Université Abderrahmane Mira de Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Cours et Exercices Corrigés de l'Algèbre II

Matière : Algèbre II

Conformément au Programme de

Première Année Parcours Ingénieur

Domaine Sciences de Technologie

Rédigé par : Dr. Rachid BOUKOUCHA

Année Universitaire : 2022 –2023

Table des matières

Préface

Le présent polycopié est intitulé «Cours et exercices corrigés d'algèbre II», s'adresse aux étudiants du Domaine Sciences et Technique : Parcours Ingénieur. Il couvre le programme officiel de la matière Algèbre II, qui est consacré au programme du deuxième semestre de la matière Algèbre II. Ce polycopié est rédigé de manière simplifiée et beaucoup d'exemples typiques sont introduits après avoir donné des notions afin que l'étudiant puisse assimiler le contenu du cours. On a inclus dans ce cours de nombreux exercices avec leurs solutions à la fin de chaque chapitre. J'espère que ce support aidera l'étudiant de première année à assimiler les mathématiques et plus particulièrement l'Algèbre II. Nous tenons à exprimer notre gratitude et notre reconnaissance aux deux spécialistes qui ont expertisé ce polycopié. Nous les remercions pour leur travail consciencieux et professionnel et pour leurs remarques toujours pertinentes. Comme toute première version de tout manuscrit, ce recueil peut contenir certaines erreurs et fautes de frappe, nous invitons le lecteur à nous les signaler afin d'améliorer la présentation et le contenu du présent manuscrit, merci de me les communiquer par Email à l'adresse : (rachid_boukecha@yahoo.fr) ou (rachid.boukoucha@univ-bejaia.dz).

Le contenu du matière d'Algèbre 2 est :

Chapitre 1 : Espaces vectoriels.

Définition (sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$). Sous-espaces vectoriels. Somme de sous-espaces. Sous-espaces supplémentaires. Famille libre. Famille liée. Base (finie).

Chapitre 2 : Applications linéaires.

Définition (Opérations). Noyau et image. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation de l'injection, surjection et de la bijection.

Chapitre 3 : Matrices, matrices associées et déterminants.

Définition. Matrices particulières. Opérations sur les matrices. L'espace vectoriel des matrices. Déterminants. Matrice inversible. Ecriture matricielle d'une application linéaire. Correspondance entre les opérations sur les applications linéaires et celles sur les matrices. Matrice de changement de bases. Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire.

Chapitre 4 : Systèmes d'équations linéaires.

Définitions et interprétations. Systèmes de Cramer (cas général).

Chapitre 5 : Réduction des matrices.

Valeurs et vecteurs propres. Polynômes caractéristiques. Théorème de Cayley-Hamilton. Caractérisation des matrices. Applications de la réduction.

Chapitre 1

Espaces Vectoriels

1.1 Introduction

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, espace de fonctions réelles, espace de matrices,...

1.2 Espace Vectoriel, Base, Dimension

Dans ce chapitre, $(\mathbb{k}, +, .)$ désigne un corps commutatif, en pratique $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. On note par $1_{\mathbb{k}}$ l'élément neutre pour la loi "."

1.2.1 Structure d'espace vectoriel

On appelle $\mathbb{k}-$espace vectoriel (ou espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$) tout ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $\oplus$ et d'une loi de composition externe notée $\otimes$

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & E \times E & \rightarrow & E \\ & (x, y) & \longmapsto & x \oplus y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \otimes: & \mathbb{k} \times E & \rightarrow & E \\ & (\lambda, y) & \longmapsto & \lambda \otimes y \end{array}$$

tels que :

1. $(E, \oplus)$ est un groupe abélien.
2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall x \in E$:

a) $(\lambda + \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x)$

b) $\lambda \otimes (\mu \otimes x) = (\lambda . \mu) \otimes x$

3. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k} : \lambda \otimes (x \oplus y) = (\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y)$
4. $\forall x \in E, 1_{\mathbb{k}} \otimes x = x$ avec $1_{\mathbb{k}}$ l'élément neutre de $\mathbb{k}$ pour la deuxième loi (la multiplication).

Lorsqu'on ne change pas le corps de base $\mathbb{k}$ on peut utiliser l'expression espace vectoriel au lieu de $\mathbb{k}-$espace vectoriel.

Exemple 1.1 *1)* $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \otimes: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\lambda, (x', y')) & \longmapsto & \lambda \otimes (x, y) = (\lambda . x, \lambda . y) \end{array}$$

$(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ *est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel.*

2) Le corps $\mathbb{k}$ *est un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel pour les lois* $+$ *et* $.$*, dans ce cas les éléments de* $\mathbb{k}$ *sont considérés simultanément comme vecteurs et scalaires.*

3) $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel et en général si* $\mathbb{k} \subset L$ *alors* L *est un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel.*

Théorème 1.2 *Soient* $(E, \oplus, \otimes)$ *un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel,* $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ *et* $x, y \in E$*, alors on a :*

1. $\lambda \otimes x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{k}}$ *ou* $x = 0_E$

2. $(\lambda - \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) - (\mu \otimes x)$

3. $\lambda \otimes (x - y) = (\lambda \otimes x) - (\lambda \otimes y)$

Appellations et conventions

- On appelle les éléments de E, les **vecteurs.**
- On appelle les éléments de $\mathbb{k}$, les **scalaires.**
- Loi de composition interne $\oplus$ sera notée par $+$
- Loi de composition externe $\otimes$ sera noté par $.$ ou $\times$

Théorème 1.3 *Soient* $(E, +, \times)$ *un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel,* $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ *et* $x, y \in E$*, alors on a :*

1) $\lambda.x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{k}}$ *ou* $x = 0_E$

2) $(\lambda - \mu).x = (\lambda.x) - (\mu.x)$

3) $\lambda.(x - y) = (\lambda.x) - (\lambda.y)$

Exemple 1.4 *1)* $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 ...., \mathbb{R}^n$ *sont des espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$*.*

2) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, est noté* $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*.*

3) L'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$*, est noté* $S(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*.*

4) L'ensemble des matrices à n *lignes et* p *colonnes à coefficients dans* $\mathbb{R}$*, est noté* $M_{n,p}(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*.*

5) L'ensemble des polynômes des degrés n *à coefficients dans* $\mathbb{R}$*, est noté* $\mathbb{R}[x]$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*.*

1.2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.1 *Soient E un $\Bbbk-$espace vectoriel et F un sous ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si et seulement si*

$$\begin{cases} 1)\ F \neq \emptyset, \\ 2)\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \beta \in \Bbbk, (\lambda.x + \beta.y) \in F. \end{cases}$$

Remarques

1. $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v. de E.
2. $\mathbb{R} \times \{0_{\mathbb{R}}\}$ est un s.e.v. de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur le corps $\mathbb{R}$.
3. Si F est un s.e.v. de E et E est un s.e.v. de G alors F est un s.e.v. de G.

Exemple 1.5 $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$.

F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E.

Exercise 1.6 *Soient les ensembles suivants :*

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}.$$
$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}.$$
$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}.$$

1) Montrer que F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que F_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) F_3 est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Solution.

1) Montrons que $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

On va montrer que :

$$F_1 \neq \emptyset \quad et \quad \forall X, Y \in F_1, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, (\lambda.X + \beta.Y) \in F_1.$$

On a : $F_1 \neq \emptyset$, car $(0, 0) \in F_1$.

Soient $X, Y \in F_1$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_1 \Rightarrow X = (x_1, x_2) \ \ et\ x_1 = x_2$$
$$Y \in F_1 \Rightarrow Y = (y_1, y_2) \ \ et\ y_1 = y_2$$

On a :

$$\begin{aligned} \lambda.X + \beta.Y &= \lambda.(x_1, x_2) + \beta.(y_1, y_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\beta y_1, \beta y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2) \end{aligned}$$

De plus on a : $\lambda x_1 + \beta y_1 = \lambda x_2 + \beta y_2$ *car* $x_1 = x_2$ *et* $y_1 = y_2$.

Alors, $\lambda.X + \beta.Y \in F_1$. *Donc,* F_1 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrons que : $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

On va montrer que :

$$F_2 \neq \emptyset \quad et \quad \forall X, Y \in F_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, (\lambda.X + \beta.Y) \in F_2.$$

On a : $F_2 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0, 0) \in F_2$, *puisque* $0 + 0 + 2.0 = 0$

Soient $X, Y \in F_2$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_2 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3) \;\; et \; x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 ...... (1)$$
$$Y \in F_2 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3) \;\; et \; y_1 + y_2 + 2y_3 = 0 ...... (2)$$

On a :

$$\begin{aligned} \lambda.X + \beta.Y &= \lambda.(x_1, x_2, x_3) + \beta.(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3) \\ &= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2, \lambda x_3 + \beta y_3) \end{aligned}$$

De plus on a :

$$(\lambda x_1 + \beta y_1) + (\lambda x_2 + \beta y_2) + 2(\lambda x_3 + \beta y_3) = \lambda \underbrace{((x_1 + x_2 + 2x_3))}_{(1)} + \beta \underbrace{(y_1 + y_2 + 2y_3)}_{(2)}$$

$$= \lambda.0 + \beta.0 = 0$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in F_2$. *Donc,* F_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

3) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$?

F_3 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$F_3 \neq \emptyset \quad et \quad \forall X, Y \in F_3, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_3.$$

On a : $(0, 0, 0) \notin F_3$ *car* $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$. *Alors,*

$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$ *n'est pas un sous espace vectoriel.*

Somme de sous-espaces

Définition 1.2 ***(Somme directe)***

Soient E *un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel et* F_1, F_2 *deux sous-espaces vectoriels de* E. *On dit que la somme* $F_1 + F_2$ *est directe si* $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ *et on note* $F_1 \oplus F_2$.

Proposition 1.1 ***(Caractérisation de la somme directe)***

Pour que deux sous-espaces vectoriels soient en somme directe, il faut et il suffit que tout élément de la somme $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique en somme d'un élément de F_1 et d'un autre de F_2. C'est à dire,

$$F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2 \iff \forall x \in F_1 + F_2, \exists! x_1 \in F_1 \text{ et } \exists! x_2 \in F_2 \text{ et } x = x_1 + x_2.$$

Sous-espaces supplémentaires

Définition 1.3 *Soient E un $\Bbbk-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. F_1, F_2 sont dits supplémentaires dans E si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et $F_1 + F_2 = E$.*

Exemple 1.7 *Soit $F_1 = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$.*

On a : F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

1.3 Dépendance, Indépendance linéaires

1.3.1 Combinaisons linéaires

Définition 1.4 *Soient E un $\Bbbk-$e.v. $v_1, v_2, ..., v_n \in E$. On appelle combinaison linéaires des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ tout vecteur v de E de la forme*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \text{où} \quad \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Bbbk.$$

Proposition 1.2 ***(Autre caractérisation d'un s.e.v. par les combinaisons linéaires)***

Soient E un $\Bbbk-$espace vectoriel et F un sous ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si et seulement si

$$\begin{cases} 1)\ F \neq \emptyset \\ 2)\ \forall (x, y) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \Bbbk^2, (\lambda x + \mu y) \in F. \\ \text{(i.e. } F \text{ est stable par combinaisons linéaires).} \end{cases}$$

1.3.2 Familles liées, familles libres

Définition 1.5 *Soient E un $\Bbbk-$e.v., $n \in \mathbb{N}^*$, $(v_1, v_2, ..., v_n) \in E^n$.*

1) On dit que la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est libre si et seulement si $\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ..., \lambda_n = 0_{\mathbb{k}}.$$

On dit aussi que les vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ sont linéairement indépendants.

2) On dit que la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est liée si et seulement si $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k} - \{0_{\mathbb{k}}\} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$.

Exemple 1.8 *1) Soient $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (2,1,-1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a : v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. Car, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.*

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \lambda_1 (1,0,1) + \lambda_2 (2,1,-1) = (0,0,0) \\
&\Longrightarrow (\lambda_1, 0, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2) = (0,0,0) \\
&\Longrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) = (0,0,0) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \qquad\qquad d'où,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

2) Soient $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,1)$, $v_3 = (-1,0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée. Car,

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^2}$, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^2} &\Longrightarrow \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (2,1) + \lambda_2 (-1,0) = (0,0) \\
&\Longrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_1 + 2(-\lambda_1) = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ n'est pas toujours vérifié, prenons $\lambda_1 = 1$ on aura : $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ et $v_1 - v_2 - v_3 = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$, c'est à dire $v_1 = v_2 + v_3$.

Remarque 1.1 *1) Pour que la famille $\{v\}$ soit liée il faut et il suffit que $v = 0_E$.*

2) $\forall v \in E, \{v, v\}$ est liée $v - v = 0_E$.

3) Toute famille contenant 0_E est liée.

4) Si la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est liée alors tout v_i s'écrit comme combinaison linéaires des autres.

5) La famille $\{v_1, v_2\}$ est liée si et seulement si v_1 est un multiple de v_2 ou v_2 est un multiple de v_1.

1.3.3 Sous-espace engendré par une partie

Définition 1.6 *Soient E un $\mathbb{k}-$e.v. et $A \subset E$. On appelle s.e.v. engendré par A l'intersection de tous les s.e.v. de E contenant A et on le note $\langle A \rangle$ ou bien*

$$Vect\,(A) = \cap_{\substack{F s.e.v \\ A \subset F}} F.$$

En d'autres termes, si $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$,

$$\langle A \rangle = \left\{ v \in E : \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right\}.$$

1.3.4 Familles génératrices, bases

Définition 1.7 *Soient E un $\mathbb{k}-$e.v. et $G \subset E$. On dit que G est une famille génératrice de E si et seulement si $G = E$. C'est à dire si $G = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, on dit que G engendre E (ou G est une partie génératrice de E) si et seulement si*

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Définition 1.8 *Soient E un $\mathbb{k}-$e.v. et B une partie de E.*

On dit que B est une base de E si et seulement si B à la fois est libre et génératrice de E.

C'est à dire, si on pose $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, alors B est une base de E si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists! \, (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{k}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Dans ce cas, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont appelés les coordonnées (ou bien les composantes) de x dans la base B.

Définition 1.9 *La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie E, notée* $\dim E$, *est par définition le nombre d'éléments d'une base .*

Un espace vectoriel E admettant une base ayant un nombre fini d'éléments est dit de dimension finie.

Théorème 1.9 *(Théorème de la dimension).*

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

Convention. On convient d'attribuer à l'espace vectoriel $\{0_E\}$ la dimension 0.

La base canonique de $\mathbb{R}^2$

Définition 1.10 *Soit $B = \{e_1, e_2\}$ où $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$. L'ensemble B est dite la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Car :*

a) B est libre, en effet : soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} &\Rightarrow \alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \\ &\Rightarrow (\alpha, \beta) = (0,0) \text{ d'où, } \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

b) B engendre $\mathbb{R}^2$, en effet, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donc $\exists \lambda_1 = x \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = y \in \mathbb{R}$:

$$(x,y) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1).$$

Donc, B engendre $\mathbb{R}^2$ de plus B est libre dans $\mathbb{R}^2$, alors B est une base de $\mathbb{R}^2$.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$

Définition 1.11 *Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. L'ensemble B est dite base canonique de $\mathbb{R}^3$. Car :*

a) B est libre, en effet : soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \text{ et } \gamma = 0. \end{aligned}$$

Donc, B est libre.

b) B engendre $\mathbb{R}^3$, en effet, soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\exists ? \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists ? \lambda_2 \in \mathbb{R}, \exists ? \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1).$$

On a : $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$, d'où, $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$ et $\lambda_3 = z$. Donc, B engendre $\mathbb{R}^3$ de plus B est libre dans $\mathbb{R}^3$, alors B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercise 1.10 *1) Montrer que $B = \{e_1, e_2\}$ où $e_1 = (1,1), e_2 = (2,3)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.*

2) Montrer que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1,3,2), e_2 = (2,1,-1), e_3 = (1,-1,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1) Montrons que $B = \{e_1, e_2\}$ *où* $e_1 = (1,1), e_2 = (2,3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

a) Montrons que B *est libre. Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on suppose que* $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\text{On a : } \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Longrightarrow \alpha(1,1) + \beta(2,3) = (0,0)$$
$$\Longrightarrow (\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta) = (0,0)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \ldots\ldots. (1) \\ \alpha + 3\beta = 0 \ldots\ldots. (2) \end{cases}.$$

de $(2) - (1)$ *on a :* $\beta = 0$, $(1) \Rightarrow \alpha = -2\beta = 0$. *On conclut,* $\alpha = \beta = 0$, *d'où* B *est libre.*

b) Montrons que B *engendre* $\mathbb{R}^2$: *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists?\lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists?\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tel que :* $(x,y) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,3)$. *On a :*

$$(x,y) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,3) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \ldots\ldots. (1) \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = y \ldots\ldots. (2) \end{cases}$$

De $(2) - (1)$ *on a :* $\lambda_2 = y - x$ *et* $(1) \Rightarrow \lambda_1 = x - 2\lambda_2 = 3x - 2y$.

On conclut : $\exists \lambda_1 = 3x - 2y \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = y - x \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x,y) = (3x - 2y)(1,1) + (y - x)(2,3).$$

Donc, $B = \{e_1, e_2\}$ *où* $e_1 = (1,1), e_2 = (2,3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrons que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1,3,2), e_2 = (2,1,-1), e_3 = (1,-1,1)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

a) Montrons que B *est libre : Soient* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que:* $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. *On a :*

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1,3,2) + \beta(2,1,-1) + \gamma(1,-1,1) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow (\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + \beta - \gamma, 2\alpha - \beta + \gamma) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \ldots\ldots. (1) \\ 3\alpha + \beta - \gamma = 0 \ldots\ldots. (2) \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots. (3) \end{cases}$$

De $(2) + (3)$ *on a :* $5\alpha = 0$ *d'où* $\alpha = 0$.

De $((1) + (2))$ *et* $(\alpha = 0)$ *on a :* $3\beta = 0$ *d'où* $\beta = 0$ *et on aura aussi* $\gamma = 0$.

On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, *d'où* B *est libre.*

b) Montrons que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1,3,2), e_2 = (2,1,-1), e_3 = (1,-1,1)$ *engendre* $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\exists?\lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists?\lambda_2 \in \mathbb{R}, \exists?\lambda_3 \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x, y, z) = \lambda_1 (1, 3, 2) + \lambda_2 (2, 1, -1) + \lambda_3 (1, -1, 1).$$

On a : $(x, y, z) = \lambda_1 (1, 3, 2) + \lambda_2 (2, 1, -1) + \lambda_3 (1, -1, 1)$ *d'où*
$(x, y, z) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)$ *on obtient le système suivant :*

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = x .... (1) \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = y .... (2) \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = z .... (3) \end{cases}$$

de $(2) + (3)$, *on a:* $5\lambda_1 = y + z$ *d'où* $\lambda_1 = \frac{y+z}{5}$ *et de* $(1) + (2)$ *on a:* $\lambda_2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}\lambda_1$.

d'où, $\lambda_2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z\right) = \frac{5x + y - 4z}{15}$ *et de* (1), *on aura :*

$$\lambda_3 = x - 2\lambda_2 - \lambda_1 = x - 2\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{15}y - \frac{4}{15}z\right) - \left(\frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z\right) = \frac{x - y + z}{3}$$

On conclut :

$$\exists\lambda_1 = \frac{y+z}{5} \in \mathbb{R}, \quad \exists\lambda_2 = \frac{5x + y - 4z}{15} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \exists\lambda_3 = \frac{x - y + z}{3} \in \mathbb{R},$$

tel que :

$$(x, y, z) = \frac{y+z}{5}(1, 3, 2) + \frac{5x + y - 4z}{15}(2, 1, -1) + \frac{x - y + z}{3}(1, -1, 1).$$

Donc, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1, 3, 2), e_2 = (2, 1, -1), e_3 = (1, -1, 1)$ *engendre* $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.3 *Soient* F_1, F_2 *deux familles de vecteurs de* E *telles que* $F_1 \subset F_2$, *alors on a*

a) Si F_2 *est libre alors* F_1 *est libre.*

b) Si F_1 *engendre* E *alors* F_2 *engendre* E.

