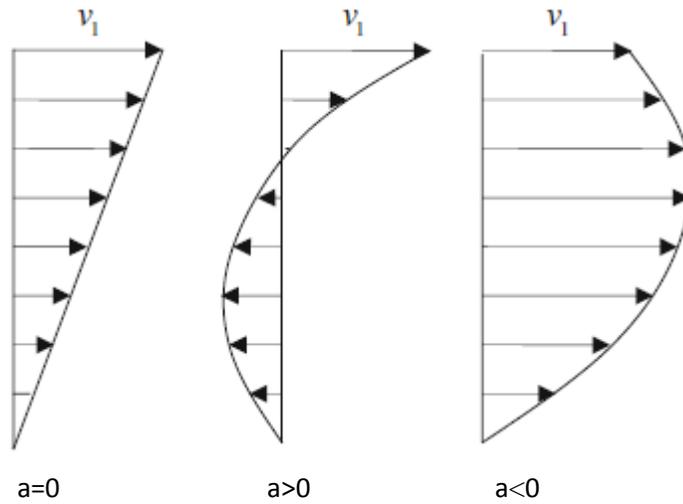


Figure 4.2 Profil de vitesse pour un écoulement de fluide Newtonien

b) **Fluide loi de puissance :**

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{IV.17})$$

Avec :

$$\tau_{ij} = 2k |\dot{\gamma}|^{n-1} D_{ij} \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{IV.18})$$

Ce qui nous laisse écrire le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\tau_{ij} = 2k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

Et par conséquent le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p & k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

La simplification de l'équation de quantité de mouvement aboutit au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

Nous choisirons les conditions suivantes pour simplifier nos écritures:

$$v_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x} < 0 \quad (\text{IV.22})$$

L'écoulement est symétrique autour du plan  $y=h/2$ . Les conditions aux limites peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$u(0) = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\frac{h}{2}} = 0 \quad (\text{IV.23})$$

L'intégration de la première équation de quantité de mouvement aboutit à :

$$u(y) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{n+1}{n}} + Ay + B \quad (\text{IV.24})$$

En appliquant les conditions aux limites précédemment définies, le champ de vitesse peut s'écrire de la manière suivante :

$$u(y) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{n+1}{n}} + \left( \frac{h}{2k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{n}} y \quad (\text{IV.25})$$

Si nous choisissons  $k = \mu$  et  $n = 1$ , la solution précédente se réduit à la solution pour un fluide Newtonien.

## 4.2. Ecoulement dans une conduite cylindrique

La figure 4.2 illustre l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique de rayon  $R$ . L'écoulement est entraîné par un gradient de pression négatif dans la direction  $z$ . Les équations constitutives du fluide seront spécifiées ci-dessous.

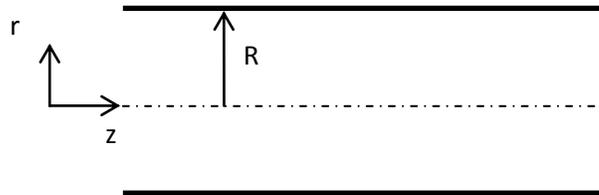


Figure 4.2 Ecoulement dans une conduite cylindrique

Le fluide est supposé incompressible et l'écoulement laminaire permanent et unidirectionnel, le champ de vitesse peut être écrit selon la forme suivante :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r = 0 \\ v_\theta = 0 \\ v_z(r) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

Les conditions aux limites du problème sont données comme suite :

$$v_z(R) = 0, \quad \left. \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (\text{IV.27})$$

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.28})$$

L'équation de quantité de mouvements est donnée en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta v_r}{r} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

À partir de ce point de l'analyse, nous devons spécifier un modèle de fluide en introduisant des équations constitutives. Trois modèles de fluide seront considérés : le fluide newtonien, un fluide de loi de puissance, et le fluide de Bingham.

a) **Fluide Newtonien** :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{IV.30})$$

Avec :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} \quad (\text{IV.31})$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, z) le tenseur de déformation est donné par :

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

Ce qui nous laisse écrire le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

Et par conséquent le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & \mu \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \\ 0 & -p & 0 \\ \mu \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

La simplification de l'équation de quantité de mouvement aboutit au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.35})$$

La première équation est intégrée pour obtenir :

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + A \ln(r) + B \quad (\text{IV.36})$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées à l'aide des conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \Rightarrow A = 0 \quad v_z(R) = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{4\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2 \quad (\text{IV.37})$$

Le champ de vitesse est maintenant donné par :

$$v_z(r) = \frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left( \frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \quad (\text{IV.38})$$

b) **Fluide Loi de puissance** :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{IV.39})$$

Avec :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} \quad (\text{IV.40})$$

En coordonnées cylindriques (r,  $\theta$ , z) le tenseur de déformation est donné par :

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.41})$$

Ce qui nous laisse écrire le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\tau_{ij} = 2k \left| \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right|^{n-1} D_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2k \left| \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2k \left| \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.42})$$

Et par conséquent le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 2k \left( \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right)^n \\ 0 & -p & 0 \\ 2k \left( \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right)^n & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (\text{IV.43})$$

La simplification de l'équation de quantité de mouvement aboutit au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right)^n \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

La première équation est intégrée pour obtenir :

$$v_z(r) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1+n}{n}} + B \quad (\text{IV.45})$$

La constante d'intégration B est déterminée à l'aide des conditions aux limites :

$$v_z(R) = 0 \Rightarrow B = -\frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1+n}{n}} \quad (\text{IV.46})$$

Le champ de vitesse est maintenant donné par :

$$v_z(r) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}} \left( \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right) \quad (\text{IV.47})$$

### 4.3. Ecoulement d'un film fluide

La figure 4.3 illustre le transport d'un fluide sous forme d'un film d'épaisseur constante  $h$  sur une large bande transporteuse. La largeur de la bande est  $l$ . La bande est inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale et se déplace à une vitesse constante  $v_1$ . Le fluide est de densité  $\rho$ :

Le fluide est supposé incompressible et l'écoulement laminaire permanent et unidirectionnel, le champ de vitesse peut être écrit selon la forme suivante :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u(y) \\ v = 0 \\ w = 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.48})$$

