Université A/MIRA de Béjaia
Faculté : ST
Département :ST2

Année universitaire 2014-2015

Cours de Maths 5

1 Quelques rappels sur les nombres complexes :

1.1 Définition :

On appelle nombre complexe z toute expression de la forme

$$z = a + ib,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

On note ainsi

$$a = \mathrm{R}_e(z) \text{ (partie réelle de } z), \quad b = \mathrm{I}_m(z) \text{ (partie imaginaire de } z).$$

1.2 Remarque :

On adopte les deux règles suivantes :

$$(a + ib = a' + ib') \Leftrightarrow (a = a' \quad \text{et} \quad b = b')$$

$$(a + ib = 0 = 0 + i0) \Leftrightarrow (a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0)$$

1.3 Représentation géométrique des nombres complexes

Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut être représenté sur le plan (Oxy) par un point $M(a, b)$, et réciproquement, tout point $M(a, b)$ peut être considéré comme l'image géométrique du nombre complexe $z = a + ib$.

Au sens géométrique,

$$\underbrace{|z|}_{\text{Module de } z} = \underbrace{OM}_{\text{distance entre O et M}}$$

$$\underbrace{Arg(z)}_{\text{Argument de } z} = \underbrace{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})}_{\text{l'ongle entre le vecteur } \overrightarrow{i} \text{ et le vecteur } \overrightarrow{OM}}$$

Remarque :

Pour des raisons de convenance, on assimile le nombre complexe $z = a + ib$ au vecteur $\overrightarrow{OM}$ correspondant.

Exemple 1 :

Calculer $|z|$ et $Arg(z)$ pour $z = -i + 1$, $z = -3i$, $z = 2i$.

Exemple 2 :

1) Écrire les expressions suivantes au sens géométrique.

$z = 2 + i$, $|z| \leq 3$, $|z - i| \leq 6$, $|z + i - 1| = |z - i + 2|$

2)Écrire les expressions suivantes au sens complexe.

$2\overrightarrow{OM}+3\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{0}$, $|OM|\overrightarrow{OM}=-2\overrightarrow{OM'}$.

3) transformer les ensembles suivants au sens complexe :

$\{M(x,y)\in(Oxy)$ tel que $OM\leq 1\}$, $\{M(x,y)\in(Oxy)$ tel que $OM<1\}$, $\{M(x,y)\in(Oxy)$ tel que $1\leq OM\leq 2\}$

2 Disques ouverts-Disques fermés :

Soit (Oxy) un plan.

On appelle disque ouvert de centre A et de rayon R, noté $D(A,R)$, l'ensemble :

$$\{M(x,y)\in(Oxy) \text{ tel que } AM<R\}.$$

On appelle disque fermé de centre A et de rayon R, noté $\overline{D(A,R)}$, l'ensemble :

$$\{M(x,y)\in(Oxy) \text{ tel que } AM\leq R\}.$$

Exercice :

Transformer les ensembles $\overline{D(A,R)}$ et $D(A,R)$ au sens complexe.

3 Ensemble ouvert :

Soit E un ensemble de points dans le plan.

Au sens géométrique :

$$E \text{ est un ouvert } \Leftrightarrow \forall M\in E, \exists R>0 \text{ vérifiant } D(M,R)\subset E.$$

Intuitivement, un ensemble ouvert contient tous les points de son intérieur mais ne contient pas les points de sa frontière (ou de ses frontières).

Au sens complexe :

$$E \text{ est un ouvert } \Leftrightarrow \forall z\in\mathbb{C}, \exists R>0 \text{ vérifiant } D(z,R)\subset E.$$

remarque :

Un ensemble fermé contient tous les points de son intérieur et de sa frontière.

4 Objet : connexe-simplement connexe :

Un objet est dit connexe s'il est fait d'un seul ≪ morceau ≫

Un objet est dit simplement connexe s'il est connexe et "s'il n' a pas de trou"

5 Forme algébrique d'une Fonction à variable complexe :

Exemple :

Soit f la fonction à variable complexe z définie par $f(z) = z^2 - 2i\overline{z} + i$.

Ecrire $f(z)$ sous la forme algébrique.

On $z = x+iy$ donc $z^2 = x^2-y^2+i2xy$, par conséquent $f(z) = \underbrace{(x^2 - y^2 + 2y)}_{\text{partie réelle de } f(z)} + i \underbrace{(2xy - 2x + 1)}_{\text{partie imaginaire de } f(z)}$

on pose :

$p(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$ et $q(x, y) = 2xy - 2x + 1$, l'expression $p(x, y) + iq(x, y)$ est appelée forme algébrique de la fonction $f(z)$.

6 Fonctions holomorphes :

$\boxed{\text{Holomorphe signifie dérivable au sens complexe.}}$

Soit f une fonction complexe à variable complexe et $z_0 \in \mathbb{C}$.