Proposition 1.4 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*, F_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}, F_2 = F_1 \cup \{v_{n+1}\} = \{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}\}$ *deux s.e.v. de* E, *alors on a*

a) F_1 *est libre et* $v_{n+1} \notin \langle F_1 \rangle \Longrightarrow F_2$ *est libre.*

b) F_2 *engendre* E *et* $v_{n+1} \in \langle F_1 \rangle \Longrightarrow F_1$ *engendre* E.

1.4 Théorie de la dimension

Définition 1.12 *Soit E un $\Bbbk-$e.v. On appelle dimension de E le cardinal d'une base B de E et on note* $\dim E = card B$.

Exemple 1.11 *a)* $E = \mathbb{R}^n, B_{\mathbb{R}^n} = \{e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)\}$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

b) La famille $L = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, u_i \in \mathbb{R}^3$ *ne peut pas être une base de* $\mathbb{R}^3$ *car :* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ *et* $card L = 4$.

Théorème de la base incomplète

Soient E un $\Bbbk-$e.v. de dimension finie $\dim E = n$, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et soit $L = \{u_1, u_2, ..., u_r\}, r \leq n$ une famille libre de E. Alors il existe au moins une façon de compléter L par $(n-r)$ vecteurs de B pour obtenir une nouvelle base de E.

Exemple 1.12 $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* $L = \{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 1)\}$ *une famille libre de* $\mathbb{R}^3$. *On peut prendre* $e_3 = (0, 0, 1)$ *de* B *pour compléter* L *et avoir une nouvelle base de* $\mathbb{R}^3$. $L' = \{u_1, u_2, e_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.5 *Soit E un $\Bbbk-$e.v. de dimension finie* $\dim E = n$, *alors*

1. *Toute famille libre admet au plus n éléments.*
2. *Toute famille génératrice admet au moins n éléments.*
3. *Toute base de E admet exactement n éléments.*

Proposition 1.6 *Soit E un $\Bbbk-$e.v. de dimension finie* $\dim E = n$ *et soit F une famille finie d'éléments de E. On a :.*

1. *Si $card F = n$ et F est libre, alors F est une base de E.*
2. *Si $card F = n$ et F est génératrice, alors F est une base de E.*

Exercise 1.13 *Soient* $A = \{(2, 1), (-1, 1)\}$ *et* $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

1) Montrer que A est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1) Montrons que $A = \{(2, 1), (-1, 1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

On a $cardA = 2 = \dim \mathbb{R}^2$*, donc il suffit de montrer que* A *est libre ou bien* A *est génératrice.*

Montrons que $A = \{(2,1), (-1,1)\}$ *engendre* $\mathbb{R}^2$*.*

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*,* $\exists ? \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists ? \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tel que :* $(x, y) = \lambda_1 (2,1) + \lambda_2 (-1,1)$*.* *On a :*

$$(x, y) = \lambda_1 (2,1) + \lambda_2 (-1,1) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = x \ldots\ldots. (1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y \ldots\ldots. (2) \end{cases}$$

De $(1) + (2)$ *on a :* $\lambda_1 = \dfrac{x+y}{3}$*.* *De* (1) *on a :* $\lambda_2 = 2\lambda_1 - x = \dfrac{2y-x}{3}$*.*

On conclut : $\exists \lambda_1 = \dfrac{x+y}{3} \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = \dfrac{2y-x}{3} \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x, y) = \frac{x+y}{3} (2,1) + \frac{2y-x}{3} (-1,1).$$

Donc A *est engendre* $\mathbb{R}^2$*. On a* $cardA = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ *et* A *est engendre* $\mathbb{R}^2$*, alors* A *est une base de* $\mathbb{R}^2$*.*

2) Montrons que $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

On a $cardB = 3 = \dim \mathbb{R}^3$*, donc il suffit de montrer que* B *est libre ou bien* B *est génératrice.*

Montrons que $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^3$*.*

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*, on suppose que :*

$$\alpha (1,1,0) + \beta (1,0,1) + \gamma (0,1,1) = (0,0,0).$$

$$\text{On a : } \alpha (1,1,0) + \beta (1,0,1) + \gamma (0,1,1) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \ldots\ldots. (1) \\ \alpha + \gamma = 0 \ldots\ldots. (2) \\ \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots. (3) \end{cases}$$

De $(1) - (2) \Rightarrow \beta = \gamma$ *et* $(3) \Rightarrow 2\gamma = 0$*, d'où* $\gamma = 0$ *et* $\beta = 0$ *et* $(1) \Rightarrow \alpha = 0$

On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0$*, d'où* B *est libre.*

On a : $cardB = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ *et* B *est libre dans* $\mathbb{R}^3$*, alors* B *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

Proposition 1.7 *Soit* E *un* $\mathbb{k}-$*e.v. de dimension finie, alors tout s.e.v.* F *de* E *est de dimension finie et on a :* $\dim F \leq \dim E$*.*

Proposition 1.8 *Soit* F *un s.e.v. de* E *avec* $dimE = n, \dim F = p$*, alors*

1. *F admet un supplémentaire dans* E*.*
2. *Tout supplémentaire de* F *dans* E *est de dimension* $n - p$*.*

Corollaire 1.14 *Soient E un $\mathbb{k}-$e.v. de dimension finie, F et G sont deux s.e.v. de E, alors*

$$\left.\begin{array}{r} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{array}\right\} \Longrightarrow F = G.$$

Preuve. $F \subset G \Longrightarrow F$ admet un supplémentaire H dans G.
$\dim H = \dim G - \dim F = 0 \Longrightarrow H = \{0_E\}$, donc

$$G = F + H = F + \{0_E\} = F.$$

■

Théorème 1.15 ***(Formule de Grassmann)***
Soient E un $\mathbb{k}-$e.v. de dimension finie. Pour tout F, G s.e.v. de E.

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G).$$

Ce théorème est appelé aussi théorème des quatre dimensions.

Corollaire 1.16 *Si F et G sont deux s.e.v. de E en somme directe. Alors*

$$\dim (F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 1.13 *Soit E un $\mathbb{k}-$e.v. et F une famille d'éléments de E. On appelle rang de F et on note rgF le nombre maximal de vecteurs de F qui sont linéairements indépendants.*

Attention. Ne pas confondre entre cardinal d'une famille (nombre d'éléments de la famille) et le rang d'une famille (nombre maximal d'éléments linéairements indépendants).

Exemple 1.17 *Soit $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.*
On a : $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha (1,1,0) + \beta (1,0,1) + \gamma (0,1,1) = (0,0,0)$, on aura : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
D'où les vecteurs de B qui sont linéairements indépendants, donc $rgB = 3$

Exemple 1.18 *Soit $F = \{(1,2), (1,0), (1,-1)\}$ avec $v_1 = (1,2), v_2 = (1,0), v_3 = (1,-1)$.*
remarquons que $v_1 = 3v_2 - 2v_3$ donc toute famille de 3 vecteurs est liée, on déduit que $rgF \leq 2$.
Mais, $\{v_2, v_3\}$ est libre, en effet : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha (1,0) + \beta (1,-1) = (0,0)$, on aura : $\alpha = \beta = 0$. Alors, $rgF = 2$.

1.5 Exercices corrigés

Exercise 1.19 *1) On considère les vecteurs* $v_1 = (1, -1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, 1)$, $v_3 = (3, 3, -2, 1)$, *on note* $E_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Déterminer une base de E_1.

2) Soit $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x - z - t = 0\}$.

Montrer que E_2 *est s.e.v de* $\mathbb{R}^4$ *et en donner une base.*

Solution.

1) $E_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ *où* $v_1 = (1, -1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, 1)$ *et* $v_3 = (3, 3, -2, 1)$.

Déterminons une base de E_1 :

Vérifions d'abord si $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est linéairement indépendante dans* $\mathbb{R}^4$:

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*: $\alpha(1, -1, 2, 1) + \beta(1, 1, 0, 1) + \gamma(3, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$.

$$\text{On a : } \alpha(1, -1, 2, 1) + \beta(1, 1, 0, 1) + \gamma(3, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (1) \\ -\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \\ 2\alpha - 2\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{cases}$$

De $(1) - (2)$ *on a :* $2\alpha = 0$, *donc* $\alpha = 0$ *et de* $(3) \Rightarrow \gamma = \alpha$ *donc* $\gamma = 0$ *et* $(4) \Rightarrow \beta = -\alpha - \gamma$, *d'où* $\beta = 0$.

On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, *d'où* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^4$.

On a : $\{v_1, v_2, v_3\}$ *engendre* E_1 *et libre, alors* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est une base de* E_1 *et* $\dim E_1 = 3$

2) Soit $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x - z - t = 0\}$.

Montrons que E_2 *est s.e.v de* $\mathbb{R}^4$ *et en donnons une base.*

E_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *si et seulement si :*

$$E_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in E_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in E_2.$$

On a : $E_2 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0, 0, 0) \in E_2$, *puisque* $0 - 0 + 0 - 2.0 = 0$ *et* $0 - 0 - 0 = 0$

Soient $X, Y \in E_2$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in E_2 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0,\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \ldots\ldots (1)$$
$$Y \in E_2 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \text{ et } y_1 - y_2 + y_3 - 2y_4 = 0,\ y_1 - y_3 - y_4 = 0 \ldots\ldots (2)$$

On a :

$$\lambda.X+\beta.Y=\lambda.\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)+\beta.\left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)$$
$$=\left(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\lambda x_4\right)+\left(\beta y_1,\beta y_2,\beta y_3,\beta y_4\right)$$
$$\left(\underbrace{\lambda x_1+\beta y_1}_{z_1},\underbrace{\lambda x_2+\beta y_2}_{z_2},\underbrace{\lambda x_3+\beta y_3}_{z_3},\underbrace{\lambda x_4+\beta y_4}_{z_4}\right)$$

De plus on a :

$$z_1-z_2+z_3-2z_4=\left(\lambda x_1+\beta y_1\right)-\left(\lambda x_2+\beta y_2\right)+\left(\lambda x_3+\beta y_3\right)-2\left(\lambda x_4+\beta y_4\right)$$
$$=\lambda\left(x_1-x_2+x_3-2x_4\right)+\beta\left(y_1-y_2+y_3-2y_4\right)=\lambda.0+\beta.0=0$$

$$z_1-z_3-z_4=\left(\lambda x_1+\beta y_1\right)-\left(\lambda x_3+\beta y_3\right)-\left(\lambda x_4+\beta y_4\right)$$
$$=\lambda\left(x_1-x_3-x_4\right)+\beta\left(y_1-y_3-y_4\right)=\lambda.0+\beta.0=0$$

D'où $\lambda.X+\beta.Y\in E_2$ *, donc,* E_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

Donnons une base à $E_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x-y+z-2t=0 \text{ et } x-z-t=0\}$

Cherchons d'abord une famille génératrice à E_2*. On a :*

$$\begin{cases} x-y+z-2t=0 \\ x-z-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+3z \\ t=x-z \end{cases}$$

Soit $(x,y,z,t)\in E_2$.

$$(x,y,z,t)\in E_2\Rightarrow(x,y,z,t)=(x,-x+3z,z,x-z)$$
$$\Rightarrow(x,y,z,t)=(x,-x,0,x)+(0,3z,z,-z)$$
$$\Rightarrow(x,y,z,t)=x\,(1,-1,0,1)+(0,3,1,-1)$$

Alors, $E_2=\langle w_1,w_2\rangle$ *où* $w_1=(1,-1,0,1)\,,w_2=(0,3,1,-1)\,.$

Vérifions si $\{w_1,w_2\}$ *est linéairement indépendante dans* $\mathbb{R}^4$ *:*

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$*, on suppose que:* $\alpha\,(1,-1,0,1)+\beta\,(0,3,1,-1)=(0,0,0,0)\,.$

On a :

$$\alpha\,(1,-1,0,1)+\beta\,(0,3,1,-1)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ -\alpha+3\beta=0\ldots\ldots\ldots(2)\\ \beta=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)\\ \alpha-\beta=0\ldots\ldots\ldots\ldots(4)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \\ \beta=0\end{cases}$$

On conclut, $\alpha=\beta=0$*, d'où* $\{w_1,w_2\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^4$.

On a : $\{w_1,w_2\}$ *engendre* E_2 *et libre, alors* $\{w_1,w_2\}$ *est une base de* E_2 *et* $\dim E_2=2$.

Exercise 1.20 *Montrer que dans* $\mathbb{R}^3$, *les vecteurs* $v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,-1,-2)$ *engendrent le même s.e.v que :* $w_1 = (3,7,0)$, $w_2 = (5,0,-7)$.

Solution.

Montrons que dans $\mathbb{R}^3$, *les vecteurs* $v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,-1,-2)$ *engendrent le même s.e.v que :* $w_1 = (3,7,0)$, $w_2 = (5,0,-7)$.

Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, *on suppose que:* $v_1 = (2,3,-1) = \lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7)$

On a :

$$\lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7) = (2,3,-1) \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda + 5\beta = 2.....(1) \\ 7\lambda = 3..........(2) \\ -7\beta = -1........(3) \end{cases}$$

De $(2) \Rightarrow \lambda = \dfrac{3}{7}$ *et* $(3) \Rightarrow \beta = \dfrac{1}{7}$ *et de* $(1) \Rightarrow 3\left(\dfrac{3}{7}\right) + 5\left(\dfrac{1}{7}\right) = 2$, *d'où* $2 = 2$ *donc,*

$$v_1 = \left(\frac{3}{7}\right)(3,7,0) + \left(\frac{1}{7}\right)(5,0,-7) \quad \textit{d'où} \quad v_1 = \left(\frac{3}{7}\right)w_1 + \left(\frac{1}{7}\right)w_2$$

Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, *on suppose que:* $v_2 = (1,-1,-2) = \lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7)$.

On a :

$$\lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7) = (1,-1,-2) \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda + 5\beta = 1.......(1) \\ 7\lambda = -1..........(2) \\ -7\beta = -2.........(3) \end{cases}$$

De $(2) \Rightarrow \lambda = \dfrac{-1}{7}$ *et* $(3) \Rightarrow \beta = \dfrac{2}{7}$, *remplaçons* λ *et* β *dans* (1) *on obtient :*
$(1) \Rightarrow 3\left(\dfrac{-1}{7}\right) + 5\left(\dfrac{2}{7}\right) = 1$, *d'où* $1 = 1$ *donc,*

$$v_2 = \left(\frac{-1}{7}\right)(3,7,0) + \left(\frac{2}{7}\right)(5,0,-7) \quad \textit{et} \quad v_2 = \left(\frac{-1}{7}\right)w_1 + \left(\frac{2}{7}\right)w_2$$

On a : $v_1 = \left(\dfrac{3}{7}\right)w_1 + \left(\dfrac{1}{7}\right)w_2$ *et* $v_2 = \left(\dfrac{-1}{7}\right)w_1 + \left(\dfrac{2}{7}\right)w_2$.

On conclut, que les vecteurs $v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,-1,-2)$ *engendrent le même s.e.v que :* $w_1 = (3,7,0)$, $w_2 = (5,0,-7)$.

Exercise 1.21 *Soit* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *tel que* $v_1 = (1,2,0), v_2 = (0,2,1), v_3 = (-1,0,3)$.

1) Montrer que B *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

2) Décomposer le vecteur $v = (16, -4, 4)$ dans cette base.

Solution.

1) Montrons que : $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tel que $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (0, 2, 1), v_3 = (-1, 0, 3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit de Montrer que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que: $\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(-1, 0, 3) = (0, 0, 0)$. On a :

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(-1, 0, 3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma = 0......... (1) \\ 2\alpha + 2\beta = 0....... (2) \\ \beta + 3\gamma = 0........ (3) \end{cases}$$

De (1) $\Rightarrow \gamma = \alpha$ et (2) $\Rightarrow \beta = -\alpha$ et (3) $\Rightarrow -\alpha + 3\alpha = 0$, d'où $\alpha = 0$. On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, d'où B est libre.

On a : $cardB = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et B est libre dans $\mathbb{R}^3$, alors B est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Décomposons le vecteur $v = (16, -4, 4)$ dans cette base B.

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$v = (16, -4, 4) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(-1, 0, 3).$$

On a :

$$(16, -4, 4) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(-1, 0, 3) = (\alpha - \gamma, 2\alpha + 2\beta, \beta + 3\gamma)$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 16....... (1) \\ 2\alpha + 2\beta = -4....... (2) \\ \beta + 3\gamma = 4....... (3) \end{cases}$$

De (1) $\Rightarrow \gamma = \alpha - 16$ et (2) $\Rightarrow \beta = -2 - \alpha$, (3) $\Rightarrow -2 - \alpha + 3(\alpha - 16) = 4$, d'où $2\alpha = 54$ donc, $\alpha = 27$, $\gamma = 27 - 16 = 11$ et $\beta = -2 - 27 = -29$.

On conclut, $\alpha = 27, \beta = -29, \gamma = 11$, alors la décomposition de vecteur $v = (16, -4, 4)$ dans la base B est :

$$v = (16, -4, 4) = 27(1, 2, 0) - 29(0, 2, 1) + 11(-1, 0, 3).$$

Exercise 1.22 *Etudier la liberté des familles suivantes :*

$$\begin{array}{lll} 1) & A & = & \{(1,2,-1),(-1,1,2),(-1,0,3)\}. \\ 2) & B & = & \{(2,0,-2),(3,2,1),(1,2,3)\}. \\ 3) & C & = & \{(1,-2,1,5),(1,1,1,1),(-1,0,3,0)\}. \end{array}$$

Solution.

