



Université A/MIRA de Béjaia
Faculté : ST
Département :ST2

Année universitaire 2014-2015

Cours de Maths 5

Chapitre 1

rappels sur les nombres complexes :

1.1 Définition :

On appelle nombre complexe z toute expression de la forme

$$z = a + ib,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

On note ainsi

$$a = \operatorname{Re}(z) \text{ (partie réelle de } z), \quad b = \operatorname{Im}(z) \text{ (partie imaginaire de } z).$$

1.2 Remarque :

On adopte les deux règles suivantes :

$$(a + ib = a' + ib') \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$$

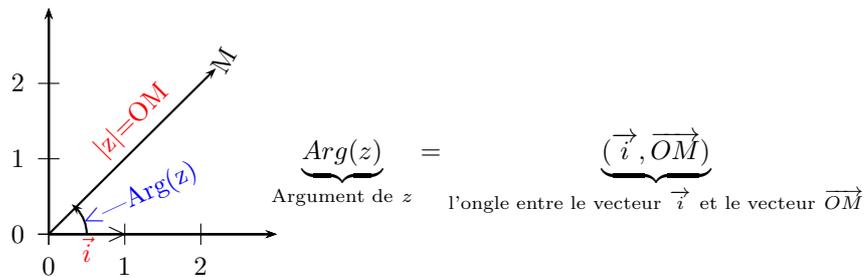
$$(a + ib = 0 = 0 + i0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$$

1.3 Représentation géométrique des nombres complexes

Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut être représenté sur le plan (Oxy) par un point $M(a, b)$, et réciproquement, tout point $M(a, b)$ peut être considéré comme l'image géométrique du nombre complexe $z = a + ib$.

Au sens géométrique,

$$\underbrace{|z|}_{\text{Module de } z} = \underbrace{OM}_{\text{distance entre O et M}}$$



Remarque :

Pour des raisons de convenance, on assimile le nombre complexe $z = a + ib$ au vecteur \vec{OM} correspondant.

Exemple 1 :

Calculer $|z|$ et $Arg(z)$ pour $z = -i + 1$, $z = -3i$, $z = 2i$.

Exemple 2 :

1) Écrire les expressions suivantes au sens géométrique.

$$z = 2 + i, |z| \leq 3, |z - i| \leq 6, |z + i - 1| = |z - i + 2|$$

2) Écrire les expressions suivantes au sens complexe.

$$2\vec{OM} + 3\vec{OM}^t = \vec{0}, |OM|\vec{OM}^t = -2\vec{OM}^t.$$

3) transformer les ensembles suivants au sens complexe :

$$\{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } OM \leq 1\}, \{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } OM < 1\}, \{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } 1 \leq OM \leq 2\}$$

Chapitre 2

Fonctions holomorphes-Intégrales curvilignes

2.1 Caractérisation des ensembles dans le plan-Appellations

2.1.1 Disques ouverts-Disques fermés :

Soit (Oxy) un plan.

On appelle disque ouvert de centre A et de rayon R , noté $D(A, R)$, l'ensemble :

$$\{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } AM < R\}.$$

On appelle disque fermé de centre A et de rayon R , noté $\overline{D(A, R)}$, l'ensemble :

$$\{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } AM \leq R\}.$$

Exercice :

Transformer les ensembles $\overline{D(A, R)}$ et $D(A, R)$ au sens complexe.

2.1.2 Ensemble ouvert :

Soit E un ensemble de points dans le plan.

Au sens géométrique :

$$E \text{ est un ouvert} \Leftrightarrow \forall M \in E, \exists R > 0 \text{ vérifiant } D(M, R) \subset E.$$

Intuitivement, un ensemble ouvert contient tous les points de son intérieur mais ne contient pas les points de sa frontière (ou de ses frontières).

Au sens complexe :

$$E \text{ est un ouvert} \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}, \exists R > 0 \text{ vérifiant } D(z, R) \subset E.$$

Remarque :

Un ensemble fermé contient tous les points de son intérieur et de sa frontière.

2.1.3 Surfaces : connexes-simplement connexes :

Une surface plane est dite connexe si elle est faite d'un seul « morceau »

Une surface plane est dite simplement connexe si elle est connexe et "si elle n' a pas de trou"

2.2 Forme algébrique d'une Fonction à variable complexe :

2.2.1 Exemple :

Soit f la fonction à variable complexe z définie par $f(z) = z^2 - 2i\bar{z} + i$.