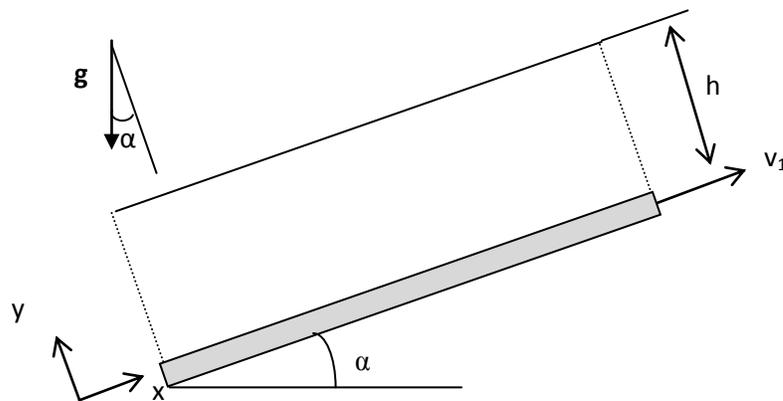


Figure 4.3 Ecoulement d'un film fluide

Les conditions aux limites du problème sont données comme suite :

$$u(0) = v_1 \quad , \quad \left. \frac{\partial u(y)}{\partial y} \right|_{y=\frac{h}{2}} = 0 \quad (\text{IV.49})$$

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.50})$$

L'équation de quantité de mouvements est donnée en coordonnées cartésiennes par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_x \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \rho g_y \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{array} \right. \quad (\text{IV.51})$$

Trois modèles de fluide seront considérés : le fluide newtonien, un fluide de loi de puissance, et le fluide de Bingham.

a) **Fluide Newtonien** :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{IV.52})$$

Avec :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} \quad (\text{IV.53})$$

Où :

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.54})$$

Ce qui nous laisse écrire le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.55})$$

Et par conséquent le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (\text{IV.56})$$

La simplification de l'équation de quantité de mouvement aboutit au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho g \sin \alpha = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \alpha = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.57})$$

La première équation est intégrée pour obtenir :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \right) y^2 + Ay + B \quad (\text{IV.58})$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées à l'aide des conditions aux limites :

$$u(0) = v_1 \Rightarrow B = v_1 \quad \left. \frac{\partial u(y)}{\partial y} \right|_{y=h} = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \right) h \quad (\text{IV.59})$$

Le champ de vitesse est maintenant donné par :

$$u(y) = \frac{h^2}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \right) \left( \frac{y^2}{h^2} - 2 \frac{y}{h} \right) + v_1 \quad (\text{IV.60})$$

**b) Fluide loi de puissance :**

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{IV.61})$$

Avec :

$$\tau_{ij} = 2k |\dot{\gamma}|^{n-1} D_{ij} \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{IV.62})$$

Ce qui nous laisse écrire le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\tau_{ij} = 2k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.63})$$

Et par conséquent le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p & k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (\text{IV.64})$$

La simplification de l'équation de quantité de mouvement aboutit au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho g \sin \alpha = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \alpha = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.65})$$

Les conditions aux limites peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$u(0) = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial u(y)}{\partial y} \right|_{y=h} = 0 \quad (\text{IV.66})$$

L'intégration de la première équation de quantité de mouvement aboutit à :

$$u(y) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{k} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \right) \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{n+1}{n}} + Ay + B \quad (\text{IV.67})$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées à l'aide des conditions aux limites :

$$u(0) = v_1 \quad \Rightarrow \quad B = v_1 \quad \left. \frac{\partial u(y)}{\partial y} \right|_{y=h} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = - \left( \frac{1}{k} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \right) \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.68})$$

En appliquant les conditions aux limites précédemment définies, le champ de vitesse peut s'écrire de la manière suivante :

$$u(y) = \left( \frac{n}{n+1} \right) \left( \frac{1}{k} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \right) \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{n+1}{n}} - \left( \frac{1}{k} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \right) \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.69})$$

Si nous choisissons  $k = \mu$  et  $n = 1$ , la solution précédente se réduit à la solution pour un fluide Newtonien.



# Chapitre 5

# Rhéométrie



# Chapitre 5

## Rhéométrie

### 5.1. Rhéomètre à cylindres concentriques

Le premier rhéomètre rotatif pratique a été l'instrument à cylindre concentrique de Maurice Couette (1890). Comme le montre la figure 5.1, Couette utilisait deux cylindres concentriques celui extérieure rotatif et un cylindre intérieur suspendu par un fil de torsion. La déviation angulaire du fil était mesurée par un miroir et indiquait le couple sur le cylindre intérieur. Aujourd'hui, la plupart des instruments commerciaux utilisent des concepts similaires. Les équations de travail reliant la contrainte de cisaillement aux mesures de couple, le taux de cisaillement à la vitesse angulaire, et les coefficients de contrainte normale à la différence de pression radiale sont données ci-dessous.

Considérons l'écoulement d'un fluide confiné entre deux cylindres concentriques, le cylindre intérieur tournant à une vitesse angulaire  $\Omega$ , comme le montre la Figure 5.1. Si nous supposons que l'écoulement est permanent, axisymétrique et laminaire.

Le champ de vitesse peut être écrit selon la forme suivante :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r = 0 \\ v_\theta = r\Omega \\ v_z = 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.1})$$

L'équation de quantité de mouvements est donnée en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} -\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \\ 0 = \frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

La première équation régit la contrainte normale, la seconde la contrainte de cisaillement et la troisième détermine simplement la pression hydrostatique dans l'interstice. Les conditions aux limites sont données par :

$$v_\theta(R_i) = R_i\Omega \quad , \quad v_\theta(R_o) = 0 \quad (\text{V.3})$$

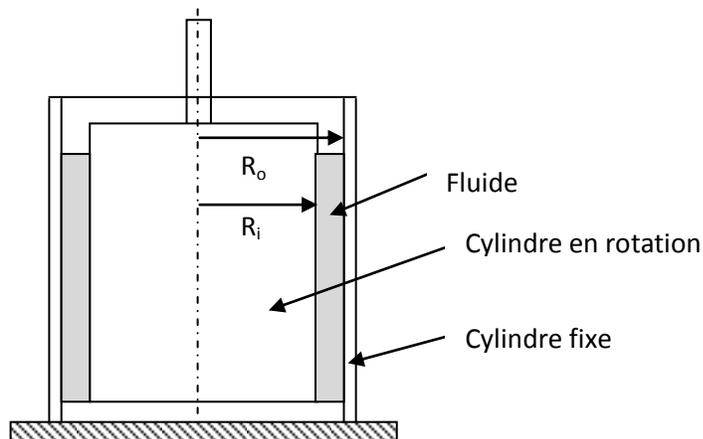


Figure 5.1 Rhéomètre à cylindres concentrique

#### a) Contrainte de cisaillement

La distribution de la contrainte de cisaillement à travers l'espace entre les cylindres est obtenue en intégrant la seconde équation :

$$\tau_{r\theta} = \frac{A}{r^2} \quad (\text{V.4})$$

où la constante d'intégration  $A$  peut être trouvée à partir d'une balance de couple. Si le couple est mesuré sur le cylindre intérieur  $M_i$ , alors :

$$\frac{M_i}{R_i} = \tau_{r\theta}(R_i) 2\pi R_i L \quad (\text{V.5})$$

Alors :

$$\tau_{r\theta}(R_i) = \frac{M_i}{2\pi R_i^2 L} \quad (\text{V.6})$$

### b) Déformation et taux de cisaillement

Pour des espaces très étroits ( $\kappa = R_i/R_o > 0,99$ ), la courbure peut être négligée et la déformation de cisaillement sera la même que celle entre deux plans parallèles.