1) Etudions la liberté des famille : $A = \{(1,2,-1),(-1,1,2),(-1,0,3)\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que :*

$$\alpha(1,2,-1) + \beta(-1,1,2) + \gamma(-1,0,3) = (0,0,0).$$

$$\text{On a : } \alpha(1,2,-1) + \beta(-1,1,2) + \gamma(-1,0,3) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2\alpha + \beta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ -\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \ldots\ldots. (3) \end{cases}$$

On a : $(2) \Rightarrow \beta = -2\alpha$ *et de* (1) *on aura* $\gamma = \alpha - \beta = \alpha + 2\alpha$ *d'où* $\gamma = 3\alpha$, *remplaçons* β *et* γ *dans l'équation* (3) *on obtient :* $(3) \Rightarrow -\alpha - 4\alpha + 9\alpha = 0$, *d'où* $\alpha = 0$. *On conclut,* $\alpha = \beta = \gamma = 0$, *d'où* A *est famille libre.*

2) Etudions la liberté des famille : $B = \{(2,0,-2),(3,2,1),(1,2,3)\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*:

$$\alpha(2,0,-2) + \beta(3,2,1) + \gamma(1,2,3) = (0,0,0)$$

$$\text{On a : } \quad \alpha(2,0,-2) + \beta(3,2,1) + \gamma(1,2,3) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2\beta + 2\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ -2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

On a : $(2) \Rightarrow \gamma = -\beta$ *et de* (1) *on aura* $2\alpha + 3\beta - \beta = 0$ *d'où* $\alpha = -\beta$, *remplaçons* α *et* γ *dans l'équation* (3) *on obtient :* $(3) \Rightarrow 2\beta + \beta - 3\beta = 0$, *d'où* $0.\beta = 0$, *on déduit que* β *il est quelconque. Prenons par exemple* $\beta = 1$ *on aura* $\alpha = -1$ *et* $\gamma = -1$ *c'est à dire :*

$$(-1)(2,0,-2) + 1(3,2,1) + (-1)(1,2,3) = (0,0,0).$$

On conclut, que la famille B *est liée.*

Exercise 1.23 *Etudier la liberté des familles suivantes :*

$$\begin{array}{lll} 1) & A & = & \{e^x,\ xe^x,\ e^{-x},\ xe^{-x}\}. \\ 2) & B & = & \{2x^2-3,\ -x+1,\ -x^4-3x^2-2x+1\}. \\ 3) & C & = & \{2x-1,\ -x^2,\ 3x^2-2x+1\}. \end{array}$$

Solution.

1) Etudions la liberté des famille : $A = \{e^x,\ xe^x,\ e^{-x},\ xe^{-x}\}$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$, *on suppose que :* $\alpha e^x + \beta xe^x + \gamma e^{-x} + \lambda xe^{-x} = 0$.

Pour $x \neq 0$, *on divise par* xe^x *et en faisant tendre* x *vers* $+\infty$ *on obtient :*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha e^x + \beta xe^x + \gamma e^{-x} + \lambda xe^{-x}}{xe^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{x} + \beta + \frac{\gamma e^{-2x}}{x} + \lambda e^{-2x}\right) = \beta = 0,$$

donc, $\beta = 0$. *Pour* $x \neq 0$, *on divise par* xe^{-x} *et en faisant tendre* x *vers* $-\infty$ *on obtient :*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha e^x + \gamma e^{-x} + \lambda xe^{-x}}{xe^{-x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\alpha\frac{e^{2x}}{x} + \gamma\frac{1}{x} + \lambda\right) = \lambda = 0$$

donc, $\lambda = 0$. *Prenons maintenant* $x = 0$ *et* $x = 1$, *on obtient :*

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 ....\ (1) \\ \alpha e + \dfrac{1}{e}\gamma = 0 ....\ (2) \end{cases}$$

On a : $(1) \Rightarrow \gamma = -\alpha$, *remplaçons* γ *dans l'équation* (2) *on obtient :* $(2) \Rightarrow \alpha\left(e - \dfrac{1}{e}\right) = 0$, *d'où* $\alpha = 0$ *car* $\left(e - \dfrac{1}{e}\right) \neq 0$. *On conclut,* $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$, *d'où* $A = \{e^x,\ xe^x,\ e^{-x},\ xe^{-x}\}$ *est une famille libre.*

2) Etudions la liberté des famille : $B = \{2x^2-3,\ -x+1,\ -x^4-3x^2-2x+1\}$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que :*

$$\alpha\left(2x^2-3\right) + \beta\left(-x+1\right) + \gamma\left(-x^4-3x^2-2x+1\right) = 0.$$

On a : $\alpha(2x^2-3) + \beta(-x+1) + \gamma(-x^4-3x^2-2x+1) = 0$

$\Rightarrow -\gamma x^4 + (2\alpha - 3\gamma)x^2 + (-\beta - 2\gamma)x + (\beta - 3\alpha + \gamma) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\gamma = 0 \\ 2\alpha - 3\gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 0 \\ \beta - 3\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

On a : $\alpha = \beta = \gamma = 0$*, d'où* $B = \{2x^2 - 3,\ \ -x+1,\ \ -x^4 - 3x^2 - 2x + 1\}$ *est une famille libre.*

3) Etudions la liberté des famille : $C = \{2x-1,\ \ -x^2,\ 3x^2 - 2x + 1\}$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*. Supposons que:* $\alpha(2x-1) + \beta(-x^2) + \gamma(3x^2 - 2x + 1) = 0$.

$$\begin{aligned}
\textit{On a :} \quad & \alpha\left(2x^2 - 3\right) + \beta(-x+1) + \gamma\left(3x^2 - 2x + 1\right) = 0 \\
\Rightarrow \quad & (2\alpha + 3\gamma)x^2 + (-\beta - 2\gamma)x + (\beta - 3\alpha + \gamma) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} 2\alpha + 3\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\, (1) \\ -\beta - 2\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\, (2) \\ \beta - 3\alpha + \gamma = 0 \ldots\ldots\, (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\dfrac{2}{3}\alpha \\ \beta = -2\gamma = \dfrac{4}{3}\alpha \\ \beta - 3\alpha + \gamma = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

De (1) *on a :* $\gamma = -\dfrac{2}{3}\alpha$ *et de* (2) *on aura* $\beta = -2\gamma = \dfrac{4}{3}\alpha$*, remplaçons* β *et* γ *dans l'équation* (3) *on obtient :* $(3) \Rightarrow \dfrac{4}{3}\alpha - 3\alpha - \dfrac{2}{3}\alpha = 0$ *d'où* $-\frac{7}{3}\alpha = 0$*, donc,* $\alpha = 0$*. On conclut,* $\alpha = \beta = \gamma = 0$*, d'où* $C = \{2x-1,\ \ -x^2,\ 3x^2 - 2x + 1\}$ *est famille libre.*

Exercise 1.24 *Dire si les ensembles de vecteurs suivants sont des espaces vectoriels, et justifier la réponse :*

$$\begin{array}{lll}
1) & F_1 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}. \\
2) & F_2 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}. \\
3) & F_3 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y - 4z = 0\}. \\
4) & F_4 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \ \textit{et}\ y - 3z = 0\}. \\
5) & F_5 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0 \ \textit{et}\ x - 2y - z = 0\}. \\
6) & F_6 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}. \\
7) & F_7 & = & \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = x + y + z - t = 3x + 2z = 1\}.
\end{array}$$

Solution.

1) $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

F_1 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si :*

$$F_1 \neq \emptyset \quad \textit{et} \quad \forall X, Y \in F_1, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_1.$$

On a : $F_1 \neq \emptyset$*, car* $(0,0) \in F_1$.

Soient $X, Y \in F_1$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
X \in F_1 \Rightarrow X = (x_1, x_2) \ \textit{et}\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \ldots\ldots (1) \\
Y \in F_1 \Rightarrow Y = (y_1, y_2) \ \textit{et}\ 2y_1 + 3y_2 = 0 \ldots\ldots (2)
\end{aligned}$$

On a :

$$\lambda.X+\beta.Y=\lambda.(x_1,x_2)+\beta.(y_1,y_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)+(\beta y_1,\beta y_2)=(\lambda x_1+\beta y_1,\lambda x_2+\beta y_2)$$

De plus on a :

$$2(\lambda x_1+\beta y_1)+3(\lambda x_2+\beta y_2)=\lambda(\underbrace{2x_1+3x_2}_{(1)})+\beta(\underbrace{2y_1+3y_2}_{(2)})=\lambda.0+\beta.0=0$$

On a : $\lambda.X+\beta.Y\in F_1$. *Alors,* F_1 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

2) $F_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

F_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si :*

$$F_2\neq\emptyset \quad et \quad \forall X,Y\in F_2,\forall\lambda,\beta\in\mathbb{R} : (\lambda.X+\beta.Y)\in F_2.$$

On a : $F_2\neq\emptyset$, *car* $(0,0)\in F_2$.

Remarquons que : $X=(3,0)\in F_2$ *et* $Y=(0,5)\in F_2$. *Mais on a :* $X+Y=(3,0)+(0,5)=(3,5)\notin F_2$. *Alors* F_2 *n'est pas un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

3) $F_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x+2y-4z=0\}$ *est-il un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$.

F_3 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$F_3\neq\emptyset \quad et \quad \forall X,Y\in F_3,\forall\lambda,\beta\in\mathbb{R} : (\lambda.X+\beta.Y)\in F_3.$$

On a : $F_3\neq\emptyset$, *car* $(0,0,0)\in F_3$, *puisque* $3.0+2.0-4.0=0$

Soient $X,Y\in F_3$ *et* $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$.

$$X\in F_2\Rightarrow X=(x_1,x_2,x_3) \ \ et \ 3x_1+2x_2-4x_3=0......(1)$$
$$Y\in F_2\Rightarrow Y=(y_1,y_2,y_3) \ \ et \ 3y_1+2y_2-4y_3=0......(2)$$

On a :

$$\begin{aligned}\lambda.X+\beta.Y &= \lambda.(x_1,x_2,x_3)+\beta.(y_1,y_2,y_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)+(\beta y_1,\beta y_2,\beta y_3)\\ &= (\lambda x_1+\beta y_1,\lambda x_2+\beta y_2,\lambda x_3+\beta y_3).\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}&3(\lambda x_1+\beta y_1)+2(\lambda x_2+\beta y_2)-4(\lambda x_3+\beta y_3)\\ &=\lambda\underbrace{(3x_1+2x_2-4x_3)}_{(1)}+\beta\underbrace{(3y_1+2y_2-4y_3)}_{(2)}=\lambda.0+\beta.0=0\end{aligned}$$

D'où $\lambda.X+\beta.Y\in F_3$, *donc,* F_3 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

4) $F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0 \text{ et } y-3z=0\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

F_4 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :

$$F_4 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X,Y \in F_4, \forall \lambda,\beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_4.$$

On a : $F_4 \neq \emptyset$, car $(0,0,0,0) \in F_4$, puisque $0+0=0$ et $0-3.0=0$

Soient $X,Y \in F_4$ et $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} X \in F_4 \Rightarrow X = (x_1,x_2,x_3) \ \text{ et } x_1+x_2=0,\ x_2-3x_3=0\ldots\ldots(1) \\ Y \in F_4 \Rightarrow Y = (y_1,y_2,y_3) \ \text{ et } y_1+y_2=0,\ y_2-3y_3=0\ldots\ldots(2) \end{array}$$

On a :

$$\lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1,x_2,x_3) + \beta.(y_1,y_2,y_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)$$
$$= \left(\underbrace{\lambda x_1 + \beta y_1}_{z_1}, \underbrace{\lambda x_2 + \beta y_2}_{z_2}, \underbrace{\lambda x_3 + \beta y_3}_{z_3} \right)$$

De plus on a :

$$\begin{array}{l} z_1 + z_2 = \lambda x_1 + \beta y_1 + \lambda x_2 + \beta y_2 = \lambda(x_1+x_2) + \beta(y_1+y_2) = \lambda.0 + \beta.0 = 0 \\ z_2 - 3z_3 = \lambda x_2 + \beta y_2 - 3(\lambda x_3 + \beta y_3) = \lambda(x_2 - 3x_3) + \beta(y_2 - 3y_3) = \lambda.0 + \beta.0 = 0 \end{array}$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in F_4$, donc, F_4 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

5) $F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-y-z=0 \text{ et } x-2y-z=0\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

F_5 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :

$$F_5 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X,Y \in F_5, \forall \lambda,\beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_5.$$

On a : $F_5 \neq \emptyset$, car $(0,0,0,0) \in F_5$, puisque $2.0-0-0=0$ et $0-2.0-0=0$

Soient $X,Y \in F_5$ et $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} X \in F_5 \Rightarrow X = (x_1,x_2,x_3) \ \text{ et } 2x_1-x_2-x_3=0,\ x_1-2x_2-x_3=0\ldots\ldots(1) \\ Y \in F_5 \Rightarrow Y = (y_1,y_2,y_3) \ \text{ et } 2y_1-y_2-y_3=0,\ y_1-2y_2-y_3=0\ldots\ldots(2) \end{array}$$

On a :

$$\lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1,x_2,x_3) + \beta.(y_1,y_2,y_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)$$
$$= \left(\underbrace{\lambda x_1 + \beta y_1}_{z_1}, \underbrace{\lambda x_2 + \beta y_2}_{z_2}, \underbrace{\lambda x_3 + \beta y_3}_{z_3} \right)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
&2z_1 - z_2 - z_3 = 2\left(\lambda x_1 + \beta y_1\right) - \left(\lambda x_2 + \beta y_2\right) - \left(\lambda x_3 + \beta y_3\right) \\
&= \lambda\left(2x_1 - x_2 - x_3\right) + \beta\left(2y_1 - y_2 - y_3\right) = \lambda.0 + \beta.0 = 0 \\
&z_1 - 2z_2 - z_3 = \left(\lambda x_1 + \beta y_1\right) - 2\left(\lambda x_2 + \beta y_2\right) - \left(\lambda x_3 + \beta y_3\right) \\
&= \lambda\left(x_1 - 2x_2 - x_3\right) + \beta\left(y_1 - 2y_2 - y_3\right) = \lambda.0 + \beta.0 = 0
\end{aligned}$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in F_5$ *, donc,* F_5 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
6) $F_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.
F_6 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si :*

$$F_6 \neq \emptyset \quad et \quad \forall X, Y \in F_6, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_6.$$

On a : $F_6 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0) \in F_6$.
Remarquons que : $X = (1, -1) \in F_6$ *car* $(1)^2 + (-1) = 0$
et $Y = (-1, -1) \in F_6$ *car* $(-1)^2 + (-1) = 0$
Mais on a : $X + Y = (1, -1) + (-1, -1) = (0, -2) \notin F_2$ *car* $(0)^2 + (-2) \neq 0$.
Alors, F_6 *n'est pas un s.e.v de* $\mathbb{R}^2$.
7) $F_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = x + y + z - t = 3x + 2z = 1\}$
est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
F_7 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *si et seulement si :*

$$F_7 \neq \emptyset \quad et \quad \forall X, Y \in F_7, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_7.$$

On a : $(0, 0, 0, 0) \notin F_7$. *Alors,* F_7 *n'est pas un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

Chapitre 2

Applications Linéaires

2.1 Applications Linéaires

Définition 2.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est une application linéaire si et seulement si*

$$\begin{array}{l} 1.\ \forall x, y \in E : f(x+y) = f(x) + f(y) \\ 2.\ \forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E : \quad f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{array}$$

Ceci est équivalent à dire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k},\ \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On dit aussi que f est un morphisme d'espaces vectoriels.

On note par $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Exemple 2.1 *Soit*

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x+y, x-z, y+2z) \end{array}$$

f est-il application linéaire ? c'est à dire :

$$(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k},\ \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y))?$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^3$, vérifions $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

On a :

$$x \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3) \qquad et \qquad y \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow y = (y_1, y_2, y_3)$$

Donc,

$$\begin{array}{l} f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda(x_1,x_2,x_3) + \mu(y_1,y_2,y_3)) = f((\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)) \\ = (\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_1 + \mu y_1 - \lambda x_3 - \mu y_3, \lambda x_2 + \mu y_2 + 2\lambda x_3 + 2\mu y_3) \\ = \lambda(x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_2 + 2x_3) + \mu(y_1 + y_2, y_1 - y_3, y_2 + 2y_3) \\ = \lambda f((x_1,x_2,x_3)) + \mu f((y_1,y_2,y_3)) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{array}$$

Alors, f est une application linéaire.

Exemple 2.2 *Soit*

$$\begin{array}{rlcl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = (x+y, 2y-x, x-y+1) \end{array}$$

g n'est pas linéaire car $g(0,0) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$.

Exemple 2.3 *Soit*

$$\begin{array}{rlcl} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & h(x,y) = |x-y| \end{array}$$

h n'est pas linéaire car $h(X+Y) \neq h(X) + h(Y)$.

Terminologie et notations

Si $E = F$, l'application linéaire $f : E \to E$ est dite **endomorphisme**.

Si $f : E \to F$ application linéaire est bijective, l'application f est dite **isomorphisme**.

Si f est un endomorphisme et bijectif, l'application f est dite un **automorphisme**.

Si $f : E \to \mathbb{k}$, l'application linéaire f est dite **une forme linéaire.**

Remarque 2.1 *Si f est une application linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.*

Proposition 2.1 *(Une autre caractérisation des applications linéaires)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f \in L(E,F)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, x_2, ..., x_N) \in E^n, (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{k}^n$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Remarque 2.2 *Une application linéaire $f \in L(E,F)$ est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de E.*

Exemple 2.4 *Déterminer l'application linéaire f :*

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z), \end{array}$$

telle que :

$$\begin{cases} f(e_1) = f((1,0,0)) = (1,-1) \\ f(e_2) = f((0,1,0)) = (2,3) \\ f(e_3) = f((0,0,1)) = (-1,2) \end{cases}$$

($\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Soit (x, y, z) *un élément de* $\mathbb{R}^3$*, alors*

$$f(x,y,z) = f((x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)) = f(x,0,0)+f(0,y,0)+f(0,0,z)$$
$$= xf(1,0,0)+yf(0,1,0)+zf(0,0,1) = x(1,-1)+y(2,3)+z(-1,2)$$
$$= (x,-x)+(2y,3y)+(-z,2z) = (x+2y-z, -x+3y+2z)$$

Donc, l'application linéaire f *est définie comme suit :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, -x+3y+2z). \end{array}$$

Remarque 2.3 *On peut montrer facilement la somme de deux applications linéaires est une application linéaire, aussi le produit d'une application linéaire par un scalaire et la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Proposition 2.2 *Soit* f *une application linéaire de* E *dans* F*, alors* $f(0_E) = 0_F$.

Preuve. On a :

$$\begin{array}{l} f(0_E) = f(0_E+0_E) = f(0_E)+f(0_E), \\ \Rightarrow f(0_E) = 2f(0_E), \\ \Rightarrow f(0_E) = 0_F. \end{array}$$

■

2.1.1 Noyau, Image d'une application linéaire

Définition 2.2 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{k}$ *et* $f: E \to F$ *une application linéaire.*

1. *On appelle image de* f *et on note* $\operatorname{Im} f$ *l'ensemble défini par*

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x), x \in E\}.$$

2. *On appelle noyau de* f *et on* $\ker f$ *l'ensemble défini par*

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}.$$

Propriétés de $\operatorname{Im} f$ **et** $\ker f$

Proposition 2.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\Bbbk$ et $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. Pour tout s. e. v. E_1 de E l'image directe $f(E_1)$ est un s. e. v. de F ; en particulier $\operatorname{Im} f$ est un s. e. v. de F.