Ecrire $f(z)$ sous la forme algébrique.

On a $z = x+iy$ donc $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, par conséquent $f(z) = \underbrace{(x^2 - y^2 + 2y)}_{\text{partie réelle de } f(z)} + i \underbrace{(2xy - 2x + 1)}_{\text{partie imaginaire de } f(z)}$

on pose :

$p(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$ et $q(x, y) = 2xy - 2x + 1$, l'expression $p(x, y) + iq(x, y)$ est appelée forme algébrique de la fonction $f(z)$.

2.3 Fonctions holomorphes :

Holomorphe signifie dérivable au sens complexe.

Soit f une fonction complexe à variable complexe et $z_0 \in \mathbb{C}$.

2.3.1 Définition :

f holomorphe en $z_0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = l \in \mathbb{C}, (h \in \mathbb{C})$.

2.3.2 Remarque :

Soit D un ouvert de \mathbb{C} .

f holomorphe sur $D \Leftrightarrow$ holomorphe en tout point de D

2.3.3 Exemple :

Dans chaque cas, étudier l'holomorphicité de f en $z_0 = 0$.

1) $f(z) = z$, 2) $f(z) = \bar{z}$.

1)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z+h-z}{h} = 1, \text{ la fonction } z \mapsto f(z) = z \text{ est holomorphe en } 0.$$

2)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}.$$

Cette limite n'existe pas, par conséquent la fonction $z \mapsto f(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe en 0.

2.3.4 Proposition :

soient U un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 = x_0 + iy_0$ un élément de U et $f = p + iq$ une fonction complexe définie sur U .

$$f \text{ holomorphe sur } U \Leftrightarrow \forall (x, y), x+iy \in U : \begin{cases} (a) : \text{les dérivées partielles de } p \text{ et } q \text{ existent et continues sur } U \\ \text{et} \\ (b) : \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \\ \text{et} \\ (c) : \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial q}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

Remarque :

Les deux égalités (b) et (c) sont appelées conditions de Cauchy.

2.4 Représentation paramétrique de quelques courbes :

2.4.1 Équation paramétrique d'un cercle :

Soit $C(M_0, R)$ le cercle de centre $M_0(x_0, y_0)$ et de rayon R . $C(M_0, R)$ est caractérisé comme suit :

$$C(M_0, R) = \left\{ M(x, y) \in (P) \text{ vérifiant } \|\overrightarrow{M_0M}\| = R \right\}$$

Au sens complexe, on écrit :

$$C(z_0, R) = \{z = (x + iy) \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } |z - z_0| = R\},$$

$z_0 = x_0 + iy_0$ (l'affixe de M_0), $z = x + iy$ (l'affixe de M).

D'autre part, un nombre complexe $z - z_0$ s'écrit sous la forme complexe comme suit :

$$z - z_0 = |z - z_0|e^{i\theta},$$

Où $\theta = \mathbf{Arg}(z - z_0)$. Mais dans notre cas $z \in C(z_0, R)$, donc :

$$|z - z_0| = R \text{ et } \theta \in [0, 2\pi].$$

En plus, on a :

$$z - z_0 = |z - z_0|e^{i\theta} \Leftrightarrow z = z_0 + Re^{i\theta}$$

En fin :

$$C(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } z = z_0 + Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

L'équation $z = z_0 + Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ est appelée l'équation paramétrique (ou la représentation paramétrique) du cercle $C(M_0, R)$.

2.4.2 Équation paramétrique d'un segment de droite :

Considérons les deux points $A(x_0, y_0)$ et $A(x_1, y_1)$, le segment de droite $[AB]$ est caractérisé comme suit :

$$[AB] = \left\{ M(x, y) \in (P) \text{ vérifiant } \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \text{ et } M \text{ entre } A \text{ et } B. \right\}$$

\Leftrightarrow

$$[AB] = \left\{ M(x, y) \in (P) \text{ vérifiant } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \text{ et } t \text{ entre } 0 \text{ et } 1. \right\}$$

Au sens complexe

$$[AB] = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } z - z_0 = t(z - z_1) \text{ et } t \text{ entre } 0 \text{ et } 1.\},$$

$z_0 = x_0 + iy_0$ et $z_1 = x_1 + iy_1$.