$$\gamma = \frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{\theta \bar{R}}{R_o - R_i} \quad (\text{V.7})$$

où  $\theta$  est le déplacement angulaire du cylindre et  $\bar{R}$  le point médian entre les cylindres :

$$\bar{R} = \frac{R_o + R_i}{2} \quad (\text{V.8})$$

De même, le gradient de vitesse est constant dans l'espace comme dans un écoulement entre deux plans parallèles, et donc le taux de cisaillement est la moyenne dans l'espace :

$$\dot{\gamma}(R_i) = \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{\Omega_i \bar{R}}{R_o - R_i} \quad (\text{V.9})$$

A partir des composantes du tenseur de vitesse de déformation en coordonnées cylindriques, le taux de cisaillement est :

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) = r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \quad (\text{V.10})$$

## 5.2. Rhéomètre cône-plan

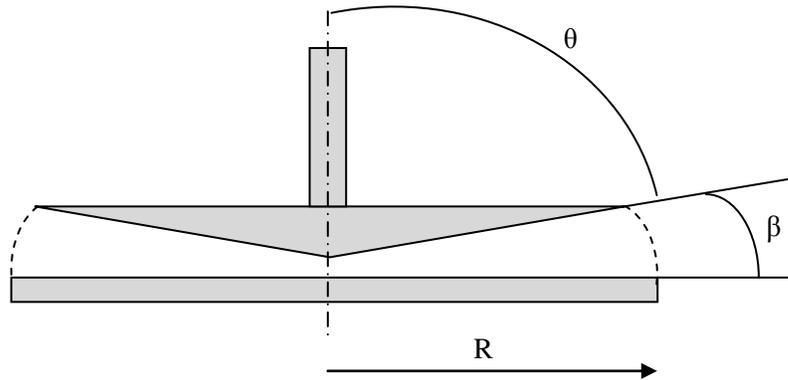


Figure 5.2 Rhéomètre cône-plan

Le viscosimètre le plus couramment utilisé pour mesurer les fonctions viscosimétriques d'un fluide est de type cône-plan. La figure 5.2 illustre ce viscosimètre qui se compose d'une plaque horizontale circulaire fixe et d'un cône rotatif. L'angle  $\beta$  entre la surface du cône et la plaque est très faible, généralement inférieur à  $4^\circ$ . Le fluide à étudier est placé dans l'espace entre le cône et la plaque. Les coordonnées sphériques conviennent au problème.

Le champ de vitesse peut être écrit selon la forme suivante :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r = 0 \\ v_\theta = 0 \\ v_\phi(r, \theta) \end{pmatrix} \quad (\text{V.11})$$

L'équation de quantité de mouvements est donnée en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} -\rho \frac{v_\phi^2}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \sigma_{rr})}{\partial r} - \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi}}{r} \\ 0 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sigma_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta} \cot \theta}{r} \\ 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{\theta\phi} \cot \theta \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

Les conditions aux limites sont données par :

$$v_{\phi}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad , \quad v_{\phi}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\Omega r \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \quad (\text{V.13})$$

Sachant que :  $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta=1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}\dots\cong 1$  alors :

$$v_{\phi}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad , \quad v_{\phi}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\Omega r \quad (\text{V.14})$$

#### a) Contrainte de cisaillement

La distribution de la contrainte de cisaillement à travers l'entrefer est obtenue en intégrant la troisième équation :

$$\tau_{\phi\theta} = \frac{A}{\sin^2 \theta} \quad (\text{V.15})$$

où la constante d'intégration A peut être trouvée à partir d'une balance de couple. Le couple est donné par :

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \tau_{\phi\theta} \Big|_{(\pi/2)} dr d\phi = \frac{2\pi R^3}{3} \tau_{\phi\theta} \Big|_{(\pi/2)} \quad (\text{V.16})$$

On note que  $\tau_{\phi\theta} \Big|_{(\pi/2)} = A = \tau_{\phi\theta}(\theta) \sin^2 \theta$  , alors:

$$\tau_{\phi\theta}(\theta) = \frac{3M}{2\pi R^3 \sin^2 \theta} \cong \frac{3M}{2\pi R^3} \quad (\text{V.17})$$

#### b) Déformation et taux de cisaillement

Puisque la contrainte de cisaillement est pratiquement constante, il s'ensuit que la déformation de cisaillement et le taux de cisaillement seront également constants.

$$\gamma = \frac{\phi}{\beta} \quad (\text{V.18})$$

D'une manière similaire :

$$\dot{\gamma} = \left| \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) \right| = \left| \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi}{r} \cot \theta \right| \quad (\text{V.19})$$

Sachant que  $\theta = \frac{\pi}{2} - \beta$  :

$$\cot \theta = \cot \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = \tan \beta \quad (\text{V.20})$$

Avec  $\beta$  angle très petit, une approximation peut être faite de la manière suivante :

$$\tan \beta \simeq \beta + \frac{\beta^3}{3} \quad (\text{V.21})$$

Le champ de vitesse peut être écrit de la manière suivante :

$$v_\phi = \Omega r \frac{(\pi/2) - \theta}{\beta} \quad (\text{V.22})$$

Alors le taux de cisaillement peut être écrit aussi :

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\beta} \left( 1 + \beta^2 + \frac{\beta^4}{3} \right) \approx \frac{\Omega}{\beta} \quad (\text{V.23})$$

### 5.3. Rhéomètre plan-parallèle

Le fluide est mis en mouvement entre deux disques circulaires plans et parallèles. Un disque est au repos tandis que l'autre tourne autour de son axe à une vitesse angulaire  $\Omega$  constante. La géométrie d'un rhéomètre à plans parallèles (plan-plan) est illustrée à la figure 5.3.