2. Pour tout s. e. v. F_1 de F l'image réciproque $f^{-1}(F_1)$ est un s. e. v. de E ; en particulier $\ker f$ est un s. e. v. de E.

Preuve. 1. a) On a $0_E \in E_1$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(E_1)$. Par suite $f(E_1) \neq \emptyset$.

b) Soient $y_1, y_2 \in f(E_1)$, donc $\exists x_1, x_2 \in E_1, y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(E_1).$$

c) Soient $y \in f(E_1), \lambda \in \Bbbk$, donc $\exists x \in E_1, y = f(x)$.

$$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in f(E_1).$$

Ce qui montre que que $f(E_1)$ est un s. e. v. de F.

2. a) On a $f^{-1}(F_1) \neq \emptyset$ car $f(0_E) = 0_F \in F_1$. Donc $0_E \in f^{-1}(F_1)$.

b) Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1)$

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1) &\Longrightarrow f(x_1) \in F_1 \text{ et } f(x_2) \in F_1 \\ &\Longrightarrow f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in F_1 \\ &\Longrightarrow x_1 + x_2 \in f^{-1}(F_1) \end{aligned}$$

c) Soient $x \in f^{-1}(F_1)$ et $\lambda \in \Bbbk$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F_1) \text{ et } \lambda \in \Bbbk &\Longrightarrow f(x) \in F_1 \text{ et } \lambda \in \Bbbk \\ &\Longrightarrow \lambda f(x) = f(\lambda x) \in F_1 \\ &\Longrightarrow \lambda x \in f^{-1}(F_1). \end{aligned}$$

Ce qui montre que que $f^{-1}(F_1)$ est un s. e. v. de E. ■

Proposition 2.4 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\Bbbk$ et $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$

2. f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Preuve. 1. On suppose que f est injective et soit $x \in \ker f$

$$\begin{aligned} x \in \ker f &\Longrightarrow f(x) = 0_F = f(0_E) \\ &\Longrightarrow x = 0_E \\ &\Longrightarrow \ker f = \{0_E\}. \end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose $\ker f = \{0_E\}$. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_F \\ &\Longrightarrow f(x_1 - x_2) = 0_F \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 = 0_E \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \\ &\Longrightarrow f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

2. Nous avons f est surjective $\Longleftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x) \in f(E)$, c'est à dire $F \subset f(E)$. On sait que $f(E) \subset F$, d'où $f(E) = F$. $\operatorname{Im} f = F$. ■

Exemple 2.5 *Soit f est une application linéaire définie comme suit :*

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto f(x,y,z) = (y, x-z, z) \end{aligned}$$

Déterminer $\operatorname{Im} f$ *et* $\ker f$.

On a :

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y, x-z, z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \text{ et } x - z = 0 \text{ et } z = 0\} = \{(0,0,0)\}. \end{aligned}$$

d'où f est injective.

On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(y, x-z, z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(0,1,0) + y(1,0,0) + z(0,-1,1) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que les vecteurs $(0,1,0), (1,0,0)$ *et* $(0,-1,1)$ *engendrent* $\operatorname{Im} f$.

Vérifions que $\{(0,1,0), (1,0,0), (0,-1,1)\}$ *est linéairement indépendant :*

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que: $\alpha(0,1,0) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,-1,1) = (0,0,0)$

$$\text{On a : } \alpha(0,1,0) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,-1,1) = (0,0,0) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = 0........ (1) \\ \alpha - \gamma = 0.... (2) \\ \gamma = 0........ (3) \end{cases}$$

de $(1), (2)$ *et* (3) *on a :* $\alpha = \beta = \gamma = 0$, *d'où* $\{(0,1,0), (1,0,0), (0,-1,1)\}$ *est libre.*

on conclut que $\{(0,1,0), (1,0,0), (0,-1,1)\}$ *est libre et engendre* $\operatorname{Im} f$ *, alors* $\{(0,1,0), (1,0,0), (0,-1,1)\}$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$*. De plus on a :*

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3 \\ et \\ \dim \ \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3.$$

D'où f *est une application surjective.*

2.1.2 Composition de deux applications linéaires

Soient E, F, G trois $\Bbbk-$ev et $f : E \to F, g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire. En effet ;

Soient $\alpha, \beta \in \Bbbk$ et $x, y \in E$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha x + \beta y) &= g(f(\alpha x + \beta y)) = g(\alpha f(x) + \beta f(y)) \\ &= \alpha g(f(x)) + \beta g(f(x)) = \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y). \end{aligned}$$

Proposition 2.5 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* $\Bbbk$ *et* $f : E \to F$ *une application linéaire. Si* f *est un isomorphisme de* E *sur* F, *alors* f^{-1} *est aussi un isomorphisme de* F *vers* E.

Preuve. Si f est bijective, alors f^{-1} est aussi bijective. Montrons que f^{-1} est linéaire. En effet, soient $\alpha, \beta \in \Bbbk$ et $x', y' \in F$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha x' + \beta y') &= f^{-1}(\alpha f(f^{-1}(x')) + \beta f(f^{-1}(y'))) \\ &= f^{-1}(f[\alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y')]) = \alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y'). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Définition 2.3 *Deux* $\Bbbk-$*ev* E *et* F *sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de* $\Bbbk-$*ev de* E *sur* F *ou bien de* F *sur* E.

Proposition 2.6 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* $\Bbbk$ *de dimensions finies. Pour que* E *et* F *soient isomorphes il faut et il suffit que* $\dim E = \dim F$.

2.1.3 Rang d'une application linéaire

Définition 2.4 *Soient E et F deux $\Bbbk-$ev de dimensions finies et $f \in L(E,F)$. On appelle rang de f et on note $rg(f)$ l'entier naturel $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$.*

Remarque 2.4 *1. Si B est une base de E, alors pour tout $f \in L(E,F)$, on a*

$$rg(f) = \dim f(\langle B\rangle) = \dim \langle f(B)\rangle = rg(f(B)).$$

2. Pour tout $f \in L(E,F)$, on a

$$rg(f) \leq \min(\dim E, \dim F).$$

Théorème 2.6 *(Théorème du rang)*
Soient E et F deux $\Bbbk-$ev de dimensions finies et $f \in L(E,F)$. Alors, on a

$$rg(f) = \dim E - \dim \ker f.$$

Proposition 2.7 *Soient E et F deux $\Bbbk-$ev de dimensions finies et $f \in L(E,F)$. Alors*

1. *f est injective si seulement si* $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim E$
2. *f est surjective si seulement si* $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim F$.

Corollaire 2.7 *Sur $\mathbb{R}$, on considère les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ et $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors*

1. *$n < p \Longrightarrow f$ n'est pas surjective.*
2. *$n > p \Longrightarrow f$ n'est pas injective.*
3. *$n = p$, on ne peut rien dire, mais*

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

Preuve. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f.$$

1. Supposons par l'absurde que $n < p$ et f est surjective, alors $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^p = p$. Ce qui implique, $n = p + \dim \ker f$ et $n < p$, contradiction. Donc, f n'est pas surjective.

2. On suppose de même que f est injective et $n > p$. donc $\dim \ker f = 0$. Ce qui implique, $n = 0 + \dim \operatorname{Im} f$ et $\dim \operatorname{Im} f \leq p \Longrightarrow n \leq p$, contradiction. Donc, f n'est pas injective.

3. Si $n = p$, on obtient $n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$ et on ne peut rien dire.

Si de plus, par exemple, f est injective, alors $\dim \ker f = 0$. Ce qui nous donne, $n = \dim \operatorname{Im} f$ et comme $n = p$, on déduit que f est surjective. Par suite, f est bijective.

Raisonnement analogue si f est surjective. ■

Remarque 2.5 *Si f est un isomorphisme de E dans F avec $\dim E$ finie, alors nécessairement $\dim E = \dim F$ en d'autres termes si $\dim E \neq \dim F$, alors f ne peut être un isomorphisme.*

2.2 Exercices corrigés

Exercise 2.8 *Soit*

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x + 3y, 2x - z) \end{array}$$

1) Vérifier que f est une application linéaire.

2) Déterminer $\ker f$ le noyau de f, puis donner $\dim \ker f$.

3) f est-elle injective ?

4) Donner $\dim \operatorname{Im} f$, puis donner une base à $\operatorname{Im} f$.

5) f est-elle surjective ?

Solution.

1) Vérifions que f est une application linéaire.

Soient $X = (x, y, z), Y = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + \mu Y) &= f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) \\ &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\ &= (\lambda x + \mu x' + 3\lambda y + 3\mu y', 2\lambda x + 2\mu x' - \lambda z - \mu z') \\ &= \lambda(x + 3y, 2x - z) + \mu(x' + 3y', 2x' - z') \\ &= \lambda f((x, y, z)) + \mu f((x', y', z')) = \lambda f(X) + \mu f(Y). \end{aligned}$$

Donc, f est une application linéaire.

2) Déterminons $\ker f$ le noyau de f, puis nous donnons $\dim \ker f$.

On a :

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 3y, 2x - z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{-1}{3}x \text{ et } z = 2x\right\} = \left\{x\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right) : x \in \mathbb{R}\right\}, \end{aligned}$$

d'où le vecteur $\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right)$ *engendre* $\ker f$ *de plus le vecteur* $\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right)$ *est libre car il n'est pas nul en déduit que* $\left\{\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right)\right\}$ *de* $\ker f$*, donc* $\dim \ker f = 1$.

3) f n'est pas injective car on a : $\ker f \neq (0, 0, 0)$.

4) Donnons $\dim \operatorname{Im} f$

On a : $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$*, on déduit que :* $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Nous donnons une base à $\operatorname{Im} f$*, on a :*

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2 \\ et \\ \dim \ \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2,$$

donc $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *est base de* $\operatorname{Im} f$.

5) f est surjective car : $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Exercise 2.9 *Soit l'application*

$$\begin{array}{cccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) = (x + 2z, y + z, 3x + 2z) \end{array}$$

1) Montrer que f est linéaire.

2) Déterminer $\ker$ *f et* $\operatorname{Im} f$ *en précisant leurs dimensions.*

3) f est-elle bijective ? Justifier.

Solution.

On a

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + 2z, y + z, 3x + 2z).$$

1) Montrons que f est linéaire

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $X = (x_1, y_1, z_1), Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} & f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ = \ & (\alpha x_1 + \beta x_2 + 2(\alpha z_1 + \beta z_2), \alpha y_1 + \beta y_2 + (\alpha z_1 + \beta z_2), 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha z_1 + \beta z_2)) \\ = \ & (\alpha(x_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + 2z_2), \alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2), \alpha(3x_1 + 2z_1) + \beta(3x_2 + 2z_2)) \\ = \ & \alpha(x_1 + 2z_1, y_1 + z_1, 3x_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + 2z_2, y_2 + z_2, 3x_2 + 2z_2) \\ = \ & \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2) = \alpha f(X) + \beta f(Y). \end{aligned}$$

Donc, f est linéaire.

2) Déterminons $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *en précisant leurs dimensions.*

$$\begin{aligned}
Kerf &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+2z, y+z, 3x+2z) = (0,0,0)\right\} \\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2z=0 \text{ et } y+z=0 \text{ et } 3x+2z=0\right\} \\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0 \text{ et } y=0 \text{ et } z=0\right\} = \{(0,0,0)\}.
\end{aligned}$$

$Kerf = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Longrightarrow \dim Kerf = 0.$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \left\{f(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\
&= \left\{(x+2z, y+z, 3x+2z) / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\
&= \left\{x(1,0,3) + y(0,1,0) + z(2,1,2) / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\
&= \left\langle \underbrace{(1,0,3)}_{u_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{u_2}, \underbrace{(2,1,2)}_{u_3} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Donc, $\{u_1,u_2,u_3\}$ *engendre* $\operatorname{Im} f$*. Montrons que cette famille est libre*

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} / \alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned}
\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \alpha(1,0,3)+\beta(0,1,0)+\gamma(2,1,2) = (0,0,0) \\
&\Longrightarrow (\alpha+2\gamma, \beta+\gamma, 3\alpha+2\gamma) = (0,0,0) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+2\gamma = 0 & \text{...........}(1) \\ \beta+\gamma = 0 & \text{.............}(2) \\ 3\alpha+2\gamma = 0 & \text{..........}(3) \end{cases}
\end{aligned}$$

De $(3)-(1)$ *on a :* $2\alpha = 0$ *donc* $\alpha = 0$*. On remplace* α *dans* (1)*, on aura* $\gamma = 0$*. On remplace* γ *dans* (2)*, on aura* $\beta = 0$*. Donc* $\{u_1,u_2,u_3\}$ *est libre.*

Finalement $\{u_1,u_2,u_3\}$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$ *et par suite* $\dim\operatorname{Im} f = 3$.

3) $Kerf = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Longrightarrow f$ *est injective*

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{Im} f\subset\mathbb{R}^3 \\ \dim\operatorname{Im} f = 3 = \dim\mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espace d'arrivée}} \Longrightarrow f \text{ est surjective.}$$

Finalement f *est bijective.*

Chapitre 3

Matrices, matrices associées et déterminants

3.1 Introduction

L'algèbre linéaire est un outil essentiel pour toutes les branches des mathématiques, en particulier lorsqu'il s'agit de modéliser des problèmes issus de divers domaines : physiques, biologie, mécaniques, chimie,...

Les matrices servent à interpréter en termes de calculs opérationnels les résultats théoriques de l'algèbre linéaire. Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent des matrices.

3.2 Généralités sur les matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définitions et notations :

Définition 3.1 *Soient n et p deux entiers positifs.*

Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Elle est dite de taille $n \times p$ (ou de type (n,p)), si le tableau possède n lignes et p colonnes.

Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de la matrice A.

Alors on écrit la matrice A sous la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix},$$

ou plus simplement $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$.

Les a_{ij} sont appelés les coefficients (les composantes) de la matrice A.

L'indice i désigne les lignes, l'indice j désigne les colonnes.

n désigne le nombre de lignes de la matrice A et p désigne le nombre de colonnes de la matrice A.

L'élément a_{ij} est l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne.

On note $M_{n,p}(\mathbb{k})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{k}$, c'est à dire si $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ alors A est une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{k}$.

Exemple 3.1 *La matrice A de type $(4,3)$ définie par : $a_{11}=-1, a_{12}=\sqrt{2}, a_{13}=5, a_{21}=-2, a_{22}=\frac{3}{2}, a_{23}=0, a_{31}=4, a_{32}=1, a_{33}=3, a_{41}=0, a_{42}=6, a_{43}=-4$ se note par :*

$$A=\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 5 \\ -2 & \dfrac{3}{2} & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est une matrice de 4 lignes et 3 colonnes.

Egalité de deux matrices :
Soient $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in M_{np}(K)$.
On dit $A=B$ si et seulement si $a_{ij}=b_{ij}$ $\forall 1\leq i\leq n, \forall 1\leq j\leq p$.
Transposée d'une matrice :

Définition 3.2 *Soit $A=(a_{ij})\in M_{n,p}(\Bbbk)$. On appelle transposée de A la matrice notée ${}^tA$ de $M_{p,n}(\Bbbk)$ définie par ${}^tA=(a_{ji})$.*

Exemple 3.2

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 2 & \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}, \quad \textit{alors} \quad {}^tA=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & \frac{3}{2} \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$.

Propriété :
$\forall A\in M_{n,p}(\Bbbk)$ on a ${}^t({}^tA)=A$.
Matrices particulières :
Matrice nulle :

Définition 3.3 *On dit $A=(a_{ij})$ de $M_{n,p}(\Bbbk)$ est nulle si et seulement si $a_{ij}=0, \forall 1\leq i\leq n, \forall 1\leq j\leq p$.*

La matrice nulle dans $M_{n,p}(\Bbbk)$, est noté $0_{M_{n,p}(\Bbbk)}$.

Exemple 3.3

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice ligne :

Une matrice ne contenant qu'une seule ligne (de dimension $1 \times p$) est appelée matrice ligne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.4

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrice colonne :

Une matrice ne contenant qu'une seule colonne (de dimension $n \times 1$) est appelée matrice colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.5

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \pi \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Matrice carrée :

Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes ($n = p$) est appelée matrice carrée.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{k}$ se note $M_{n,n}(\mathbb{k})$ ou plus simplement par $M_n(\mathbb{k})$.

Diagonale d'une matrice carrée :

Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux et on appelle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & ... & a_{ii} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

diagonale de A.

Exemple 3.6

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 5 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients diagonaux sont $-1, \frac{3}{2}$ *et* -4, *et la diagonale de* A *est*

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}.$$

Trace d'une matrice carrée :

On appelle trace d'une matrice carrée $A \in M_n(\Bbbk)$ la somme des coefficients diagonaux et on écrit :

$$Tr\,(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}.$$

Exemple 3.7

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 5 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

alors $Tr\,(A) = -1 + \frac{3}{2} + (-4) = -\frac{7}{2}$.

3.2.1 Matrices carrés particulières

Matrice diagonale :

La matrice carrée $A \in M_n(\Bbbk)$ est dite matrice diagonale si : $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.

Exemple 3.8

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

sont des matrices diagonales.

Matrice identité :

La matrice identité d'ordre n est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux a_{ii} sont égaux à 1 et on la note I_n .

Exemple 3.9

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots.$$

Matrices scalaires :

Les matrices de la forme : $A = \lambda I_n$ où $\lambda \in \mathbb{k}$ sont dites matrices scalaires.

Exemple 3.10

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2,$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)\, I_3,$$

sont des matrices scalaires

Matrice triangulaire supérieure :

Définition 3.4 *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite matrice triangulaire supérieure si : $a_{ij} = 0$ pour tous $i > j$.*

C'est à dire tous les coefficients situés en dessous de la diagonale sont nuls.

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite matrice triangulaire inférieure si : $a_{ij} = 0$ pour tous $i < j$.

C'est à dire tous les coefficients situés au dessus de la diagonale sont nuls.

Exemple 3.11

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A et B sont des matrices triangulaires supérieures.

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

C et D sont des matrices triangulaires inférieures.

3.2.2 Opérations sur les matrices

Somme de deux matrices :

Définition 3.5 *Soient $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in M_{n,p}(\Bbbk)$. On définit la somme de A et B et on note $A+B$ la matrice $A+B=(c_{ij}) \in M_{n,p}(\Bbbk)$ tel que :*

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p.$$

Exemple 3.12

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+5 & 1+(-4) & 3+5 \\ 4+7 & 2+3 & 1+\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 11 & 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+(-3) & 3+\frac{5}{2} \\ 4+3 & 2+(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & \frac{11}{2} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.1 $A\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}+B\begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ *: Impossible car A est de type 2×3 et B est de type 2×2.*

Multiplication d'une matrice par un scalaire :

Définition 3.6 *Soient $A=(a_{ij}) \in M_{n,p}(\Bbbk)$ et $\lambda \in \Bbbk$, alors*

$$\lambda A=\lambda(a_{ij})=(\lambda a_{ij}) \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p.$$

Exemple 3.13 *Soient*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$3A = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{4}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(\mathbb{k})$ et λ, μ deux réels. Alors on :

1) $A + B = B + A$ (+ commutative)

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (+ associative)

3) $A + 0 = 0 + A = A$ (0 matrice nulle élément neutre)

4) $A + (-A) = (-A) + A = 0$ ($-A$ opposée de A)

5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

6) $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A$

8) $1 \times A = A$ et $0 \times A = 0$ (ne pas confondre 0 scalaire et 0 matrice nulle).