6.1 Définition :

$$f \text{ holomorphe en } z_0 \Leftrightarrow \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = l \in \mathbb{C}, \quad (h \in \mathbb{C}).$$

6.2 Remarque :

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$.

$$f \quad \text{holomorphe sur } D \Leftrightarrow \quad \text{holomorphe en tout point de} \quad D$$

6.3 Exemple :

Dans chaque cas, étudier l'holomorphie de f en $z_0 = 0$.

1) $f(z) = z$, 2) $f(z) = \overline{z}$.

1)

$\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{z + h - z}{h} = 1$, la fonction $z \longmapsto f(z) = z$ est holomorphe en 0.

2)

$\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{\overline{h}}{h}$.

Cette limite n'existe pas, par conséquent la fonction $z \longmapsto f(z) = \overline{z}$ n'est pas holomorphe en 0.

6.4 Proposition :

soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ un élément de U et $f = p + iq$ une fonction complexe définie sur U.

$$f \text{ holomorphe sur } U \Leftrightarrow \forall (x,y) \text{ vérifiant } x+iy \in U : \begin{cases} (a) : \text{les dérivées partielles de } p \text{ et } q \text{ existent et continues sur } U \\ \text{et} \\ (b) : \dfrac{\partial p}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial q}{\partial y}(x,y) \\ \text{et} \\ (c) : \dfrac{\partial p}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial q}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Remarque :

Les deux égalités (b) et (c) sont appelées conditions de Cauchy.

7 Représentation paramétrique de quelques courbes :

7.1 Équation paramétrique d'un cercle :

Soit $C(M_0, R)$ le cercle de centre $M_0(x_0,\ y_0)$ et de rayon R. $C(M_0, R)$ est caractérisé comme suit :

$$C(M_0, R) = \left\{ M(x,\ y) \in (P) \text{ vérifiant } ||\overrightarrow{M_0M}|| = R \right\}$$

Au sens complexe, on écrit :

$$C(z_0, R) = \{ z = (x+iy) \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } |z - z_0| = R \},$$

$z_0 = x_0 + iy_0$ (l'affixe de M_0), $z = x + iy$ (l'affixe de M).

D'autre part, un nombre complexe $z - z_0$ s'écrit sous la forme complexe comme suit :

$$z - z_0 = |z - z_0| e^{i\theta},$$

Où $\theta = \mathbf{Arg}(z - z_0)$. Mais dans notre cas $z \in C(z_0, R)$, donc :

$$|z - z_0| = R \text{ et } \theta \in [0,\ 2\pi].$$

En plus, on a :

$$z - z_0 = |z - z_0| e^{i\theta} \Leftrightarrow z = z_0 + Re^{i\theta}$$

.

En fin :

$$C(z_0, R) = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } z = z_0 + Re^{i\theta},\ \theta \in [0,\ 2\pi] \right\}$$

.

L'équation $\boxed{z = z_0 + Re^{i\theta},\ \ \theta \in [0,\ 2\pi]}$ est appelée l'équation paramétrique (ou la représentation paramétrique) du cercle $C(M_0, R)$.

7.2 Équation paramétrique d'un segment de droite :

Considérons les deux ponts $A(x_0, y_0)$ et $A(x_1, y_1)$, le segment de droite $[AB]$ est caractérisé comme suit :

$$[AB] = \left\{ M(x,y) \in (P) \text{ vérifiant } \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \text{ et } M \text{ entre } A \text{ et } B. \right\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$[AB] = \left\{ M(x,y) \in (P) \text{ vérifiant } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \text{ et } t \text{ entre } 0 \text{ et } 1. \right\}$$

Au sens complexe

$$[AB] = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \ \text{ vérifiant } \ z - z_0 = t(z - z_1) \ \text{ et } t \text{ entre } 0 \text{ et } 1.\},$$

$z_0 = x_0 + iy_0$ et $z_1 = x_1 + iy_1$.

L'expression $\boxed{z = z_0 + t(z_1 - z_0), \ t \in [0, 1]}$ est appelée la représentation paramétrique de $[AB]$ au sens complexe.

8 Intégrales curvilignes :

8.1 Intégrales curvilignes des fonctions à deux variables réelles :

Définition :

Soient $p(x, y)$, $q(x, y)$ deux fonctions et (C) une courbe plane (veut dire cette courbe se trouve dans le plan).

L'expression

$$\int_{(C)} p(x, y)dx + q(x, y)dy \qquad (1)$$

est appelée intégrale curviligne de $p(x, y)$ et $q(x, y)$ le long de la courbe (C) orientée dans le sens positif.

En physique, l'expression (1) signifie le travail accompli par la force $\vec{F}$ de composantes p, q le long de la courbe (C).

Exemple :

Calculer le travail $W_{[OA]}$ accompli par la force $\overrightarrow{F}\left(x^2, \ xy\right)$ le long de la droite $[OA]$ orientée de A vers B, $O(0, 0)$ et $A(1, 1)$.