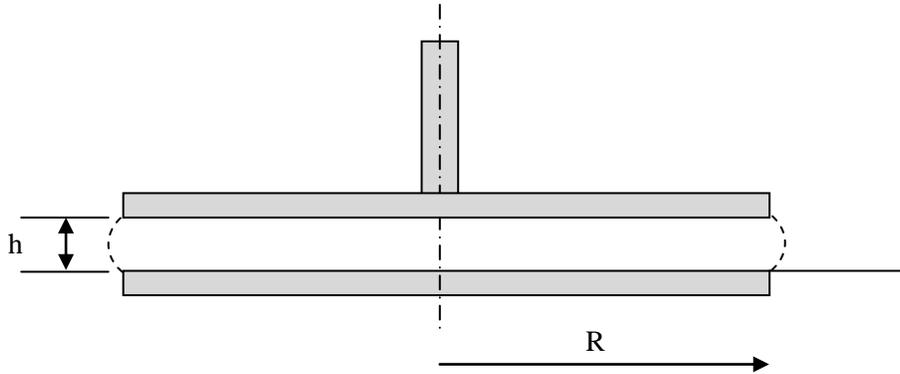


Figure 5.3 Rhéomètre plan-plan

L'espace ou la distance entre les plaques,  $h$ , doit être beaucoup plus petit que le rayon des plaques,  $R$ , pour assurer un écoulement homogène dans tout l'espace entrefer.

Le champ de vitesse peut être écrit selon la forme suivante :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r = 0 \\ v_\theta(r, z) \\ v_z = 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.24})$$

L'équation de quantité de mouvements est donnée en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} -\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \\ 0 = \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta} \\ 0 = \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{V.25})$$

Avec un disque immobile et l'autre en rotation à  $\Omega$  constante, en ne supposant aucun glissement à ces surfaces et en négligeant les forces d'inertie, la vitesse doit être :

$$v_\theta(r, z) = \frac{r\Omega z}{h} \quad (\text{V.26})$$

Et :

**a) Taux de déformation**

$$\gamma = \frac{r\theta}{h} \quad (\text{V.27})$$

**b) Taux de cisaillement**

$$\dot{\gamma}(r) = \frac{r\Omega}{h} \quad (\text{V.28})$$

Taux de cisaillement à  $r=R$

$$\dot{\gamma}_R = \frac{R\Omega}{h} \quad (\text{V.29})$$

**c) Contrainte de cisaillement**

La distribution de la contrainte de cisaillement à travers l'entrefer est obtenue :

$$\tau_{\theta z} = \frac{M}{2\pi R^3} \left[ 3 + \frac{d \ln M}{d \ln \dot{\gamma}_R} \right] \quad (\text{V.30})$$

# Chapitre 6

# Viscoélasticité linéaire des fluides



# Chapitre 6

## Viscoélasticité linéaire des fluides

### 6.1. Introduction

Si les contraintes dans un fluide dépendent à la fois des déformations et des vitesses de déformation, le fluide est caractérisé comme viscoélastique. En général, les contraintes dans un fluide viscoélastique dépendent de l'histoire de la déformation à laquelle le fluide a été soumis. Tous les fluides réels sont réellement viscoélastiques car la pression  $p$  est toujours une fonction de la déformation volumétrique. Mais si nous limitons la discussion aux modèles de fluides incompressibles, nous pouvons distinguer les modèles viscoélastiques des modèles purement visqueux.

Lorsque nous souhaitons analyser un problème d'écoulement non stationnaire pour un fluide viscoélastique, nous devons souvent utiliser des équations constitutives très complexes pour obtenir des résultats acceptables. Dans ce chapitre, nous discutons des modèles de fluides viscoélastiques linéaires qui sont relativement simples à appliquer et par conséquent ont un champ d'application relativement limité. Nous devons supposer que les déformations sont faibles dans l'intervalle de temps de l'étude et que les gradients de vitesse sont faibles. Cette dernière hypothèse implique que les taux de déformation et de rotation sont faibles. Les modèles peuvent être utilisés dans Les modèles peuvent être utilisés dans les analyses des petites déformations, mais aussi dans certains problèmes réels d'écoulement de fluide.

## 6.2. Fonction de relaxation et fonction de fluage

La fonction de relaxation  $\beta(\gamma_0, t)$  en cisaillement et la fonction de fluage  $\alpha(\tau_0, t)$  en cisaillement sont des fonctions matérielles entrant dans les équations constitutives de modèles de fluides linéairement viscoélastiques et sont des fonctions essentielles en viscoélasticité linéaire. Elles sont définies de la façon suivante :

- La fonction fluage,  $\alpha(\tau_0, t)$ , est la déformation subie par le matériau lorsqu'on impose à ce dernier une contrainte d'amplitude unité au temps  $t = 0$ , contrainte qui est maintenue constante (voir la figure 6.1).
- La fonction relaxation,  $\beta(\gamma_0, t)$ , est la contrainte résultant de l'application d'une déformation d'amplitude unité à l'instant initial  $t = 0$ , déformation qui est maintenue constante au cours du temps (voir la figure 6.2).