Remarque 3.2 *Compte tenu des propriétés ci-dessus, l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{k})$ muni des deux lois précédentes est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$.*

Produit de deux matrices :

Définition 3.7 *Soient $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ et $B = (b_{jk}) \in M_{p,m}(\mathbb{k})$ (c'est à dire le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B). On définit alors le produit de A et B dans cet ordre par la matrice $C = A \times B = (c_{ik})$ de $M_{n,m}(K)$ tel que :*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{jk}.$$

Exemple 3.14

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \textit{Impossible.}$$

Remarques importantes :

1. Si le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B, alors le produit $A \times B$ n'est pas défini.

2. En général, et lorsque le produit est bien défini, on a $A \times B \neq B \times A$, alors on a aussi :

$(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$,
$(A-B)^2 \neq A^2 + B^2 - 2AB$,
$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

3. Le produit des matrices carrées d'ordre n est toujours défini.

4. L'égalité $A \times B = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple 3.15 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais

$$A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. L'égalité $A \times B = A \times C$ n'implique pas $B = C$.

Exemple 3.16 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 10 & 20 \end{pmatrix},$$

et

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que : $AB = AC$. *Mais* $B \neq C$.

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices. Lorsque le produit est bien défini, on a

1. $A(B+C) = AB + AC$.

2. $(AB)C = A(BC)$.

3. En général, $AB \neq BA$ (le produit des matrices est une opération qui n'est pas commutative).

Exemple 3.17 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ -1 & 10 & 1 \\ 0 & 12 & 3 \end{pmatrix},$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 25 & 40 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que :

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ -1 & 10 & 1 \\ 0 & 12 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 10 & 25 & 40 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc en général, $AB \neq BA$.

3.2.3 Matrices carrées inversibles

Définition 3.8 *Soit* $A \in M_n(\mathbb{k})$, *on dit que* A *est inversible si et seulement si il existe* $B \in M_n(\mathbb{k})$ *telle que*

$$AB = BA = I_n.$$

Si A *est inversible alors* B *est unique et est appelée inverse de* A *(notée* A^{-1}*).*

Exemple 3.18 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

est l'inverse de A car :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.1 *Soient A, B deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{k})$, alors la matrice AB est aussi inversible et*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proposition 3.2 *Soient A, B deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{k})$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{k}$ alors on a :*

1. $^t(\lambda A + \beta B) = \lambda ({}^tA) + \beta ({}^tB)$.
2. $^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $^t(A^n) = ({}^tA)^n$.
4. *Si $A \in M_n(\mathbb{k})$ et inversible on a* $({}^tA^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Matrices symétriques :

Définition 3.9 *Une matrice carrée est dite symétrique si et seulement si :*

$$^tA = A.$$

Autrement dit A est symétrique par rapport à sa diagonale.

Exemple 3.19 *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \sqrt{3} & 4 \\ \frac{2}{3} & -2 & 5 & \frac{6}{7} \\ \sqrt{3} & 5 & 3 & -1 \\ 4 & \frac{6}{7} & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

est symétrique.

Matrice antisymétrique :

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite antisymétrique si et seulement si : ${}^tA = -A$.

Matrice orthogonale :

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite orthogonale si et seulement si : $A({}^tA) = ({}^tA)A = I_n$.

Propriété :

Si A est une matrice orthogonale, alors A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.

Matrices équivalentes :

Soient A, B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{k})$. On dit que A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices carrées inversibles $P \in M_p(\mathbb{k})$ et $Q \in M_n(\mathbb{k})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.

Matrices semblables :

Soient A, B deux matrices carrées de $M_n(\mathbb{k})$. On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice carrée P inversible d'ordre n telle que $B = P^{-1}AP$.

3.3 Matrice associée à une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ de dimension finie, $\dim E = p$, $\dim F = n$, $B_1 = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ une base de E, $B_2 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une base de F et $f : E \to F$ une application linéaire de E vers F.

Définition 3.10 *On appelle matrice de f par rapport aux bases B_1 et B_2 la matrice $M_{f,B_1,B_2} = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ où $f(e_j) = \sum_{i=1}^{i=n} c_{ij}u_i$ pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$.*

Exemple 3.20 *Soient f une application linéaire définie comme suit :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3, \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x + 2y - 5z, x - 4y, 2x - 3y + z\right). \end{array}$$

et $B_1 = B_2 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ *une base de* $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \left(\tfrac{1}{2},1,2\right) = \tfrac{1}{2}e_1 + 1e_2 + 2e_3, \\ f(e_2) &= (2,-4,-3) = 2e_1 + (-4)e_2 + (-3)e_3, \\ f(e_3) &= (-5,0,1) = (-5)e_1 + 0e_2 + 1e_3. \end{aligned}$$

Donc

$$M_{f,B_1,B_2} = \begin{array}{c} \\ e_1 \to \\ e_2 \to \\ e_3 \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exemple 3.21 *Soit* g *une application linéaire définie comme suit :*

$$\begin{array}{rlcl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = (x-3y, x+y, 2x-y). \end{array}$$

$B_1 = \{e_1 = (-1,2), e_2 = (1,1)\}$ *une base de* $\mathbb{R}^2$,

$B_2 = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,2,3)\}$ *une base de* $\mathbb{R}^3$.

On a : $g(e_1) = g(-1,2) = (-7,1,0)$.

$$\begin{aligned} (-7,1,0) &= \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \\ &= \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,2,3) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\gamma, \beta+3\gamma). \end{aligned}$$

Par identification on aura le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -7, \\ \alpha+2\gamma = 1, \\ \beta+3\gamma = 0, \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(\alpha,\beta,\gamma) = (-3,-6,2)$.

Donc

$$(-7,1,0) = (-3)(1,1,0) + (-6)(1,0,1) + 2(1,2,3).$$

On a : $g(e_2) = g(1,1) = (-2,2,1)$.

$$\begin{aligned} (-2,2,1) &= \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \\ &= \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,2,3) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\gamma, \beta+3\gamma). \end{aligned}$$

Par identification on aura le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-2, \\ \alpha+2\gamma=2, \\ \beta+3\gamma=1, \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(\alpha,\beta,\gamma)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{11}{4},\frac{5}{4}\right)$. *Donc*

$$(-2,2,1)=\left(-\frac{1}{2}\right)(1,1,0)+\left(-\frac{11}{4}\right)(1,0,1)+\frac{5}{4}(1,2,3).$$

Alors

$$M_{g,B_1,B_2}=\begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2} \\ -6 & -\frac{11}{4} \\ 2 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.3 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension n et $f : E \to E$ une application linéaire de E vers E et $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ une base de E. $M\in M_n(\mathbb{k})$ la matrice associée à f relativement à la base B de E, alors :*

$$M \text{ est inversible } \Longleftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

De plus, M^{-1} est la matrice associée à l'application f^{-1} relativement à la base B.

Rang d'une matrice :

Définition 3.11 *Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{k})$. On appelle rang de A le nombre maximum de vecteurs colonnes ou de lignes de A qui sont linéairement indépendants et on a rang $(A)\leq \min(n,p)$.*

Proposition 3.4 *Soient E,F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ de dimensions finies et B_1,B_2 des bases de E,F respectivement et soit $f : E\to F$ une application linéaire de E vers F et $M=M_{f,B_1,B_2}$ la matrice associée à f relativement aux bases B_1,B_2, alors rg(f) =rg(M).*

3.4 Matrice de passage, changement de bases

3.4.1 Matrice de passage

Définition 3.12 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension finie n, $B_1=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, $B_2=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de B_1 à B_2 la matrice de $M_n(K)$ dont les colonnes sont formées des* *composantes des vecteurs de* B_2 *exprimés dans la base* B_1*, on la note* $P = Pass\left(B_1, B_2\right)$*, c'est à dire*

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + ... + \alpha_{n1}e_n, \\ b_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + ... + \alpha_{n2}e_n, \\ ..... \\ b_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + ... + \alpha_{nn}e_n, \end{cases}$$

et

$$P = Pass\left(B_1, B_2\right) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.22 *Soient* $E = \mathbb{R}^3$*,*

$$B_1 = \left\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\right\} \quad et$$

$$B_2 = \left\{b_1 = (3,2,1), b_2 = (-4,2,3), b_3 = (1,-1,-1)\right\},$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$*.*

Déterminer $Pass\left(B_1, B_2\right)$ *la matrice de passage de la base* B_1 *à la base* B_2 *?*

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tel que :* $b_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$*.*

$$\begin{aligned} b_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 &\Rightarrow (3,2,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) \\ &\Rightarrow (3,2,1) = (\alpha, \beta, \gamma) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3, \\ \beta = 2, \\ \gamma = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$b_1 = 3e_1 + 2e_2 + 1e_3. \tag{3.1}$$

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tel que :* $b_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$$\begin{aligned} b_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 &\Rightarrow (-4,2,3) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) \\ &\Rightarrow (-4,2,3) = (\alpha, \beta, \gamma) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4, \\ \beta = 2, \\ \gamma = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$b_2 = -4e_1 + 2e_2 + 3e_3. \tag{3.2}$$

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tel que :* $b_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

$$\begin{aligned} b_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 &\Rightarrow (1,-1,-1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) \\ &\Rightarrow (1,-1,-1) = (\alpha, \beta, \gamma) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = -1, \\ \gamma = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$b_3 = 1e_1 + (-1)e_2 + (-1)e_3. \tag{3.3}$$

De (3.1), (3.2) *et* (3.3) *on a :*

$$\begin{cases} b_1 = (3)e_1 + (2)e_2 + (1)e_3, \\ b_2 = (-4)e_1 + (2)e_2 + (3)e_3, \\ b_3 = 1e_1 + (-1)e_2 + (-1)e_3. \end{cases}$$

Donc

$$Pass(B_1, B_2) = \begin{array}{c} \\ e_1 \to \\ e_2 \to \\ e_3 \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array},$$

d'où

$$Pass(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de passage de la base B_1 *à la base* B_2.

Propriétés :

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension n, B_1, B_2, B_3 trois bases de E, alors :

1. $Pass(B_1, B_3) = Pass(B_1, B_2) \times Pass(B_2, B_3)$.
2. $Pass(B_1, B_1) = I_n$ (matrice identité).
3. $P = Pass(B_1, B_2)$ est inversible et $P^{-1} = Pass(B_2, B_1)$.

3.4.2 Changement de bases

Changement de bases pour un vecteur :

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension finie n, B_1, B_2 deux bases de E et $P = Pass\left(B_1, B_2\right)$. Soit $x \in E$ et considérons $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ les composantes de x dans la base B_1 et $b_1, b_2, ..., b_n$ les composantes de x dans la base B_2. Alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ ou bien } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.23 *Soient* $B_1 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}, B_2 = \{b_1 = (1,2), b_2 = (2,1)\}$ *deux bases de* $\mathbb{R}^2$. *On a :*

$$P = Pass\left(B_1, B_2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si (x, y) *sont les coordonnées d'un vecteur* X *dans la base* B_1, *les composantes du même vecteur* X *dans la base* B_2 *sont* (γ_1, γ_2) *où :*

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \end{pmatrix}.$$

Changement de bases pour une applications linéaire :

Cas d'un endomorphisme :

Théorème 3.24 *Soient* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{k}$ *de dimension finie* n, $f : E \to E$ *une application linéaire,* B_1, B_2 *deux bases de* E *et* $P = Pass\left(B_1, B_2\right)$. *Alors :*

$$M_{f,B_2,B_2} = P^{-1} M_{f,B_1,B_1} P,$$

c'est à dire, deux matrices associées à un endomorphisme suivant des bases différentes sont semblables.

Cas général :

Théorème 3.25 *Soient* E, F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{k}$ *de dimensions finies et* $f : E \to F$ *une application linéaire,* B_1, B_2 *deux bases de* E, C_1, C_2 *deux base* *de F et $P = Pass\,(B_1, B_2)\,,\ Q = Pass\,(C_1, C_2)$ (ou bien $Q^{-1} = Pass\,(C_2, C_1)$). Alors :*

$$M_{f,B_2,C_2} = Q^{-1} M_{f,B_1,C_1} P,$$

c'est à dire, deux matrices associées à une application linéaire suivant des bases différentes sont équivalentes.

3.5 Déterminants

3.5.1 Calcul des déterminants

Définition 3.13 *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice carrée de $M_n\,(\mathbb{k})$.*

On appelle déterminant de A développé suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne le scalaire

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik} \det A_{ik},$$

où A_{ij} est la matrice d'ordre $(n-1)$ déduite de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On appelle déterminant de A développé suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne le scalaire

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{kj} \det A_{kj}.$$

On utilise également la notation :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Remarque 3.3 *Les déterminants ne concernent que les matrices carrées.*

Le déterminant d'une matrice carrée est unique.

Cas de déterminant d'ordre 2 :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2\,(\mathbb{k})\,.$$

Alors
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Exemple 3.26

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (-4)(-1) = -10,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -7 \\ -\pi & 4 \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2}\right)(4) - (-\pi)(-7) = 10 - 7\pi.$$

Cas de déterminant d'ordre 3 :
Soit
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{k}).$$

Alors
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Première méthode : Développement suivant la première ligne.

$$\det A = (-1)^{1+1}(a_{11})\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(a_{12})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(a_{13})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}).$$

Deuxième méthode : Développement suivant la troisième colonne.

$$\det A_{3\times 3} = (-1)^{1+3}(a_{13})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(a_{23})\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(a_{33})\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Exemple 3.27 *Soit*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer detA.
Développement la première ligne :

$$detA=\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}(3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}(-7)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(8)\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(3)(4+2)+(7)(-3-10)+(8)(3-20)=-209.$$

Développement la troisième colonne :

$$detA=\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}(8)\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}(2)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}(1)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=(8)(3-20)-(2)(-3+35)+(12-21)=-209.$$

La règle de Sarrus :
Cette règle est valable uniquement pour les matrices carrées d'ordre 3.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Propriétés des déterminants :
Soient A, B deux matrices carrées de $M_n(\mathbb{k})$ et $\lambda\in\mathbb{k}$.
1) $\det I_n=1$.
2) $\det(\lambda A)=\lambda^n\det A$.
3) $\det(AB)=\det A\det B$.

4) $\det(A^m) = (\det A)^m, m \in \mathbb{N}^*$.

5) A est inversible $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$ de plus $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

6) $\det({}^tA) = \det A$.

7) Le déterminant de A ne change pas de valeur si on ajoute à une colonne une combinaison linéaires d'autres colonnes.

8) Un déterminant est nul si l'une de ses colonnes est nulle.

9) Un déterminant est nul si ses colonnes (resp. ses lignes) sont liées.

10) Si A est une matrice triangulaires inférieure ou supérieure, alors $\det A = \Pi_{i=1}^n a_{ii}$.

3.5.2 Calcul de l'inverse d'une matrice en utilisant le déterminant

La formule $AA^{-1} = I_n$ permet de calculer l'inverse A^{-1} de la matrice inversible A. On détermine ici une formule plus performante de calcul de A^{-1}. Cette formule utilise les comatrices.

Définition 3.14 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$. On appelle cofacteur de la place (i,j) dans A et on note c_{ij} le nombre :*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

où : A_{ij} est la matrice d'ordre $(n-1)$ déduite de A en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

Définition 3.15 *On appelle comatrice de A la matrice carrée d'ordre n définie par :*

$$comA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{ni} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

où c_{ij} est le cofacteur de la place (i,j) dans A.

Théorème 3.28 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$, alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(comA).$$

Exemple 3.29 *Soit la matrice A de $M_2(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1} si elle existe.
On a : $detA = 8 \neq 0$, donc A^{-1}existe.

$$ComA = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det(4) & (-1)^{1+2}\det(2) \\ (-1)^{2+1}\det(-3) & (-1)^{2+2}\det\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$ComA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad {}^{t}(ComA) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.30 *Soit la matrice de $M_3(\mathbb{R})$*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer B^{-1} si elle existe.
On a : $detB = 25 \neq 0$, donc B^{-1}existe.

$$ComB = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

donc

$$ComB = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 7 & -3 & 5 \\ 8 & -7 & -5 \end{pmatrix},$$

d'où

$$^{t}(ComB)=\begin{pmatrix}-2&7&8\\8&-3&-7\\-5&5&-5\end{pmatrix}.$$

Alors

$$B^{-1}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-2&7&8\\8&-3&-7\\-5&5&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{25}&\frac{7}{25}&\frac{8}{25}\\\frac{8}{25}&-\frac{3}{25}&-\frac{7}{25}\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

3.6 Exercices corrigés

Exercise 3.31 *Soient A, B, C et M quatre matrices :*

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1\\3&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix}\ \text{et } M=\begin{pmatrix}2&4&-1\\1&0&1\\-3&1&2\end{pmatrix}.$$

Calculer dans le cas d'existence : $3A-2B$, $A+C$, AB, BA, A^2, AC, CA, C^t

Solution.

$$3A-2B=3\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-1\\3&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&5\\6&5\end{pmatrix}$$

$$A+C=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix}:\ (\textit{L'additionne n'est pas définie})$$

$$AB=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\3&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-\dfrac{5}{2}\\10&-3\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&-1\\3&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\11&4\end{pmatrix}$$

$$A^2=A.A=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&5\\20&8\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&0\\8&2&2\end{pmatrix}$$

$$CA=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}:(\textit{Le produit n'est pas défini})$$

$$C^t=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\-1&3\end{pmatrix}$$

Exercise 3.32 *Soit M la matrice suivante :*

$$M=\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

1) Calculer $\det M$*.*

2) La matrice M est elle inversible ?

3) Calculer M^{-1} la matrice inverse de M.

Solution.

1) Calculons $\det M$*.*

$$\begin{aligned}\det M &= \begin{vmatrix}-1&2&1\\2&1&-2\\1&0&1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}2&-2\\1&1\end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}\\ &= -(1)(1-0)-2(2+2)+(0-1)=-10\end{aligned}$$

2) La matrice M est elle inversible ?

On a : $\det M=-10\neq 0$*, donc la matrice M est inversible.*

3) Calculons M^{-1} la matrice inverse de M.

On a :

$$M^{-1}=\frac{1}{\det M}(comM)^t,$$

où $comM$ la comatrice de M.

$$comM=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}+2&-2\\1&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1&+2\\1&0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1&1\\2&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&-1\\-2&-2&2\\-5&0&-5\end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{\det M}(comM)^t = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}^t \\ &= \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

est la matrice inverse de M.

Exercise 3.33 *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$, où I_3 est la matrice identité et $0_{M_3(\mathbb{R})}$ est la matrice nulle.

2) Déduire que A est inversible, puis donner son inverse A^{-1} sans calcul.

Solution.

Calculons A^2

On a :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifions que : $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

On a :

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2I_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Déduire que A est inversible.