L'expression $z = z_0 + t(z_1 - z_0), t \in [0, 1]$ est appelée la représentation paramétrique de $[AB]$ au sens complexe.

2.5 Intégrales curvilignes :

2.5.1 Intégrales curvilignes des fonctions à deux variables réelles :

Définition :

Soient $p(x, y)$, $q(x, y)$ deux fonctions et (C) une courbe plane (veut dire cette courbe se trouve dans le plan).

L'expression

$$\int_{(C)} p(x, y)dx + q(x, y)dy \quad (1)$$

est appelée intégrale curviligne de $p(x, y)$ et $q(x, y)$ le long de la courbe (C) orientée dans le sens positif.

En physique, l'expression (1) signifie le travail accompli par la force \vec{F} de composantes p , q le long de la courbe (C) .

Exemple :

Calculer le travail $W_{[OA]}$ accompli par la force $\vec{F}(x^2, xy)$ le long de la droite $[OA]$ orientée de $O(0, 0)$ vers $A(1, 1)$.

Solution :

$$W_{[OA]} = \int_{[OA]} x^2 dx + xy dy.$$

L'équation de la droite $[OA]$ est donnée par :

$$y = x$$

Cela veut dire

$$M(x, y) \in [OA] \Leftrightarrow y = x.$$

Par conséquent

$$dy = dx$$

Dans l'expression de l'intégrale ci-dessus nous allons mettre x au lieu de y , dx au lieu de dy .

$$W_{[OA]} = \int_{[OA]} x^2 dx + xy dy = \int_0^1 x^2 dx + x^2 dx = \frac{1}{3}$$

(Selon le sens indiqué x varie de 0 à 1).

Remarque :

Si on vous demande de calculer la même intégrale dans le sens contraire (de A à O), alors x varie de 1 à 0.

$$W_{[AO]} = \int_{[AO]} x^2 dx + xy dy = \int_1^0 x^2 dx + x^2 dx = -\frac{1}{3}.$$

2.5.2 Intégrales curvilignes des fonctions à variable complexe :

Soient f une fonction de variable complexe et (C) un chemin simple dans le plan. Au sens complexe l'expression

$$\int_{(C)} f(z) dz$$

est appelée intégrale curviligne de $f(z)$ le long du chemin (C) orienté dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre) .

Remarque :

généralement, lorsque le chemin (C) est fermé et orienté dans le sens positif, on note l'intégrale curviligne de $f(z)$ le long du chemin (C) par :

$$\oint_{(C)} f(z) dz$$

D'où vient l'appellation "intégrale curviligne" au sens complexe ?

(poser $f = p + iq$ puis remplacer dz par $dx + dyi$, vous allez retrouver la formule d'intégrale curviligne donnée dans (8.1).)

Propriétés des intégrales curvilignes :

La notation (C) signifie le chemin orienté dans le sens positif, $(-C)$ signifie le chemin orienté dans le sens négatif.

Voici les propriétés suivantes :

Propriété 1 :

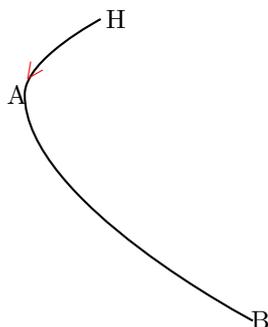
$$\int_{(C)} f(z) dz = - \int_{-(C)} f(z) dz$$

Propriété 2 :

On coupe le chemin (C) en deux chemins (C_1) et (C_2) , dans le même sens on a :

$$(2) \int_{(C)=(HB)} f(z) dz = \int_{(C_1)=(HA)} f(z) dz + \int_{(C_2)=(AB)} f(z) dz$$

Voir la figure 1.



Propriété 3 :

Soient U un ouvert non troué dans le plan complexe \mathbb{C} et z_0, z_1 deux points de U . Soit f une fonction holomorphe dans U sauf peut être aux points z_0 et z_1 . (C) un chemin simple, fermé tracé dans U . z_0 et z_1 se trouvent à l'intérieur de (C) . on a :

$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(C_0)} f(z)dz + \int_{(C_1)} f(z)dz,$$

Où $(C_0), (C_1)$ deux cercles de centres z_0, z_1 et de rayons quelconques vérifiant : $(C_0) \cap (C_1) = \emptyset$ et $(C_0), (C_1)$ se trouvent à l'intérieur de (C) (voir figure 2).