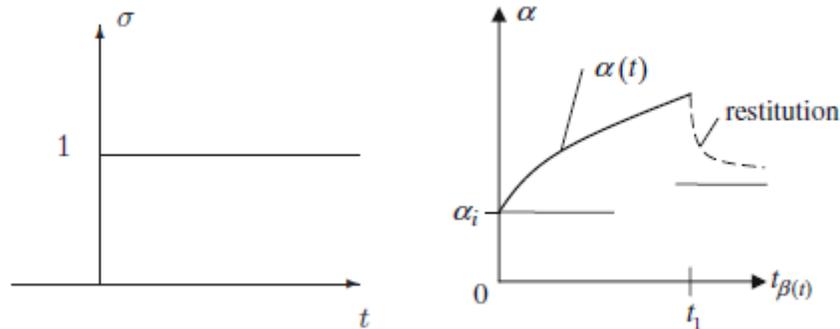


Figure 6.1 Fonction fluage

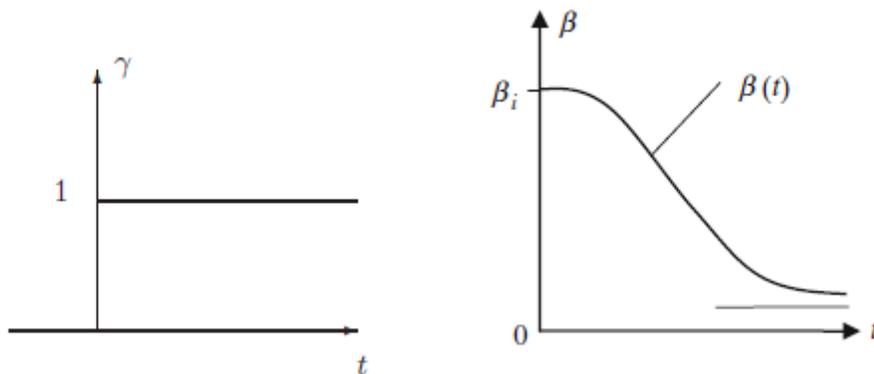


Figure 6.1 Fonction relaxation

La connaissance de la fonction fluage ou relaxation d'un matériau permet de déterminer toutes les propriétés viscoélastiques du matériau. Lorsqu'on dispose d'un rhéomètre imposant une contrainte constante (à contrainte imposée),  $\tau_0$ , on mesure une déformation  $\gamma(t) = \tau_0 \alpha(\tau_0, t)$ . Lorsqu'on dispose d'un rhéomètre imposant une déformation constante (à déformation imposée),  $\gamma_0$ , on mesure une déformation  $\tau(t) = \gamma_0 \beta(\gamma_0, t)$ .

Il est pratique dans la présentation mathématique d'introduire deux fonctions spéciales qui sont liées l'une à l'autre. La fonction de Heaviside est définie :

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (\text{VI.1})$$

La fonction delta de Dirac  $\delta(t)$  est définie par les propriétés suivantes :

$$\delta(t) = \dot{H}(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad (\text{VI.2})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t) dt = f(0) [H(t_2) - H(t_1)] \quad (\text{VI.3})$$

$f(t)$  est une fonction quelconque du temps  $t$ .

Dans un essai de relaxation en cisaillement, le fluide est soumis à une déformation de cisaillement constante  $\gamma_0$  à partir du temps  $t = 0$  : En utilisant la fonction de Heaviside, nous pouvons exprimer l'historique de la déformation par :

$$\gamma(t) = \gamma_0 H(t) \quad (\text{VI.4})$$

La contrainte de cisaillement  $\tau$  devient alors une fonction du taux de déformation en cisaillement  $\gamma_0$  et du temps  $t$ , et la fonction de relaxation générale en cisaillement  $\beta(\gamma_0, t)$  est maintenant définie par :

$$\tau(\gamma_0, t) = \beta(\gamma_0, t) \gamma_0 H(t) \quad (\text{VI.5})$$

Dans un essai de fluage, la déformation de cisaillement  $\gamma$  est enregistrée à la suite d'une contrainte de cisaillement constante  $\tau_0$  à partir du temps  $t = 0^+$  : L'historique de la contrainte de cisaillement est présenté comme :

$$\tau(t) = \tau_0 H(t) \quad (\text{VI.6})$$

L'historique des déformations en cisaillement qui en résulte définit la fonction générale de fluage en cisaillement  $\alpha(\tau_0, t)$  :

$$\gamma(\tau_0, t) = \alpha(\tau_0, t) \tau_0 H(t) \quad (\text{VI.7})$$

Pour les fluides viscoélastiques linéaires, la fonction de relaxation en cisaillement et la fonction de fluage en cisaillement sont fonctions du temps uniquement :

$$\beta = \beta(t) \quad , \quad \alpha = \alpha(t) \quad (\text{VI.8})$$

### 6.3. Modèles Mécaniques

Afin de comprendre physiquement la réponse viscoélastique, il est habituel de comparer le comportement du matériau viscoélastique sous une contrainte uni-axiale à celui des modèles mécaniques.

La figure 6.3a montre une éprouvette de matériau viscoélastique soumis à une force de traction axiale  $N$ . L'aire de la section transversale de l'éprouvette est  $A$ , et la longueur est  $L_0$  lorsque  $N = 0$ . L'éprouvette subit une contrainte uni-axiale  $\sigma = N/A$  ; et la déformation dans la direction axiale devient  $\varepsilon$ . Pour un matériau linéairement élastique, la loi de Hooke s'applique :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{VI.9})$$

$E$  est le module d'élasticité (module de Young).

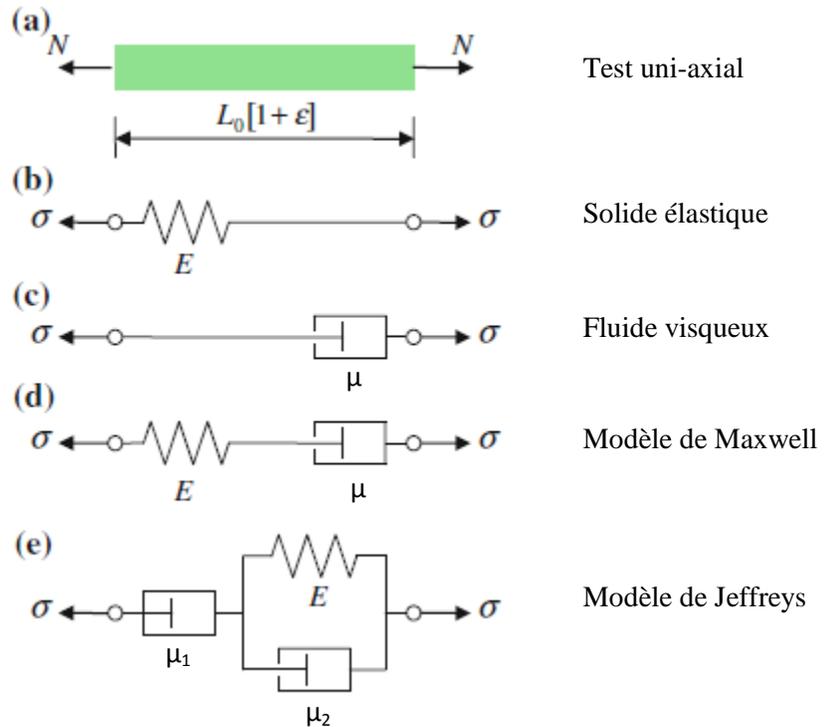


Figure 6.3 Modèles mécaniques

Le modèle mécanique illustré à la Fig. 6.3b est un ressort linéaire avec une constante de rigidité  $k$ . La force  $N = \sigma A$  entraîne un allongement  $\Delta L = \varepsilon L_0$ .

$$N = k\Delta L \Rightarrow \sigma A = k\varepsilon L_0 \Rightarrow \sigma = \frac{kL_0}{A} \varepsilon = E\varepsilon \Rightarrow k = \frac{EA}{L_0} \quad (\text{VI.10})$$