On a

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})} &\Longrightarrow A(A - 3I_3) = (A - 3I_3)A = -2I_3 \\ &\Longrightarrow \frac{-1}{2}A(A - 3I_3) = \frac{-1}{2}(A - 3I_3)A = I_3 \\ &\Longrightarrow A(\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I_3) = (\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I_3)A = I_3 \end{aligned}$$

A est inversible car il existe $B = (\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I_3)$ telle que : $AB = I_3$.

On a :

$$A^{-1} = B = (\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I_3) = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après calculs, on obtient

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Exercise 3.34 *Soit A la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1} la matrice inverse de A.

Solution.

1) Calculons $\det A$*.*

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

On a : $A = -1 \neq 0$*, donc la matrice* A *est inversible et* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} (comA)^t$*, où* $comA$ *la comatrice de* A*.*

$$comA = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det(1) & (-1)^{1+2}\det(1) \\ \\ (-1)^{2+1}\det(2) & (-1)^{2+2}\det(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A}(comA)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t \\ &= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

est la matrice inverse de A*.*

Exercise 3.35 *On considère la matrice suivante :*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le déterminant de B*.*

a) En développant selon la deuxième ligne.

b) En développant selon la troisième colonne.

c) En utilisant la règle de Sarrus.

2) B *est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.*

Solution.

1) Calculons le déterminant de B.

a) Calculons le déterminant de B, en développant selon la deuxième ligne. Le déterminant de B en développant la ligne 2 est donné par :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{2+3} \times 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

b) Calculons le déterminant de B, en développant selon la troisième colonne. Le déterminant de B en développant la colonne 3 est donné par :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+3} \times (-2) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

c) Calculons le déterminant de B, en utilisant la règle de Sarrus.
** En ajoutant la première colonne comme quatrième et la deuxième comme cinquième, donc on obtient :*

$$\det(B) = \left|\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Alors $\det(B) = -1$.

** En ajoutant la première ligne comme quatrième ligne et la deuxième ligne comme cinquième ligne, donc on obtient :*

$$\det(B) = \begin{matrix} \left|\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{matrix}\right| \\ \begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \end{matrix} = -1$$

Alors $\det(B) = -1$

Remarque : *Attention cette règle ne s'applique qu'aux matrices carrées d'ordre 3.*

La matrice B est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0*,*

2) B est-elle inversible ?

On a : $det(B) = -1 \neq 0$*, donc B est inversible.*

Calculons l'inverse de B.

On a $B^{-1} = \dfrac{1}{det(B)} {}^{t}(comB)$ *où* $comB$ *est la comatrice de B définie par :*

$$comB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

où c_{ij} *est le cofacteur de la place* (i, j) *dans* B*, tel que* $c_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det(B_{ij})$.

où B_{ij} *la matrice d'ordre (2) déduite de* B *en supprimant la* i *ligne et la* j *colonne.*

Donc,

$$comB = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où,

$$^{t}(comB) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercise 3.36 *Soient A, B deux matrices carrées de taille n, et I_n la matrice d'identité.*
On suppose que : $AB = I_n + A + A^2$.

Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1} en fonction de A, B et I_n.

Solution.

On a :

$$\begin{aligned} AB = I_n + A + A^2 &\Leftrightarrow \quad AB - A - A^2 = I_n \\ &\Leftrightarrow \quad A(B - I_n - A) = I_n \\ &\Leftrightarrow \quad (B - I_n - A)A = I_n \end{aligned}$$

En déduire que A est inversible et $(B - I_n - A)$ est l'inverse de A, donc : $A^{-1} = B - I_n - A$.

Exercise 3.37 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

deux matrices.
Trouver les matrices B telle que $AB = BA$.

Solution.

On a :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 2c & -b + 2d \\ a + 3c & b + 3d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + b & 2a + 3b \\ -c + d & 2c + 3d \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (AB = BA) \Rightarrow & \begin{pmatrix} -a + 2c & -b + 2d \\ a + 3c & b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + b & 2a + 3b \\ -c + d & 2c + 3d \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{cases} -a + 2c = -a + b \\ -b + 2d = 2a + 3b \\ a + 3c = -c + d \\ b + 3d = 2c + 3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = b \\ d = a + 2b \\ a + 4c = d \\ b = 2c \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a = d - 4c \\ b = 2c \\ c \in \mathbb{R} \\ d \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, les matrices B telle que $AB = BA$ sont :

$$B = \begin{pmatrix} d - 4c & 2c \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Exercise 3.38 *Calculer le déterminant de la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déduire A^n en fonction de n .

Solution.

On a :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} : A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercise 3.39 *Soit A la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer A^2, A^3, A^4 .

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déduire A^n en fonction de n.

Solution.

On a :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^3.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\} : A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercise 3.40 *Soit M la matrice suivante :*

$$M=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer M^2 et M^3 .

2) Déduire que : $M^3+2M^2-M-2I_3=0$.

3) Montrer que M est inversible et calculer M^{-1} l'inverse de M.

Solution.

1) Calculons M^2 et M^3.

$$M^2=M.M=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$M^3=M.M^2=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 & 14 & 14 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Déduisons que : $M^3+2M^2-M-2I_3=0$.

On a :

$$M^3+2M^2-M-2I_3=$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 14 & 14 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Montrons que M est inversible.

On a :

$$\begin{aligned} M^3+2M^2-M-2I_3=0 &\iff M^3+2M^2-M=2I_3 \\ &\iff M\left(M^2+2M-I_3\right)=2I_3 \\ &\iff M\left(\frac{1}{2}M^2+M-\frac{1}{2}I_3\right)=I_3 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} M^3+2M^2-M-2I_3=0 &\iff M^3+2M^2-M=2I_3\\ &\iff \left(M^2+2M-I_3\right)M=2I_3\\ &\iff \left(\frac{1}{2}M^2+M-\frac{1}{2}I_3\right)M=I_3 \end{aligned}$$

Donc on a :

$$M\left(\frac{1}{2}M^2+M-\frac{1}{2}I_3\right)=\left(\frac{1}{2}M^2+M-\frac{1}{2}I_3\right)M=I_3$$

Alors, M est inversible et son inverse est donné par : $M^{-1}=\frac{1}{2}M^2+M-\frac{1}{2}I_3$.
Calculons M^{-1} l'inverse de M.
On a :

$$M^{-1}=\frac{1}{2}M^2+M-\frac{1}{2}I_3=M^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7&-6&-6\\0&1&0\\3&-3&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&2&2\\-2&5&4\\1&-5&-4\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-2&5&4\\\frac{5}{2}&-\frac{13}{2}&-\frac{11}{2}\end{pmatrix}.$$

Exercise 3.41 *Soit A et B les deux matrices suivantes :*

$$A=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&4&2\\0&0&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les réels λ_1, λ_2 tel que : $A=\lambda_1B+\lambda_2I_3$.
2) Calculer B^2.
3) Calculer A^2, A^3 et A^4 comme combinaison linéaire des matrices B et I_3.
Solution.
1) Déterminons les réels λ_1, λ_2 tel que : $A=\lambda_1B+\lambda_2I_3$.
On a :

$$A=\lambda_1B+\lambda_2I_3 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}4&0&2\\0&4&2\\0&0&2\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4&0&2\\0&4&2\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2&0&2\lambda_1\\0&\lambda_1+\lambda_2&2\lambda_1\\0&0&-\lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 4 \\ 2\lambda_1 = 2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Donc, $A = B + 3I_3$.
2) Calculons B^2.
On a :

$$B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

3) Calculons A^2, A^3 *et* A^4 *comme combinaison linéaire des matrices* B *et* I_3.
On a :

$$A^2 = A.A = (B + 3I_3)(B + 3I_3) = B^2 + 3B + 3B + 9I_3 = 6B + 10I_3$$

$$A^3 = A^2.A = (6B + 10I_3)(B + 3I_3) = 6B^2 + 18B + 10B + 30I_3 = 28B + 36I_3$$

$$A^4 = A^3.A = (28B + 36I_3)(B + 3I_3) = 28B^2 + 36B + 84B + 108I_3 = 120B + 136I_3$$

Chapitre 4

Systèmes d'équations linéaires

4.1 Introduction

Les systèmes linéaires interviennent à travers leurs applications dans de nombreux contextes, car ils forment la base calculatoire de l'algèbre linéaire. Ils permettent également de traiter une bonne partie de la théorie de l'algèbre linéaire en dimension finie. Le but de ce chapitre est de résoudre des systèmes linéaires.

4.2 Généralités

Dans tout le chapitre, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 4.1 *On appelle système linéaire de n équations à m inconnues et à coefficients dans $\mathbb{k}$, tout système de la forme :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases} \tag{4.1}$$

les $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ sont appelés les coefficients du système (4.1).

La matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

est appelée matrice du système (4.1).

Le vecteur $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelé le second membre du système (4.1).

Le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelé le vecteur inconnu du système (4.1).

Alors le système (4.1) *s'écrit sous la forme matricielle suivante* $MX = B$ *c'est à dire*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Système homogène associé :

A un système (4.1) on associe un système homogène (4.2) en annulant les secondes membres des équations de système (4.1) .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

alors le système homogène (4.2) s'écrit sous la forme matricielle suivante $MX = 0$.

Un tel système homogène (4.2) possède au moins la solution $(0, 0, \dots, 0)$ dite solution triviale.

Définition 4.2 *Une solutions du système* (4.1) *est une liste de* m *nombre réels* $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ *(un* $m-$*uplet) tels que si l'on substitue* $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ *dans le système* (4.1)*, on obtient une égalité.*

On appelle l'ensemble des solutions du système (4.1) *l'ensemble de tous ces* $m-$*uplet vérifiant* (4.1)*.*

Définition 4.3 *On dit que deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Théorème 4.1 *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit a une seule solution, soit a une infinité de solutions.*

4.3 Les méthodes de résolution d'un système linéaire

4.3.1 Systèmes de Cramer

Le système (4.1) est dit de Cramer si et seulement si M est carrée et $\det M \neq 0$. Dans ce cas, (4.1) admet une unique solution donnée par :

$$x_i = \frac{\det M_{x_i}}{\det M} \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

où M_{x_i} est la matrice obtenue de M en remplaçant la colonne i de M par : $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Exemple 4.2 *Résoudre le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 7, \\ 2x_1 - x_2 = 9. \end{cases} \tag{4.3}$$

On a :

$$(4.3) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$\det M = -13 \neq 0$, *donc* (4.3) *est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det M_{x_1}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\det M_{x_2}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}}{-13} = -1.$$

Alors la solution unique de système (4.3) *est* $(x_1, x_2) = (4, -1)$.

Exemple 4.3 *Résoudre le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases} \tag{4.4}$$

On a :

$$(4.4) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\det M = 12 \neq 0$, *donc* (4.4) *est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det M_{x_1}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{3}{2},$$

$$x_2 = \frac{\det M_{x_2}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{12} = 1,$$

$$x_3 = \frac{\det M_{x_3}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{1}{2}.$$

Alors la solution unique de système (4.4) *est* $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

4.3.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse

Considérons le système linéaire sous la forme matricielle $MX = B$ où M est une matrice carrée, dans le cas où M est inversible, nous pouvons utiliser la matrice pour trouver la solution du système linéaire.

Proposition 4.1 *Si la matrice M est inversible, alors la solution du système $MX = B$ est unique et est donnée par :*

$$X = M^{-1}B.$$

Exemple 4.4 *Résoudre le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 3, \\ -x + y - 2z = 2, \\ x + y + 3z = 1. \end{cases} \tag{4.5}$$

Le système (4.5) s'écrit sous la forme matricielle $MX = B$, *avec*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{et} \ \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

$\det M = -3 \neq 0$, *donc* M *est inversible d'où le système admet une solution unique donnée par :*

$$X = M^{-1}B \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -3 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{34}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc, $(x, y, z) = \left(-\frac{34}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{13}{3}\right)$ *est la solution unique du système.*

4.4 Exercices corrigés

Exercise 4.5 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} 2x - y = 10, \\ x - 3y = 15. \end{cases} \tag{4.6}$$

1) Ecrire le système (4.6) sous sa forme matricielle $AX = B$.

2) Calculer A^{-1} *la matrice inverse de* A.

3) En utilisant la matrice inverse A^{-1}, *résoudre le système (4.6).*

4) Résoudre le système (4.6) par la méthode de Cramer.

Solution.

Soit le système (4.6) suivant :

$$\begin{cases} 2x - y = 10, \\ x - 3y = 15. \end{cases}$$

1) Ecrire le système (4.6) sous sa forme matricielle $AX = B$.

$$(4.6) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

2) Calculer A^{-1} la matrice inverse de A.

Calculons $\det A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 1 = -5$$

On a : $\det A = -5 \neq 0$, *donc la matrice A est inversible et A^{-1} est donnée par :*

On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (comA)^t,$$

où $comA$ la comatrice de A.

$$comA = \begin{pmatrix} +\det(-3) & -\det(1) \\ -\det(-1) & +\det(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (comA)^t = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$$

est la matrice inverse de A.

3) En utilisant la matrice inverse A^{-1}, résoudre le système (4.6).

$$\begin{aligned} (4.6) \quad &\Leftrightarrow \quad AX = B \\ &\Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $(x, y) = (3, -4)$ *est la solution unique pour le système* (4.6).

4) Résoudre le système (4.6) *par la méthode de Cramer.*

On a le système (4.6) *est carré et* $\det A = -5 \neq 0$, *donc le système* (4.6) *est de Cramer admet une solution unique* (x, y).

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 15 & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-30 + 15}{-5} = 3$$

$$y=\frac{\det A_y}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 10\\ 1 & 15\end{vmatrix}}{-5}=\frac{30-10}{-5}=-4$$

Alors, $(x,y)=(3,-4)$ *est la solution unique pour le système* (4.6).

Exercise 4.6 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases}2x+3y-z=14\\ x-y+z=-2\\ x+y+z=4\end{cases} \tag{4.7}$$

1) Ecrire le système (4.7) *sous sa forme matricielle* $MX=B$.

2) Calculer M^{-1} *la matrice inverse de* M.

3) En utilisant la matrice inverse M^{-1}, *résoudre le système* (4.7).

4) Résoudre le système (4.7) *par la méthode de Cramer.*

Solution.

Soit le système (4.7) *suivant :*

$$\begin{cases}2x+3y-z=14\\ x-y+z=-2\\ x+y+z=4\end{cases}$$

1) Ecrire le système (4.7) *sous sa forme matricielle* $MX=B$.

$$(4.7)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$$

2) Calculer M^{-1} *la matrice inverse de* M.

Calculons $\det M$.

$$\begin{aligned}\det M &= \begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(2)\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-(3)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ &= (2)(-1-1)-3(1-1)+(-1)(1+1)=-6\end{aligned}$$

On a : $\det M=-6\neq 0$, *donc la matrice* M *est inversible et* M^{-1} *est donnée par :*

On a :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,(comM)^t\,,$$

où $comM$ *la comatrice de* M.

$$comM = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,(comM)^t = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Alors,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

est la matrice inverse de M.

3) En utilisant la matrice inverse M^{-1}*, résoudre le système* (4.7).

$$\begin{aligned} (4.7) \quad &\Leftrightarrow \quad MX = B \\ &\Leftrightarrow \quad X = M^{-1}B \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $(x, y, z) = (2, 3, -1)$ *est la solution unique pour le système* (4.7).

4) Résoudre le système (4.7) *par la méthode de Cramer.*

On a le système (4.7) *est carré et* $\det M = -6 \neq 0$, *donc le système (S) est de Cramer admet une solution unique* (x, y, z)

$$(4.7) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det M_x}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{(14)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{-6} \\ &= \frac{(14)(-2) - (3)(-6) + (-1)(2)}{-6} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\det M_y}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{(2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (14)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{-6} \\ &= \frac{(2)(-6) - (14)(0) + (-1)(6)}{-6} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\det M_z}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{(2)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (14)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} \\ &= \frac{(2)(-2) - (3)(6) + (14)(2)}{-6} = -1 \end{aligned}$$

Alors, $(x, y, z) = (2, 3, -1)$ *est la solution unique pour le système* (4.7).

Exercise 4.7 *Soit le système linéaire* (S) *suivant :*

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Résoudre le système linéaire (S) :

1) Par la méthode de la matrice inverse.

2) Par la méthode de Cramer.

Solution.

1) En utilisant la méthode de la matrice inverse.

En terme matriciel le système s'écrit

$$(S)\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow AX=b$$

avec

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On trouve la solution du système en inversant la matrice :

$$X=A^{-1}b.$$

L'inverse d'une matrice A se calcule ainsi :

si

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}com^t(A)$$

avec

$$det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1,$$

et

$$com(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$com^t(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} ?$$

ici on trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} com^t(A) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et comme $det(A) \neq 0$, on trouve

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système par la méthode de Cramer.

On a $det(A) = -1 \neq 0$, donc les formules de Cramer sont les suivantes :

$$x = \frac{detA_x}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3,$$

$$y = \frac{detA_y}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2,$$

$$z = \frac{detA_z}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

et donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercise 4.8 *On considère le système* (S_m) *suivant*

$$(S_m)\begin{cases} (m-1)x+y+z=1 \\ x+(m-1)y+z=1 \\ x+y+(m-1)z=1 \end{cases}$$

où m *est un paramètre réel.*

1) Ecrire le système (S_m) *sous forme matricielle :* $A_mX=b$.

2) Calculer le déterminant de A_m *et donner une condition pour que* (S_m) *admette une solution unique. Puis donner cette solution.*

Solution.

On a :

$$(S_m)\begin{cases} (m-1)x+y+z=1 \\ x+(m-1)y+z=1 \\ x+y+(m-1)z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (m-1) & 1 & 1 \\ 1 & (m-1) & 1 \\ 1 & 1 & (m-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$A_m=\begin{pmatrix} (m-1) & 1 & 1 \\ 1 & (m-1) & 1 \\ 1 & 1 & (m-1) \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Calculer le déterminant de A_m *et donner une condition pour que* (S_m) *admette une solution unique. Puis donner cette solution.*

Solution.

On a :

$$det(A_m)=\begin{vmatrix} (m-1) & 1 & 1 \\ 1 & (m-1) & 1 \\ 1 & 1 & (m-1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A_m) &= (m-1)\begin{vmatrix} (m-1) & 1 \\ 1 & (m-1) \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & (m-1) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & (m-1) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= m^3-3m^2+4=(m+1)(m-2)^2, \end{aligned}$$

si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ *alors* $det(A_m) \neq 0$ *d'où le système* (S_m) *est de Cramer et donc admette une unique solution.*
Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ *alors la solution est la suivante*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & (m-1) & 1 \\ 1 & 1 & (m-1) \end{vmatrix}}{det(A_m)} = \frac{(m-2)^2}{(m+1)(m-2)^2} = \frac{1}{m+1},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (m-1) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (m-1) \end{vmatrix}}{det(A_m)} = \frac{(m-2)^2}{(m+1)(m-2)^2} = \frac{1}{m+1},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} (m-1) & 1 & 1 \\ 1 & (m-1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{det(A_m)} = \frac{(m-2)^2}{(m+1)(m-2)^2} = \frac{1}{m+1},$$

donc,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{m+1} \end{pmatrix}.$$

Exercise 4.9 *Soit* λ *un paramètre réel . On considère le système* (S_λ) *suivant :*

$$(S_\lambda) \begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda, \\ x + \lambda y - z = 1, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

1) Ecrire le système (S_λ) *sous forme matricielle :* $A_\lambda X = b$.