Une idée globale pour démontrer cette dernière propriété , en effet considérons le chemin (γ) orienté (voir la figure 2) défini comme suit :

$$(\gamma) = [AB] \cup (BE) \cup [EF] \cup (C_1) \cup [ST] \cup (TM) \cup [MN] \cup (MA).$$

Par conséquent,

$$\int_{(\gamma)} f dz = \int_{[AB]} f dz + \int_{(BE)} f dz + \int_{[EF]} f dz + \int_{(C_1)} f dz + \int_{(TM)} f dz + \int_{[ST]} f dz + \int_{[MN]} f dz + \int_{(MA)} f dz + \int_{(-C)} f dz \quad (*)$$

La fonction f est holomorphe sur (γ) et dans son intérieur, par conséquent $\int_{(\gamma)} f dz = 0$. la formule (*) devient :

$$\int_{[AB]} + \int_{(BE)} + \int_{[EF]} + \int_{(C_1)} + \int_{(TM)} + \int_{[ST]} + \int_{[MN]} + \int_{(MA)} = 0 \quad (**)$$

comme $\int_{[AB]} + \int_{[MN]} = 0$, $\int_{[EF]} + \int_{[ST]} = 0$ et $\int_{(BE)} + \int_{(TM)} = \int_{(C_0)}$, la formule (**) revient sous cette forme :

$$\int_{(C_0)} f dz + \int_{(C_1)} f dz + \int_{(-C)} f dz = 0 \Leftrightarrow \int_{(C_0)} f dz + \int_{(C_1)} f dz = - \int_{(-C)} f dz$$

Comme $\int_{(C)} f dz = - \int_{(-C)} f dz$, on tire la propriété suivante :

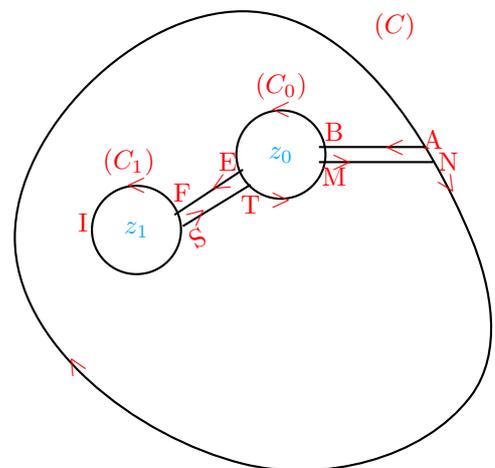
$$\int_{(C)} f dz = \int_{(C_0)} f dz + \int_{(C_1)} f dz$$

Remarque :

On peut généraliser cette propriété sur un nombre de points z_0, z_1, \dots, z_n , on a :

$$\int_{(C)} f dz = \sum_{i=0}^{i=n} \int_{(C_i)} f dz.$$

sans oublier que les cercles (C_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) de centres z_0, z_1, \dots, z_n sont deux à deux disjoints et tous se trouvent à l'intérieur de (C)



Exemple :

Calculer $\int_{(C)} \frac{1}{z-1} dz$, (C) le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 4.

Solution :

$$z \in (C) \Leftrightarrow z = 1 + e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Par conséquent $dz = \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta = ie^{i\theta} d\theta$, l'intégrale en question devient :

$$\int_{(C)} \frac{1}{z-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta$$

En fin

$$\int_{(C)} \frac{1}{z-1} dz = 2\pi i.$$

Proposition :

Soit (C) un chemin fermé simple, f une fonction holomorphe sur (C) et à l'intérieur de (C) . On a :

$$\int_{(C)} f(z) dz = 0$$

Conséquence 1 :

Si f est holomorphe dans un ouvert simplement connexe U , alors l'intégrale $\int f(z)dz$ ne dépend pas du chemin suivi.

c'est à dire :

Si $z_0 = x_0 + iy_0$ et $z_1 = x_1 + iy_1$ deux point fixés dans le plan complexe, alors pour tout chemin (G) (tracé à l'intérieur de U) joignant z_0 à z_1 on a :