Ainsi, la loi de Hooke représente la réponse au modèle mécanique de la Fig. 6.3b et un matériau linéairement élastique en contrainte uni-axiale. De la même manière, le modèle linéaire de type amortisseur de la Fig. 6.3c à la même réponse qu'un matériau linéairement visqueux sous contrainte uni-axiale et l'équation de réponse est la suivante :

$$\sigma = \mu \dot{\varepsilon} \quad (\text{VI.11})$$

La figure 6.3d montre le modèle mécanique viscoélastique pertinent le plus simple pour la modélisation des fluides : le modèle de Maxwell. Le ressort fournit la contribution à la

déformation :  $\varepsilon_1 = \sigma/E$  ; et l'amortisseur entraîne une contribution à la vitesse de déformation :  $\dot{\varepsilon}_2 = \sigma/\mu$  .Le taux de déformation total pour le modèle mécanique de Maxwell est alors :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (\text{VI.12})$$

Cette équation est réarrangée en l'équation de réponse pour le modèle de Maxwell :

$$\sigma + \frac{\mu}{E} \dot{\sigma} = \mu \dot{\varepsilon} \quad (\text{VI.13})$$

La figure 6.3e montre le modèle de Jeffreys. L'équation de réponse de ce modèle est développée comme suit : L'amortisseur situé sur la gauche de la figure 6.3c contribue à la vitesse de déformation :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\sigma}{\mu_1} \quad (\text{VI.14})$$

L'élément parallèle du ressort et de l'amortisseur contribue à la déformation  $\varepsilon_2$  résultant en une contrainte  $E\varepsilon_2$  dans le ressort et une contrainte  $\mu_2\dot{\varepsilon}_2$  dans l'amortisseur. La contrainte totale dans l'élément parallèle est donc :

$$\sigma = E\varepsilon_2 + \mu_2\dot{\varepsilon}_2 \quad (\text{VI.15})$$

La déformation totale dans le modèle de Jeffreys est :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (\text{VI.16})$$

Ce qui nous laisse écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1) + \mu_2(\ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}_1) = E\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\mu_1}\right) + \mu_2\left(\ddot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{\mu_1}\right) \Rightarrow \\ \sigma + \frac{\mu_1 + \mu_2}{E} \dot{\sigma} &= \mu_1\dot{\varepsilon} + \frac{\mu_1\mu_2}{E} \ddot{\varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{VI.17})$$

Les modèles mécaniques présentés à la Fig. 6.3 sont plus appropriés pour les solides viscoélastiques. Cependant, les modèles peuvent donner une compréhension physique du

comportement viscoélastique des solides et des liquides. La réponse viscoélastique des liquides est généralement étudiée par des essais de cisaillement, par exemple avec un viscosimètre cylindrique. Ce fait sera reflété dans la présentation des équations constitutives générales dans la section suivante.

## 6.4. Lois constitutives

Dans cette section, nous présenterons les modèles les plus couramment utilisés pour les fluides isotropes, linéairement viscoélastiques et incompressibles. Chaque modèle est relié à un modèle mécanique correspondant.

Le fluide de Maxwell est défini par l'équation constitutive suivante :

$$\tau_{ik} + \lambda \dot{\tau}_{ik} = 2\mu D_{ik} \quad (\text{VI.18})$$

$\lambda$  est un paramètre temporel appelé temps de relaxation, et  $\mu$  est une viscosité. Pour un écoulement de cisaillement simple, les équations sont réduites à l'équation de réponse de la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  :

$$\tau + \lambda \dot{\tau} = \mu \dot{\gamma} \quad (\text{VI.19})$$

La fonction de relaxation en cisaillement  $\beta(t)$  est déterminée par intégration de l'équation de réponse pour l'historique des déformations en cisaillement :

$$\gamma(t) = \gamma_0 H(t) \quad (\text{VI.20})$$

avec la condition de contrainte de cisaillement :  $\tau(t) = 0$  lorsque  $t \leq 0$ . En substituant l'historique des déformations de cisaillement dans l'équation de réponse, on obtient l'équation différentielle :

$$\tau + \lambda \dot{\tau} = \mu \gamma_0 \delta(t) \quad (\text{VI.21})$$

Une solution particulière de l'équation homogène  $\tau + \lambda \dot{\tau} = 0$  est donnée par :  $\exp(-t/\lambda)$ . Nous supposons que la solution générale est de la forme suivante :

$$\tau(t) = C(t) \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \quad (\text{VI.22})$$

La fonction  $C(t)$  est déterminée à partir de l'équation inhomogène :

$$\dot{C}(t) = \frac{\mu}{\lambda} \gamma_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \delta(t) \quad (\text{VI.23})$$

Parce que  $\tau(t) = 0$  pour  $t < 0$  ;  $C(0) = 0$  : Ainsi pour tout  $t_0 < 0$  :

$$C(t) = \int_{t_0}^t \dot{C}(\bar{t}) d\bar{t} = \frac{\mu}{\lambda} \gamma_0 \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{\bar{t}}{\lambda}\right) \delta(\bar{t}) d\bar{t} = \frac{\mu}{\lambda} \gamma_0 H(t) \quad (\text{VI.24})$$

La réponse à l'historique des déformations de cisaillement :  $\gamma(t) = \gamma_0 H(t)$  est donc

$$\tau(t) = \frac{\mu}{\lambda} \gamma_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) H(t) \quad (\text{VI.25})$$

C'est la solution de l'équation différentielle sous la condition de contrainte  $\tau(t) = 0$  lorsque  $t < 0$ . La fonction de relaxation en cisaillement pour le fluide de Maxwell est donc :

$$\beta(t) = \frac{\mu}{\lambda} \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \quad (\text{VI.26})$$

La fonction de fluage en cisaillement  $\alpha(t)$  est déterminée par intégration de la réponse pour l'historique des contraintes de cisaillement :

$$\tau(t) = \tau_0 H(t) \quad (\text{VI.27})$$

avec la condition de déformation de cisaillement :  $\gamma(t) = 0$  lorsque  $t \leq 0$ . En substituant l'historique des contraintes de cisaillement dans l'équation de réponse, on obtient l'équation différentielle suivante différentielle :

$$\dot{\gamma} = \left[ \frac{1}{\mu} H(t) + \frac{\lambda}{\mu} \delta(t) \right] \tau_0 \quad (\text{VI.28})$$