2) Calculer le déterminant de A_λ *et donner une condition pour que* (S_λ) *admette une solution unique. Puis donner cette solution.*

Solution.
On a :

$$(S_\lambda) \begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda, \\ x + \lambda y - z = 1, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Calculons le déterminant de A_λ et donner une condition pour que (S_λ) admette une solution unique. Puis donner cette solution.
On a :

$$det(A_\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} det\,(A_\lambda) &= 1 \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda + 1) - 0 + \lambda\,(1-\lambda) = 1 - \lambda^2, \end{aligned}$$

si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, alors $det(A_\lambda) \neq 0$ d'où le système (S_λ) est de Cramer et donc admette une unique solution.
Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, alors la solution est la suivante

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{det(A_\lambda)} = \frac{2\lambda - 2\lambda^2}{1-\lambda^2} = \frac{2\lambda\,(1-\lambda)}{(1-\lambda)\,(1+\lambda)} = \frac{2\lambda}{\lambda+1},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{det(A_\lambda)} = \frac{0}{1-\lambda^2} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{det(A_\lambda)} = \frac{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}{1-\lambda^2} = \frac{(1-\lambda)\,(\lambda-1)}{(1-\lambda)\,(1+\lambda)} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1},$$

donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{\lambda+1} \\ 0 \\ \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 5

Réduction des matrices

5.1 Introduction

La réduction des matrices constitue le premier pas de ce que l'on appelle la théorie spectrale, ses applications pratiques sont nombreuses : modélisation des vibrations, dynamique des populations, analyse de données en composantes principales en statistique, mécanique quantique, économie mathématique,..., etc.

5.2 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 5.1 *Soit M une matrice carrée de $M_n(\mathbb{R})$.*

On dit que $X \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ si et seulement si :

1) $X \neq 0$ (ici $0 \equiv 0_{\mathbb{R}^n}$).

2) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $MX = \lambda X$.

Si X est un vecteur propre de M, alors le scalaire λ est la valeur propre de M associée à X.

On dit aussi que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Remarque 5.1 *1) La condition $X \neq 0$ est essentielle. En effet, si on ne l'impose pas, alors la condition 2) ne dit rien car pour tout λ, on a : $0 = M \times 0 = \lambda 0$.*

2) Un vecteur propre de M est donc un vecteur non nul dont l'image par M en est un multiple scalaire (on dit encore, lui est colinéaire).

3) Notons que $\lambda = 0$ est valeur propre de M si et seulement si $KerM \neq \{0\}$, c'est-'a-dire si et seulement si $x \mapsto MX$ n'est pas injective.

Proposition 5.1 *Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $M \in M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si : $Ker(M - \lambda I_n) \neq \{0\}$.*

Preuve. *En effet; λ est valeur propre si et seulement si il existe un $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$, c'est-'a-dire $MX - \lambda X = 0$, ou encore $(M - \lambda I_n) X = 0$.*

Définition 5.2 *(sous-espace vectoriel propre)*

L'ensemble de tous les vecteurs propres associés à une valeur propre λ, complété par le vecteur nul,

$$E_\lambda(M) = Ker(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathbb{R}^n : MX = \lambda X\},$$

est appelé ***sous-espace vectoriel propre*** *associé à λ. Sa dimension* $\dim E_\lambda(M)$ *est appelé multiplicité géométrique de la valeur propre λ.*

Définition 5.3 *L'ensemble de toutes les valeurs propres de M est appelé* ***spectre*** *de M et est noté $\sigma(M) \subset \mathbb{R}$. (ou $SP(M)$).*

Proposition 5.2 *1) Deux matrices semblables ont même spectre.*
2) On a $\lambda \in \sigma(M)$ si et seulement si $\det(M - \lambda I_n) = 0$.
3) On a $\sigma(M^t) = \sigma(M)$.

5.3 Polynôme caractéristique

Définition 5.4 *Le polynôme $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n)$ s'appelle le polynôme caractéristique de M.*

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1i} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2i} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ii} - \lambda & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{ni} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Corollaire 5.1 *On a $\lambda \in \sigma(M)$ si et seulement si λ est racine de $P_M(\lambda)$.*

On est ainsi ramené pour la recherche des valeurs propres à un problème classique des mathématiques, d'une importance historique majeure, trouver les racines d'un polynôme de degré n. Comme un tel polynôme a au plus n racines, on peut tout de suite en déduire le corollaire suivant.

Corollaire 5.2 *Toute matrice $n \times n$ admet au plus n valeurs propres.*

Exercise 5.3 *Soit la matrice M définie comme suit :*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer les valeurs propres de M.
2) Déterminer les sous espaces propre associés pour chaque valeurs propre.

1) Calculons les valeurs de M.

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda) - 2(2-\lambda) = \lambda(2-\lambda)(\lambda-4).$$

Donc, $P_M(\lambda) = \lambda(2-\lambda)(\lambda-4)$.

On a :

$$P_M(\lambda) = 0 \;\Rightarrow \lambda(2-\lambda)(\lambda-4) = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda \in \{0, 2, 4\},$$

d'où le spectre de M est $\sigma(M) = \{0, 2, 4\}$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3, \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc,

$$E_0(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_3 & x_3 & x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alors $E_0(M)$ est s.e.v engendré par $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où $\dim E_0(M) = 1$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = 2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

$$(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc,

$$E_2(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alors $E_2(M)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_2(M) = 1$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = 4$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

$$(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3, \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc,

$$E_4(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 & x_3 & x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alors $E_4(M)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_4(M) = 1$.

Proposition 5.3 *Si* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *est triangulaire, alors elle a* n *valeurs propres qui sont ses éléments diagonaux.*

Exemple 5.4 *Soit la matrice suivante :*

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P_M(\lambda)=\det(M-\lambda I_n)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 5 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda).$$

D'où le spectre de M est $\sigma(M)=\{2,3,4\}$.

5.4 Théorème de Cayley-Hamilton

5.4.1 Polynôme annulateur

Définition 5.5 *On dit qu'un polynôme $P(X)$ est un polynôme annulateur de la matrice M si $P(M)=0$.*

Proposition 5.4 *Si $P(X)$ est un polynôme annulateur de M, alors : $SP(M)\subseteq\{racines\ de\ P(M)\}$.*

5.4.2 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 5.5 *Soit $M\in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, alors : $P_M(M)=0$ où $P_M(\lambda)$ le polynôme caractéristique de M.*

C'est à dire le polynôme caractéristique de la matrice M est un polynôme annulateur de M.

Exemple 5.6 *Soit*

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$

On a :

$$P_M(\lambda)=\det\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-6.$$

Donc, $P_M(M) = M^2 - M - 6I_2 = 0$. *En effet :*

$$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

d'où,

$$M^2 - M - 6I_3 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.5 Caractérisation des matrices diagonalisables, trigonalisables

Nous abordons dans cette section les problèmes de trigonalisation et diagonalisation des matrices. Nous présentons quelques conséquences théoriques importantes de ces résultats.

5.5.1 Caractérisation des matrices diagonalisables

Définition 5.6 *On dit qu'une matrice M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.*

En d'autres termes, M est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ est diagonale. Dans ce

cas, on dit que la matrice P diagonalise la matrice M.

Proposition 5.5 *Une matrice M est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de M.*

Corollaire 5.7 *Une matrice M est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{R}^n$ est somme directe de sous-espaces propres.*

Preuve. *En effet, la réunion de bases des sous-espaces propres forme alors une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de M.*

Corollaire 5.8 *(Condition suffisante de diagonalisation).*

Si une matrice $n \times n$ a exactement n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Proposition 5.6 *Soit A une matrice carrée, Alors A est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

(i) Le polynôme caractéristique $P(A)$ de A est scindé.

(ii) L'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de A est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

Méthode pour diagonaliser

Soit M une matrice carrée de $M_n(\mathbb{R})$. Pour la diagonaliser :

1) On calcule d'abord son polynôme caractéristique $P_M(\lambda)$.

2) On cherche les racines de $P_M(\lambda) = 0$ ce sont les valeurs propres de M.

3) Pour toute valeur propre λ de M, on cherche une base de $Ker(M - \lambda I_n)$ i.e. on cherche une base de l'espace des solutions du système : $M.X = \lambda X$.

4) Si pour toute valeur propre λ de M, $\dim(M - \lambda I_n) = m_a(\lambda)$, où $m_a(\lambda)$ la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique $P_M(\lambda)$ de M, donc on dit M est diagonalisable et la réunion des bases des espaces propres forme une base de vecteurs propres.

Exemple 5.9 *Soit la matrice suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que M est diagonalisable et trouver une matrice P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

On a :

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda).$$

On a : La matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$, admet trois valeurs propres réelles distinctes $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$, donc la matrice M est diagonalisable.

Trouvons la matrice P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = 1$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

On a : $(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ -x_1 + 2x_2 = x_2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alors, $E_{\lambda=1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_3 & x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ (x_3) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\frac{-1}{2} x_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$
$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Donc, $E_{\lambda=1}(M)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda=1}(M) = 1$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = 2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

On a : $(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_1 \\ -x_1 + 2x_2 = 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = -3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_3 = -3x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc, $E_{\lambda=1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_2 & -3x_2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Alors $E_{\lambda=2}(M)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda=2}(M) = 1$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = 3$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On a : $(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3x_2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3x_2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc, $E_{\lambda=1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Alors, $E_{\lambda=3}(M)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda=3}(M) = 1$.

Donc,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{d'où} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, $P^{-1}MP$ *soit diagonale. En effet*

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.5.2 Caractérisation des matrices trigonalisables

Définition 5.7 *(Matrices semblables)*

Soient A, B *deux matrices carrées de* $M_n(\mathbb{k})$. *On dit que* A *et* B *sont semblables s'il existe une matrice carrée* P *inversible d'ordre* n *telle que* $B = P^{-1}AP$.

Cette relation est ce qu'on appelle une relation d'équivalence, car on a les trois propriétés suivantes :

1) A est toujours semblable à A, car $A = I^{-1}AI$.

2) Si $B = P^{-1}AP$ est semblable à A, alors $A = PBP^{-1}$ est semblable à B, car $P = \left(P^{-1}\right)^{-1}$.

3) Si $B = P^{-1}AP$ est semblable à A, et si $C = Q^{-1}BQ$ est semblable à B, alors $C = Q^{-1}P^{-1}APQ$ est semblable à A, car $Q^{-1}P^{-1} = (PQ)^{-1}$.

Proposition 5.7 *Soit A une matrice carrée, et soit $B = P^{-1}AP$ une matrice semblable à A. Alors A et B ont le même polynôme caractéristique. De plus, $A^m = PB^mP^{-1}$*

Définition 5.8 *Une matrice M de $M_n(\mathbb{k})$ est dite trigonalisable dans $M_n(\mathbb{k})$, si M est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $M_n(\mathbb{k})$. C'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{k})$ et une matrice triangulaire supérieure T à coefficients dans $\mathbb{k}$ telles que : $M = PTP^{-1}$.*

Dans ce cas, on dit que la matrice P trigonalise la matrice M.

Remarque. Toute matrice triangulaire supérieure étant semblable à une matrice triangulaire inférieure, une matrice est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{k})$ si, et seulement si, elle est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Définition 5.9 *On dit qu'un polynôme est scindé s'il est factorisable sur $\mathbb{R}$ en n produits des facteurs du premier degré.*

Théorème 5.10 *(Théorème de trigonalisation)*

Une matrice M est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Remarque 5.2 *Dans $\mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable.*

Théorème 5.11 *Les sous-espaces propres d'une matrice M associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.*

Dimension d'un sous-espace propre et ordre de multiplicité d'une valeur propre

On va maintenant comparer l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé à cette valeur propre.

Proposition 5.8 *Soit A une matrice carrée, soit λ une valeur propre de A de multiplicité $n(\lambda)$. Alors* $\dim E_\lambda \leq n(\lambda)$.

Exercise 5.12 *Soit A la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.

2) Déterminer le sous-espace vectoriel propre associé à chaque valeur propre.

3) La matrice A est-elle diagonalisable, triangularisable ?

4) Effectuer explicitement la réduction.

Solution.

1) On détermine et on factorise le polynôme caractéristique de A. On a :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda \\ -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$= (3-\lambda)\left((3-\lambda)(-3-\lambda) - 1\right) - 2\left((3+\lambda) - 2\right) + 4\left(1 + 2(3-\lambda)\right)$$

$= -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$. *Alors,* $P_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$.

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -1$, racine simple et $\lambda_2 = 2$, racine double.

2) Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à chaque valeur propre.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda_1 = -1$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

On a : $(AX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -x_1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -x_2 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R}. \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textit{Donc, } E_{\lambda_1=-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -x_1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\}. \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Alors $E_{\lambda_1=-1}(A)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda_1=-1}(A) = 1$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda_2 = 2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

On a : $(AX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2x_1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2x_2 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3, \\ x_2 = -x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc, $E_{\lambda=2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_3 & -x_3 & x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (-x_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Alors $E_{\lambda=2}(A)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda=2}(A) = 1$.

3) La matrice A ***est-elle diagonalisable, triangularisable ?***

A *est-elle diagonalisable ?*

A est diagonalisable ssi $\dim\ker(A-2I_3)=2$ *où* $rg\,(A-2I_3)=2$.

On a : l'espace propre associé à la valeur double $\lambda_2=2$ *est de dimension* 1 *donc, A n'est pas diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.

La matrice A ***est-elle triangularisable ?***

On a : $P_A(\lambda)=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ *est scindé sur* $\mathbb{R}$ *donc, A est triangularisable sur* $\mathbb{R}$.

4) Effectuons explicitement la réduction.

On sait que $\ker\left((A-2I_3)^2\right)$ *est de dimension* 2*, et que :*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(A-2I_3) \subset \ker\left((A-2I_3)^2\right).$$

On cherche donc un deuxième vecteur dans $\ker\left((A-2I_3)^2\right)$*, linéairement indépendant de* $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$(A-2I_3)^2=(A-2I_3).(A-2I_3)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

$$\left((A-2I_3)^2 X = 0\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9x_1 - 18x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 9x_1 + 18x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On prend le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

De plus,

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ D'où, } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.6 Applications de la réduction

Nous présentons ici des applications de la diagonalisation des matrices avec le calcul des puissances des matrices, application en dynamique des populations et application à la résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires.

5.6.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

Proposition 5.9 *Soit M une matrice diagonalisable. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, les valeurs propres de M^k sont les λ_i^k. De plus, si P est une matrice qui diagonalise M, alors*

$$M^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Plus généralement, si Q est un polynôme à une indéterminée, on a :

$$Q(M) = P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & Q(\lambda_2) & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Preuve. *La formule pour un polynôme Q se déduit immédiatement de celles pour les monômes M^k. Si P diagonalise M, ceci veut dire que PMP^{-1} est diagonale, ou encore*

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} M^k &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\,.....\,(PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)DP^{-1}.....PDP^{-1} \\ &= PDDD.....DP^{-1} \quad car\ P^{-1}P = I_n \\ &= PD^kP^{-1}, \end{aligned}$$

où,

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

d'où le résultat.

Exemple 5.13 *Soit M la matrice suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer M^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

On a : $P_M(\lambda)$ le polynôme caractéristique de M est :

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda).$$

Les valeurs propres de M sont $\{2, 3\}$ donc M est diagonalisable.

Déterminons le vecteur propre associé à $\lambda = 2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 2x_1 \\ \\ 3x_2 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda = 2$.

Déterminons le vecteur propre associé à $\lambda = 3$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3x_1 \\ 3x_2 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Alors* $\begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre associé à* $\lambda = 3$.

Les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *forment une base de* $\mathbb{R}^2$ *composée de vecteurs propres, la matrice de passage* P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned} M^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M^n &= \begin{pmatrix} 2^n & -5 \times 2^3 + 5 \times 3^3 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.6.2 Résolution des systèmes différentiels linéaires

Voici une application de la diagonalisation des matrices pour la résolution des systèmes différentiels linéaires.

Soit le système différentiel linéaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t), \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t), \end{cases} \tag{5.1}$$

les $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ sont des réels appelés les coefficients du système (5.1). Un tel système différentiel (5.1) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = M.X(t), \tag{5.2}$$

où

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

La matrice M est appelée matrice du système (5.2), le vecteur $X(t)$ est appelé le vecteur inconnu du système et $\frac{dX(t)}{dt}$ désigne la dérivée du vecteur $X(t)$.

Si la matrice M est diagonalisable, donc il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $D = P^{-1}MP$.

On pose le changement de variable suivant : $Y(t) = P^{-1}X(t)$, d'où $\frac{dY(t)}{dt} = P^{-1}\frac{dX(t)}{dt}$, donc

$$\frac{dY(t)}{dt} = P^{-1}M.X(t) = P^{-1}MP.Y(t) = D.Y(t).$$

Le système est donc équivalent au système : $\frac{dY(t)}{dt} = D.Y(t)$, qui est facile à intégrer, car D est diagonale. En effet, si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

les solutions de cette équation sont les vecteurs $Y(t)$ dont la i ième composante est $y_i(t) = e^{\lambda_i t}y_i(0)$. Il suffit alors de calculer $x(t)$ en calculant $x(t) = Py(t)$.

Exemple 5.14 *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 5x_1(t) + 3x_2(t), \\ \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} \tag{5.3}$$

où x_1, x_2 sont deux fonctions réelles. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système $\dfrac{dY(t)}{dt} = D.Y(t)$ *avec* $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ *s'écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = 2u(t), \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = 6v(t), \end{cases}$$

Ces deux équations ont pour solution : $u(t) = \beta_1 e^{2t}$ *et* $v(t) = \beta_2 e^{6t}$, *où* β_1 *et* β_2 *sont deux constantes réelles. On en déduit que la solution de système (5.3) est :* $X(t) = PY(t)$ *donc :*

$$(X(t) = PY(t)) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 e^{2t} \\ \beta_2 e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -\beta_1 e^{2t} + 3\beta_2 e^{6t}, \\ \\ x_2(t) = \beta_1 e^{2t} + \beta_2 e^{6t}. \end{cases}$$

Exemple 5.15 *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t), \\ \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t), \end{cases} \tag{5.4}$$

où x_1, x_2 sont deux fonctions réelles. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le système $\dfrac{dY(t)}{dt} = D.Y(t)$ *avec* $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ *s'écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = 2u(t), \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = 3v(t), \end{cases}$$

Ces deux équations ont pour solution : $u(t) = \beta_1 e^{2t}$ *et* $v(t) = \beta_2 e^{3t}$*, où* β_1 *et* β_2 *sont deux constantes réelles. On en déduit que la solution de système* (5.4) *est :* $X(t) = PY(t)$ *donc :*

$$(X(t) = PY(t)) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 e^{2t} \\ \beta_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \beta_1 e^{2t} + \beta_2 e^{3t}, \\ \\ x_2(t) = -\beta_1 e^{2t} - 2\beta_2 e^{3t}. \end{cases}$$

5.6.3 Application en dynamique des populations

Soit une population animale divisée en deux classes d'individus : Individus immatures et les individus adultes. On recense la population à intervalles réguliers, disons tous les ans. Son état à l'année n est donc représenté par un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

$$x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix},$$

où $x_1(n)$: désigne le nombre d'individus immatures et $x_2(n)$: désigne le nombre d'individus adultes et le vecteur

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \quad \text{représente la population initiale.}$$

On observe que, d'une année sur l'autre, une proportion $0 \leq a \leq 1$ d'individus immatures meurt, le reste devient adulte. Pour les individus adultes, une proportion $0 \leq b \leq 1$ meurt tandis qu'une proportion $0 \leq q \leq 1$ des adultes donne naissance à un individu immature. Par conséquent, à l'année $n+1$ on aura :

$$\begin{cases} x_1(n+1) = qx_2(n), \\ x_2(n+1) = (1-a)x_1(n) + (1-b)x_2(n). \end{cases}$$

On obtient donc une évolution (une dynamique) de la forme :

$$x(n+1) = \begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qx_2(n) \\ (1-a)x_1(n) + (1-b)x_2(n) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & q \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} = M.x(n), \quad \text{où } M = \begin{pmatrix} 0 & q \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}.$$

On en déduit que : $x(n) = M^n x(0)$. La survie ou l'extinction de la population est gouvernée par le comportement des puissances successives de la matrice M et par la population initiale. On est donc amené à étudier les valeurs propres de M en fonction des paramètres a, b et q. En effet, si celle-ci se diagonalise en D, on aura : $x(n) = PD^nP^{-1}x(0)$.