Solution :

$$W_{[OA]} = \int_{[OA]} x^2dx + xydy.$$

L'équation de la droite $[OA]$ est donnée par :

$$y = x$$

Cela veut dire

$$M(x, y) \in [OA] \Leftrightarrow y = x.$$

Par conséquent

$$dy = dx$$

.

Dans l'expression de l'intégrale ci-dessus nous allons mettre x au lieu de y, dx au lieu de dy.

$$W_{[OA]} = \int_{[OA]} x^2dx + xydy = \int_0^1 x^2dx + x^2dx = \frac{1}{3}$$

(Selon le sens indiqué x varie de 0 à 1.)

Remarque :

Si on vous demande de calculer la même intégrale dans le sens contraire (de A à O), alors x varie de 1 à 0.

$$W_{[AO]} = \int_{[AO]} x^2dx + xydy = \int_1^0 x^2dx + x^2dx = -\frac{1}{3}.$$

8.2 Intégrales curvilignes des fonctions à variable complexe :

Soient f une fonction de variable complexe et (C) un chemin simple dans le plan. L'expression

$$\int_{(C)} f(z)dz$$

est appelée intégrale curviligne au sens complexe.

(il suffit de poser $f = p + iq$ et de remplacer dz par $dx + dy$, vous allez retrouver la formule d'intégrale curviligne donnée dans (8.1).)

Propriétés des intégrales curvilignes :

La notation (C) signifie le chemin orienté dans le sens positif, $-(C)$ signifie le chemin orienté dans le sens négatif.

Voici les propriétés suivantes :

$$(1) \qquad \int_{(C)} f(z)dz = -\int_{-(C)} f(z)dz$$

.

On coupe le chemin (C) en deux chemins (C_1) et (C_2), dans le même sens on a :

$$(2) \quad \int_{(C)} f(z)dz = \int_{(C_1)} f(z)dz + \int_{(C_2)} f(z)dz$$

Exemple :

Calculer (en utilisant une paramétrisation adéquate) $\displaystyle\int_{(C)} \frac{1}{z-1}dz$, (C) le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 4.

Solution :

$$z \in (C) \Leftrightarrow z = 1 + e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Par conséquent $dz = \dfrac{\partial z}{\partial \theta}d\theta = ie^{i\theta}d\theta$, l'intégrale en question devient :

$$\int_{(C)} \frac{1}{z-1}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta$$

En fin

$$\int_{(C)} \frac{1}{z-1}dz = 2\pi i.$$

Proposition :

Soit (C) un chemin fermé simple, f une fonction holomorphe sur (C) et à l'intérieur de (C). On a :

$$\int_{(C)} f(z)dz = 0$$

FIGURE 1 – image

Conséquence 1 :

Si f est holomorphe dans un ouvert simplement connexe U, alors l'intégrale $\int f(z)dz$ ne dépend pas du chemin suivi.

c'est à dire :

Si $z_0 = x_0 + iy_0$ et $z_1 = x_1 + iy_1$ deux point fixés dans le plan complexe, alors pour tout chemin (G)(tracé à l'intérieur de U) joignant z_0 à z_1 on a :

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \int_{(G)} f(z)dz$$

8.3 Formules intégrales de Cauchy :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe U, (C) un chemin fermé tracé à l'intérieur de U, z_0 fixé dans (U). On a les deux formules suivantes :

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) \text{ si } z_0 \text{ se trouve à l'interieur de } (C). \\ \\ 0 \text{ si } z_0 \text{ se trouve à l'exterieur de } (C). \end{cases}$$

D'une manière générale, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \text{ si } z_0 \text{ se trouve à l'interieur de } (C). \\ \\ 0 \text{ si } z_0 \text{ se trouve à l'exterieur de } (C). \end{cases}$$

Exemple :
Calculer $\int_{(C)} \frac{\sin z}{z - i} dz$ dans les cas suivants :

1)(g) : le cercle de centre $(2, 0)$ et de rayon 0.5.

2)(g) : le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2.

Solution :

L'intégrale $\int_{(C)} \frac{\sin z}{z - i} dz$ possède la forme $\int_{(C)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$, $z_0 = i$.

Dans le cas (1), $z_0 = i = 0 + 1i$ se trouve à l'extérieur de (C) et la fonction $z \longmapsto \sin z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$(ici U=$\mathbb{C}$ est un ouvert simplement connexe et (g) tracé à l'intérieur de $\mathbb{C}$) la formule de Cauchy donne :

$$\int_{(g)} \frac{\sin z}{z - i} dz = 0$$

Dans le cas (2), $z_0 = i = 0 + 1i$ se trouve à l'intérieur de (g) et la fonction $z \longmapsto \sin z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$(ici U=$\mathbb{C}$ est un ouvert simplement connexe et (g) tracé à l'intérieur de $\mathbb{C}$) la formule de Cauchy donne :

$$\int_{(g)} \frac{\sin z}{z - i} dz = 2\pi i \sin i$$