L'intégration de cette équation à partir de n'importe quel moment  $t_0 \leq 0$  jusqu'au moment présent  $t$  donne :

$$\gamma = \int_{t_0}^t \dot{\gamma} dt = \frac{\tau_0}{\mu} \int_{t_0}^t H(t) dt + \frac{\lambda \tau_0}{\mu} \int_{t_0}^t \delta(t) dt = \frac{1}{\mu} (t + \lambda) \tau_0 H(t) \quad (\text{VI.29})$$

D'où l'on extrait la fonction de fluage en cisaillement pour un fluide de Maxwell :

$$\alpha(t) = \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 + \frac{t}{\lambda} \right) \quad (\text{VI.30})$$



**ANNEXE A :**  
**(Coordonnées cartésiennes)**

**1. Vecteur**

$$\overrightarrow{OM} = x\overline{e}_x + y\overline{e}_y + z\overline{e}_z \quad (\text{A.1})$$

Soit un vecteur arbitraire en coordonnées cartésiennes :  $\vec{V} = v_i e_i = v_x \overline{e}_x + v_y \overline{e}_y + v_z \overline{e}_z$

En notation matricielle on écrira parfois :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{d'où le vecteur transposé } \vec{V}^T = (v_x \quad v_y \quad v_z) \quad (\text{A.2})$$

**2. Produit scalaire**

Le produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{U}^T \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad (\text{A.3})$$

On notation indicielle :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_i \overline{e}_i \cdot v_j \overline{e}_j = u_i v_j \overline{e}_i \cdot \overline{e}_j = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_j \quad (\text{A.4})$$

Avec :  $\overline{e}_i \cdot \overline{e}_j = \delta_{ij}$  et  $\delta_{ij}$  est le symbole de kronecker avec  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

**3. Produit vectoriel**

Le produit vectoriel de deux vecteurs :

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

#### 4. Produit tensoriel

Le produit tensoriel de deux vecteurs :

$$\vec{U} \otimes \vec{V} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = u_i v_j \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \begin{pmatrix} u_x v_x & u_x v_y & u_x v_z \\ u_y v_x & u_y v_y & u_y v_z \\ u_z v_x & u_z v_y & u_z v_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

#### 5. Gradient

Le gradient d'une fonction scalaire en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \bar{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{e}_z \quad (\text{A.7})$$

Avec l'opérateur nabla donné par :

$$\bar{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Le gradient d'un vecteur en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\overline{\overline{\text{grad}}\vec{V}} = \overline{\nabla} \otimes \overline{\vec{V}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \overline{e}_i \otimes \overline{e}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

## 6. Laplacien

Le Laplacien d'une fonction scalaire en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.10})$$

Avec l'opérateur nabla donné par :

$$\Delta = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} = \overline{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.11})$$

## 7. Divergence

La divergence d'un vecteur en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\text{div}(\overline{\vec{V}}) = \overline{\nabla} \cdot \overline{\vec{V}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{A.12})$$

La divergence d'un tenseur en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\text{div}(\overline{\overline{A}}) = \overline{\nabla} \cdot \overline{\overline{A}} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \overline{e}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

## 8. Rotationnel

Le rotationnel d'un vecteur en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

## 9. Operateur d'advection

L'operateur d'advection en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) = v_i \frac{\partial}{\partial x_i} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.15})$$

L'advection d'un scalaire en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) f = v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.16})$$

L'advection d'un vecteur en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \begin{bmatrix} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot v_x \\ (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot v_y \\ (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

## 10. Les équations de mécanique des fluides

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{A.18})$$

La projection de l'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 = 0 \quad (\text{A.19})$$

L'équation de la quantité de mouvement est donnée par :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}}) \cdot \vec{V} \right) = \text{div}(\overline{\sigma}) + \rho \vec{g} \quad (\text{A.20})$$

L'équation de quantité de mouvements est donnée en coordonnées cartésiennes par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_x \\ \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \rho g_y \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{array} \right. \quad (\text{A.21})$$

---

**ANNEXE B :**  
**(Coordonnées cylindriques)**

**11. Vecteur**

$$\overrightarrow{OM} = r\overline{e}_r + z\overline{e}_z \quad (\text{B.1})$$

En coordonnées cylindrique :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

La base locale en chaque point est donnée par :

$$\begin{cases} \overline{e}_r = \cos \theta \overline{e}_x + \sin \theta \overline{e}_y \\ \overline{e}_\theta = -\sin \theta \overline{e}_x + \cos \theta \overline{e}_y \\ \overline{e}_z = \overline{e}_z \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Soit un vecteur arbitraire en coordonnées cylindrique :  $\overrightarrow{V} = v_i \overline{e}_i = v_r \overline{e}_r + v_\theta \overline{e}_\theta + v_z \overline{e}_z$

En notation matricielle on écrira parfois :

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{d'où le vecteur transposé } \overrightarrow{V}^T = (v_r \quad v_\theta \quad v_z) \quad (\text{B.4})$$

**12. Produit scalaire**

Le produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{U}^T \cdot \vec{V} = (u_r \quad u_\theta \quad u_z) \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = u_r v_r + u_\theta v_\theta + u_z v_z \quad (\text{B.5})$$

On notation indicielle :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_i \bar{e}_i \cdot v_j \bar{e}_j = u_i v_j \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_j \quad (\text{B.6})$$

Avec :  $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij}$  et  $\delta_{ij}$  est le symbole de kronecker avec  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

### 13. Gradient

Le gradient d'une fonction scalaire en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\overline{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \bar{e}_i = \frac{\partial f}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{e}_z \quad (\text{B.7})$$

Avec l'opérateur nabla donné par :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Le gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\overline{\text{grad}} \vec{V} = \vec{\nabla} \otimes \vec{V} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

#### 14. Laplacien

Le Laplacien d'une fonction scalaire en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{B.10})$$

#### 15. Divergence

La divergence d'un vecteur en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\text{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.11})$$

La divergence d'un tenseur en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} e_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{rz}}{\partial z} + \frac{A_{rr} - A_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{\theta z}}{\partial z} + \frac{A_{\theta r} + A_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} + \frac{A_{zr}}{r} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

#### 16. Rotationnel

Le rotationnel d'un vecteur en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\text{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} e_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

#### 17. Operateur d'advection

L'operateur d'advection en coordonnées cylindrique est donné par :

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) = \begin{bmatrix} v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

L'advection d'un scalaire en coordonnées cylindriques est donné par :

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})f = \begin{bmatrix} v_r \frac{\partial f}{\partial r} + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \\ v_r \frac{\partial f}{\partial r} + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \\ v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