Le polynôme caractéristique de la matrice M est :

$$\begin{aligned} P_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & q \\ 1-a & 1-b-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-b-\lambda) - (1-a)q \\ &= \lambda^2 + (b-1)\lambda - q(1-a) \end{aligned}$$

Donc, $P_M(\lambda) = \lambda^2 + (b-1)\lambda - q(1-a)$. On a : $P_M(\lambda) = 0$, $\Delta = (b-1)^2 + 4q(1-a) > 0$, car $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$.

On trouve toujours deux valeurs propres réelles distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{1 - b - \sqrt{(1-b)^2 + 4q(1-a)}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{1 - b + \sqrt{(1-b)^2 + 4q(1-a)}}{2}.$$

D'où, la matrice M est diagonalisable est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & q \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Etude le cas extrême. Supposons les taux de mortalité a et b nuls (cas extrême). On obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, $P_M(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice M est :

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - q.$$

On a : $\Delta = 1 + 4q > 0$, ($q > 0$, le taux de naissance), alors $P_M(\lambda) = 0$ admet deux racines réelles $\lambda_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1+4q}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1+4q}}{2}$.

On a : $\lambda_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1+4q}}{2} > 1$ et $\lambda_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1+4q}}{2} < 0$, on peut voir que la population se comportera en général comme λ_2^n, c'est-à-dire qu'elle explose exponentiellement avec le temps.

Par exemple, pour $a = 0,2$ et $b = 0,3$, on obtient pour diverses valeurs de q.

Si $q = \frac{3}{8} = 0.375$, alors $\lambda_1 = -0,648$ et $\lambda_2 = 1$, et la population tend vers un état d'équilibre quand le temps tend vers l'infini.

On a : la matrice M est diagonalisable, donc il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $D = P^{-1}MP$.

On pose : $y(n) = P^{-1}x(n)$, donc ce vecteur suit la dynamique $y(n) = D^n y(0)$ avec

$$D^n = \begin{pmatrix} (-0,648)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$y(n) = D^n y(0) = \begin{pmatrix} (-0,648)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-0,648)^n y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}.$$

Donc, $y(n) = \begin{pmatrix} (-0,648)^n y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ y_2(0) \end{pmatrix}$ quand $n \rightarrow +\infty$. et

$$x(n) = P \begin{pmatrix} 0 \\ y_2(0) \end{pmatrix}.$$

Prenons un taux de naissance légèrement supérieur :

Si $q = 0,5$, alors $\lambda_1 = -0.661\,19$ et $\lambda_2 = 1.361\,2$ et la population explose exponentiellement car $\lambda_1^n \rightarrow 0$ et $\lambda_2^n \rightarrow +\infty$.

5.7 Exercices corrigés

Exercise 5.16 *Soit M la matrice suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres de M.

2) Montrer que M est diagonalisable.

3) Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

4) Calculer M^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1) Déterminons les valeurs propres de M.

On détermine et on factorise le polynôme caractéristique de M*. On a :*

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 3.$$

Donc, $P_M(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 12$*. On a :* $P_M(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 12$.
$\Delta = 64 - 4(1)(12) = 16$*, d'où* $\lambda_1 = \dfrac{8-4}{2} = 2$*, et* $\lambda_2 = \dfrac{8+4}{2} = 6$.
Donc, les valeurs propres de M *sont* $\{2, 6\}$.

2) Montrons que M *est diagonalisable.*

On a : La matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$*, admet deux valeurs propres réelles distinctes, donc la matrice* M *est diagonalisable.*

3) Déterminons une base de vecteurs propres et P *la matrice de passage.*

Les deux sous-espaces propres distincts sont de dimension 1*, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.*

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = 2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$E_{\lambda=2}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 & x_2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x_2) \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alors $E_{\lambda=2}(M)$ *est s.e.v propre engendré par* $\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda=2}(M) = 1$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = 6$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 6x_1 \\ x_1 + 3x_2 = 6x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$E_{\lambda=6}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 3x_2 & x_2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alors $E_{\lambda=6}(M)$ *est s.e.v propre engendré par* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda=6}(M) = 1$.

Les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *forment une base de* $\mathbb{R}^2$ *composée de vecteurs propres, la matrice de passage* P

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Calculons M^n, *pour* $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} M^n &= PD^nP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ M^n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}2^n + \frac{3}{4}6^n & -\frac{3}{4}2^n + \frac{3}{4}6^n \\ \\ -\frac{1}{4}2^n + \frac{1}{4}6^n & \frac{3}{4}2^n + \frac{1}{4}6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercise 5.17 *Soit* M *la matrice suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres de M.

2) Montrer que M *est diagonalisable.*

3) Déterminer une base de vecteurs propres et P *la matrice de passage.*

4) Calculer M^n, *pour* $n \in \mathbb{N}$.

5) Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + 4x_2(t), \\ \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t), \end{cases} \tag{5.5}$$

où x_1, x_2 *sont deux fonctions réelles.*

Solution.

1) Déterminons les valeurs propres de M.

On détermine et on factorise le polynôme caractéristique de M. On a :

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4.$$

Donc, $P_M(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6$.

On a : $P_M(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6$.

$\Delta = 1 - 4(1)(-6) = 25$, *d'où* $\lambda_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$, *et* $\lambda_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$.

Donc, les valeurs propres de M sont $\{-2, 3\}$.

2) Montrons que M est diagonalisable.

On a : La matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$, admet deux valeurs propres réelles distinctes, donc la matrice M est diagonalisable.

3) Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

Les deux sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = -2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = -2x_1 \\ x_1 - x_2 = -2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1, \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$E_{\lambda=-2}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x_1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alors $E_{\lambda=-2}(M)$ est s.e.v propre engendré par $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où $\dim E_{\lambda=-2}(M) = 1$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = 3$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$

$$(MX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 3x_1 \\ \\ x_1 - x_2 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_2 \\ \\ x_1 = 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_2, \\ \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$E_{\lambda=3}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 4x_2 & x_2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x_2) \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Alors $E_{\lambda=3}(M)$ *est s.e.v propre engendré par* $\begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda=3}(M) = 1.$

Les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *forment une base de* $\mathbb{R}^2$ *composée de vecteurs propres, la matrice de passage* P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

4) Calculons M^n*, pour* $n \in \mathbb{N}$*.*

On a :

$$\begin{aligned} M^n &= PD^nP^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ M^n &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-2)^n + 4.3^n & 4.3^n - 4.(-2)^n \\ \\ 3^n - (-2)^n & 4.(-2)^n + 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5) Résoudre le système différentiel (5.5) *suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + 4x_2(t), \\ \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t), \end{cases}$$

où x_1, x_2 sont deux fonctions réelles. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système $\dfrac{dY(t)}{dt} = D.Y(t)$ *avec* $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ *s'écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = -2u(t), \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = 3v(t), \end{cases}$$

Ces deux équations ont pour solution : $u(t) = \beta_1 e^{-2t}$ *et* $v(t) = \beta_2 e^{3t}$, *où* β_1 *et* β_2 *sont deux constantes réelles. On en déduit que la solution de système* (5.5) *est :* $X(t) = PY(t)$ *donc :*

$$(X(t) = PY(t)) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 e^{-2t} \\ \beta_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \beta_1 e^{-2t} + 4\beta_2 e^{3t}, \\ \\ x_2(t) = -\beta_1 e^{-2t} + \beta_2 e^{3t}, \end{cases}$$

est la solution de système (5.5).

Exercise 5.18 *Soit A la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.

2) Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$.

3) Démontrer que A est diagonalisable.

4) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1) On détermine et on factorise $P_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A.

On a :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= (3-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) - (4-\lambda) = \left((3-\lambda)^2 - 1\right)(4-\lambda)$$

$$= (3-\lambda-1)(3-\lambda+1)(4-\lambda). = (2-\lambda)(4-\lambda)(4-\lambda).$$

Donc, $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)(4-\lambda)$.

2) Déterminons une matrice D *diagonale et une matrice* P *inversible telles que :* $A = PDP^{-1}$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda_1 = 2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$(AX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_3 = 2x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2x_2 \\ -x_1 + 3x_3 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R}. \\ x_2 = -2x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

Donc,

$$E_{\lambda_1=2}(A) = \left\{\begin{pmatrix} x_1, & -2x_1, & x_1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x_1\begin{pmatrix} 1, & -2, & 1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Alors $E_{\lambda_1=2}(A)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 1, & -2, & 1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda_1=2}(A) = 1$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda_2 = 4$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

$$(AX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_3 = 4x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4x_2 \\ -x_1 + 3x_3 = 4x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R}, \\ x_3 = -x_1 \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc,

$$E_{\lambda=4}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & -x_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0, & x_2, & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1, & 0, & -x_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alors $E_{\lambda=4}(A)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \end{pmatrix}$ *et comme ces vecteurs sont libre, donc* $\dim E_{\lambda=4}(A) = 2$.

3) Démontrons que A *est diagonalisable.*

On a : Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, par conséquent, l'espace $\mathbb{R}^3$ *admet une base de vecteurs propres et la matrice* A *est diagonalisable.*

Notons par P *la matrice suivante :*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

et, par D *la matrice diagonale suivante :*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a la relation : $A = PDP^{-1}$, *où*

4) On calcule A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

On a : $A = PDP^{-1}$ *donc,* $A^n = PD^nP^{-1}$

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

et on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad d'où \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2\left(4^n - 2^n\right) & 2 \times 4^n & 2\left(4^n - 2^n\right) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercise 5.19 *Soit* A *la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres de A.

2) Montrer que A *est diagonalisable.*

3) Déterminer une base de vecteurs propres et P *la matrice de passage.*

4) Calculer A^n, *pour* $n \in \mathbb{N}$.

5) Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_2(t) - 2x_3(t), \\[2ex] \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t), \\[2ex] \dfrac{dx_3(t)}{dt} = -x_1(t) + x_3(t), \end{cases} \tag{5.6}$$

où x_1, x_2 et x_3 sont trois fonctions réelles.

Solution.

1) Déterminons les valeurs propres de A.

On détermine et on factorise $P_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A. On a :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -2 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= (-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2-\lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= (-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) - 3(2(1-\lambda)+2) - 2(-2-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+4).$$

Donc, $P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+4)$.

On a : $P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$, $\lambda = 2$ et $\lambda = -4$. Alors les valeurs propres de A sont $\{-4, 1, 2\}$.

2) Montrons que A est diagonalisable.

On a : La matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$, admet trois valeurs propres réelles distinctes, donc la matrice A est diagonalisable.

3) Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

***Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à** $\lambda = -4$.*

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

$$(AX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = -4x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4x_2 \\ -x_1 + x_3 = -4x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 + 4x_1 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_3, \\ x_2 = -6x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$E_{\lambda=2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 5x_3 & -6x_3 & x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x_3) \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alors $E_{\lambda=-4}(A)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda=-4}(A) = 1$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = 1$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

$$(AX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = x_2 \\ -x_1 + x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 - x_1 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$E_{\lambda=1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3}x_3 & x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{3}x_3\right) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alors $E_{\lambda=1}(A)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda=1}(A) = 1$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda = 2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$(AX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 2x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2x_2 \\ -x_1 + x_3 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 - 2x_1 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_{\lambda=2}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle . \end{aligned}$$

Alors $E_{\lambda=2}(A)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda=2}(A) = 1$.

Les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *forment une base de* $\mathbb{R}^3$ *composée de vecteurs propres, la matrice de passage* P

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$P^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \\ -20 & -15 & 10 \end{pmatrix}$$

4) Calculons A^n*, pour* $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \\ -20 & -15 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 20 \times 2^n + 10(-4)^n & 15 \times 2^n - 15(-4)^n & -10 \times 2^n + 10(-4)^n \\ -12(-4)^n + 12 & 18(-4)^n + 12 & -12(-4)^n + 12 \\ -20 \times 2^n + 2(-4)^n + 18 & -15 \times 2^n - 3(-4)^n + 18 & 10 \times 2^n + 2(-4)^n + 18 \end{pmatrix}.$$

5) Résoudre le système différentiel (5.6) suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_2(t) - 2x_3(t), \\ \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t), \\ \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = -x_1(t) + x_3(t), \end{cases}$$

où x_1, x_2 et x_3 sont trois fonctions réelles. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système $\dfrac{dY(t)}{dt} = D.Y(t)$ *avec* $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, *s'écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = -4u(t), \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = v(t), \\ \\ \dfrac{dw(t)}{dt} = 2w(t), \end{cases}$$

Ces deux équations ont pour solution : $u(t) = \beta_1 e^{-4t}$, $v(t) = \beta_2 e^{t}$ et $w(t) = \beta_3 e^{2t}$, où β_1, β_2 et β_3 sont deux constantes réelles. On en déduit que la solution de système (5.6) est : $X(t) = PY(t)$ donc :

$$(X(t) = PY(t)) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 e^{-4t} \\ \beta_2 e^{t} \\ \beta_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 5\beta_1 e^{-4t} - \beta_3 e^{2t}, \\ x_2(t) = -6\beta_1 e^{-4t} + 2\beta_2 e^{t}, \\ x_3(t) = \beta_1 e^{-4t} + 3\beta_2 e^{t} + \beta_3 e^{2t}, \end{cases}$$

est la solution de système (5.6).

Exercise 5.20 *Soit A la matrice suivante :*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.

2) Déterminer le sous-espace vectoriel propre associé à chaque valeur propre.

3) La matrice A est-elle diagonalisable, triangularisable ?

4) Effectuer explicitement la réduction.

Solution.

1) On détermine et on factorise $P_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A.

$$\text{On a : } P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Alors, $P_A(\lambda)=(3-\lambda)(\lambda+1)^2$. Les valeurs propres sont $\lambda_1=3$, racine simple et $\lambda_2=-1$, racine double.

2) Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à chaque valeur propre.

***Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à** $\lambda_1=3$.*

Soit $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$.

$$(AX=\lambda X)\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} -2x_1-3x_2+4x_3=0 \\ 4x_1-10x_2+8x_3=0 \\ 6x_1-7x_2+4x_3=0 \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_2=2x_1, \\ x_3=2x_1, \\ x_1\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1=3}(A) &= \left\{\begin{pmatrix} x_1 & 2x_1 & 2x_1 \end{pmatrix}, x_1\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x_1\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, x_1\in\mathbb{R}\right\}. \\ &= \left\langle\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right\rangle. \end{aligned}$$

Alors $E_{\lambda_1=3}(A)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda_1=3}(A) = 1$.

Déterminons le sous-espace vectoriel propre associé à $\lambda_2 = -1$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$(AX = \lambda X) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -x_1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -x_2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 2x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_{\lambda=2}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 & 2x_3 & x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Alors $E_{\lambda=-1}(A)$ *est s.e.v engendré par* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et comme ce vecteur n'est pas nul, d'où* $\dim E_{\lambda=-1}(A) = 1$.

3) La matrice A ***est-elle diagonalisable, triangularisable ?***

A *est-elle diagonalisable ?*

A *est diagonalisable ssi* $\dim \ker (A + I_3) = 2$ *où* $rg\,(A + I_3) = 2$.

On a : L'espace propre associé à $\lambda_1 = -1$ *est de dimension* 1 *et engendré par le vecteur* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *L'espace propre associé à la valeur double* $\lambda_2 = 3$ *est de dimension* 1 *et engendré par le vecteur* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Comme,* $\dim \ker (A + I_3) = 1$. *Donc,* A *n'est pas diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.

La matrice A ***est-elle triangularisable ?***

On a : $P_A(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda + 1)^2$ *est scindé sur* $\mathbb{R}$ *donc,* A *est triangularisable sur* $\mathbb{R}$.

4) Effectuons explicitement la réduction.

On sait que $\ker\left((A + I_3)^2\right)$ *est de dimension* 2, *et que :*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker (A + I_3) \subset \ker \left((A + I_3)^2\right).$$

On cherche donc un deuxième vecteur dans $\ker\left((A+I_3)^2\right)$*, linéairement indépendant de* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$(A+I_3)^2 = (A+I_3)\,.\,(A+I_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 16 \\ 32 & -32 & 32 \\ 32 & -32 & 32 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\left((A+I_3)^2 X = 0\right) \Rightarrow 16 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + x_3, \\ x_1 \in \mathbb{R}. \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On prend le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De plus,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad d'où \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

[1] J. Rivaud, Algèbre : Classes préparatoires et Université Tome 1, Exercices avec solutions, Vuibert.

[2] N. Faddeev, I. Sominski, Recueil d'exercices d'algèbre supérieure, Edition de Moscou

[3] M. Balabne, M. Duflo, M. Frish, D. Guegan, Géométrie – 2e année du 1er cycle classes préparatoires, Vuibert Université.

[4] K. Allab, *Eléments d'analyse : Fonction d'une variable réelle.* Office des publications universitaires, (1986).

[5] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, *Exercices d'analyse 1er Cycle, 1er Année de Mathématiques Supérieurs*, Librairie Armand Colin (1977).

[6] D. Degrave, C. Degrave, H. Muller, *Précis de mathématiques, Analyse- première année*, Bréal, Rosny 2003.

[7] J. P. Escofier, *Toute l'analyse de la Licence : Cours et exercices corrigés*, Dunod 2014.

[8] M. Mehbali, *Mathématiques : (Fonction d'une variable réelle)*, Office des publications universitaires, 1 Place centrale de Ben-Aknoun (Alger).

[9] J. M. Monier, *ANALYSE MPSI / Cours, méthodes et exercices corrigés*, 5^e édition. Dunod, Paris, 2006.