L'advection d'un vecteur en coordonnées cylindriques est donné par :

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \begin{bmatrix} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot v_r \\ (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot v_\theta \\ (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

## 18. Les équations de mécanique des fluides

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{B.17})$$

La projection de l'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.18})$$

L'équation de la quantité de mouvement est donnée par :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}}) \cdot \vec{V} \right) = \text{div}(\overline{\sigma}) + \rho \vec{g} \quad (\text{B.19})$$

L'équation de quantité de mouvements est donnée en coordonnées cylindriques par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta v_r}{r} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.20})$$

---

# RHEOLOGIE : Exercices

---



# TDN°1 :

## Eléments d'analyse tensorielle

1) En appliquant la convention de sommation sur les indices, donner la signification des expressions suivantes:

$$(i) \sigma_{ii} \quad (ii) A_{ij}B_{ij} \quad (iii) \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

$$(iv) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_i} \quad (v) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0$$

2) Evaluer les expressions suivantes avec le delta Kronecker pour les indices variant de 1 à 3 :

$$(i) \delta_{ii} \quad (ii) \delta_{ij}\delta_{ij} \quad (iii) \delta_{ij}A_{ik}$$

3) Calculer :

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ij} & \delta_{ik} \\ \delta_{ji} & \delta_{jj} & \delta_{jk} \\ \delta_{ki} & \delta_{kj} & \delta_{kk} \end{vmatrix}$$

## TD N° 2

# Rhéologie

### QUESTION DE COURS :

- Définir la rhéologie.
- Citer les différents comportements de fluide non-Newtoniens indépendants du temps. Donner pour chacun le rhéogramme approprié et la loi de comportement adéquate pour sa modélisation.

### EXERCICE :

On réalise l'étude d'une boisson lactée grâce à un rhéomètre à vitesse imposée. Une série de mesures a été réalisée, les résultats sont donnés dans le tableau 1.

1. Définir la viscosité dynamique, et calculer les valeurs des viscosités.
2. De quel type de comportement rhéologique s'agit-il, proposer un modèle rhéologique.
3. Avec une transformation mathématique, la loi de comportement peut être écrite sous la forme d'une équation d'une droite:  $\ln(\tau) = \ln(k) + n \ln(\dot{\gamma})$ . Déterminer les constantes n et k dans le système international.

Contrainte (Pa)	Vitesse de Cisaillement (1/s)	Viscosité dynamique (Pa.s)
0,25059362	10	
0,40709053	20	
0,54069815	30	
0,77312374	50	
0,97844999	70	
1,25594322	100	

## TD N° 3

### Écoulement en conduite

#### PROBLEME :

Considérons un fluide non-newtonien avec une loi de comportement suivante :

$$\overline{\tau} = 2k\dot{\gamma}^{m-1}\overline{D}$$

Le tenseur de contrainte  $\overline{\sigma} = -p\overline{I} + \overline{\tau}$  et m est l'indice d'écoulement ( $0 < m < 1$ ), p la pression et k une constante.

Le tenseur taux de déformation  $\overline{D}$  est donné par :  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

1- Pour un écoulement en cisaillement simple, donnez les composantes du tenseur de contrainte et calculez le profil de vitesse en utilisant l'équation d'équilibre dynamique dans un repère cartésien (x, y, z) le vecteur vitesse est donné par :  $\vec{u} = (u(y), 0, 0)$ . Dans ce cas, pour le cisaillement simple la pression est constante dans la direction x ( $dp/dx = 0$ ).

2- Pour un écoulement de Poiseuille à l'intérieur d'un tube de rayon R et longueur L avec le même fluide non-Newtonien, calculez:

- Le profil de vitesse en fonction de l'indice d'écoulement m. Utilisez un repère axisymétrique  $\vec{u} = (0, 0, v_z(r))$ . Vérifier que pour m=1 on retrouve le profil parabolique valable pour un fluide Newtonien en régime laminaire.
- L'expression du débit volumique
- Le taux de cisaillement à la paroi en fonction du débit

## ANNEXE :

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{r \partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{r \partial \theta} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta v_r}{r} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) \end{cases}$$

## TD N° 4

### Écoulement en conduite

Considérons un fluide non-newtonien avec une loi de comportement suivante :

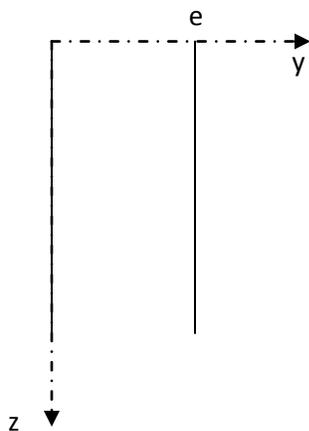
$$\overline{\tau} = 2k\dot{\gamma}^{m-1}\overline{D}$$

Le tenseur de contrainte  $\overline{\sigma} = -p\overline{I} + \overline{\tau}$  et  $m$  est l'indice d'écoulement ( $0 < m < 1$ ),  $p$  la pression et  $k$  une constante.

Le tenseur taux de déformation  $\overline{D}$  est donné par :  $\overline{D} = \frac{1}{2}(\overline{\text{gradV}} + \overline{\text{gradV}}^T)$

Pour un écoulement permanent, unidirectionnel, établi entre deux plans parallèles distant de  $e$  et un fluide en loi de puissance incompressible :

- 1- Donnez les composantes du tenseur taux de déformation
- 2- Donner les composantes du tenseur des contraintes
- 3- Donner les composantes du vecteur vitesse
- 4- Donner les conditions aux limites
- 5- Donnez l'expression du profil de vitesse dans un repère cartésien.
- 6- Donnez l'expression du débit.



## ANNEXE :

$$\overline{\overline{\text{grad}\vec{V}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_x \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) + \rho g_y \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{array} \right.$$

**Références**

Amiroudine, S., & Battaglia, J. L. (2011). *Mécanique des fluides*. Dunod.

Bernardin D., Introduction à la rhéologie des fluides, Notes de cours, L.E.M.T.A. UMR 7563. (Nancy).

Golay Frédéric –Bonelli Stéphane, Mécanique des milieux continus.

Gutierrez-Lemini, D. (2014). Engineering viscoelasticity (pp. 23-52). New York: Springer.

Irgens, F. (2014). *Rheology and non-newtonian fluids* (Vol. 1). New York: Springer International Publishing.

Verdier C., Cours de rhéologie, LIPhy, CNRS - Université Joseph Fourier (Grenoble I)