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \int_{(G)} f(z)dz$$

2.5.3 Formules intégrales de Cauchy :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe U , (C) un chemin fermé tracé à l'intérieur de U , z_0 fixé dans (U) . On a les deux formules suivantes :

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & \text{si } z_0 \text{ se trouve à l'intérieur de } (C). \\ 0 & \text{si } z_0 \text{ se trouve à l'extérieur de } (C). \end{cases}$$

D'une manière générale, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) & \text{si } z_0 \text{ se trouve à l'intérieur de } (C). \\ 0 & \text{si } z_0 \text{ se trouve à l'extérieur de } (C). \end{cases}$$

Exemple :

Calculer $\int_{(C)} \frac{\sin z}{z - i} dz$ dans les cas suivants :

1) (C) : le cercle de centre $(2, 0)$ et de rayon 0.5.

2) (C) : le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2.

Solution :

L'intégrale $\int_{(C)} \frac{\sin z}{z - i} dz$ possède la forme $\int_{(C)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$, $z_0 = i$.

Dans le cas (1), $z_0 = i = 0 + 1i$ se trouve à l'extérieur de (C) et la fonction $z \mapsto \sin z$ est holomorphe dans \mathbb{C} la formule de Cauchy donne :

$$\int_{(C)} \frac{\sin z}{z - i} dz = 0$$

Dans le cas (2), $z_0 = i = 0 + 1i$ se trouve à l'intérieur de (C) et la fonction $z \mapsto \sin z$ est holomorphe dans \mathbb{C} la formule de Cauchy donne :

$$\int_{(g)} \frac{\sin z}{z - i} dz = 2\pi i \sin i$$

Chapitre 3

Séries de Laurent-Théorème des résidus

3.1 Séries de Laurent

3.1.1 Définition

Soit z_0 fixé dans \mathbb{C} , z une variable complexe.

On appelle série de Laurent autour de z_0 (ou suivant les puissances de $z - z_0$) toute expression de la forme

$$\underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n (z - z_0)^{-n}}_{\text{série suivant les puissances de } z \text{ positives}} + \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z - z_0)^n}_{\text{série suivant les puissances de } z \text{ négatives}} .$$

Les nombres complexes $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ sont appelés les coefficients de la série de Laurent.

Sous la forme explicite une série de Laurent autour de z_0 s'exprime ainsi :

$$\dots + a_2 (z - z_0)^{-2} + a_1 (z - z_0)^{-1} + b_0 + b_1 (z - z_0)^1 + b_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

Remarque et Appellation :

Une série de Laurent peut contenir un nombre fini ou infini de termes.

La notation $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n (z - z_0)^{-n} + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z - z_0)^n$ peut être remplacée par $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$.

La partie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ appelée partie analytique.

La partie $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z - z_0)^{-n}$ appelée partie principale.

Exemple :

1) $\frac{1}{z}$ est une série de Laurent d'un seul terme z^{-1} , sa partie analytique est nulle, sa partie principale égale à z^{-1}

1) $2z^{-1} + 5z + 2z^2$ est une série de Laurent suivant les puissances de z , sa partie analytique égale à $5z + 2z^2$ et sa partie principale égale à $2z^{-1}$.

2) $-4(z-i)^{-3} + 5(z-i)^{-1} + 2 - 5i + 2(z-i)^2$ est une série de Laurent suivant les puissances de $z-i$, sa partie analytique égale à $2 - 5i + 2(z-i)^2$ et sa partie principale égale à $-4(z-i)^{-3} + 5(z-i)^{-1}$.

Activité 1 :

Ecrire l'expression " $z^2 + iz$ " en série de Laurent suivant les puissances de $(z-2)$.

en effet, $z = (z-2) + 2$ par conséquent $z^2 + iz = [(z-2) + 2]^2 + i[(z-2) + 2]$, d'où :

$$z^2 + iz = (z-2)^2 + (4+i)(z-2) + 4 + 2i.$$

3.1.2 Représentation des fonctions en séries de Laurent

Activité 2 :

Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$S_n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

1) Exprimer S_n en fonction de n .

2) Trouver une condition sur z pour que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existe (c-à-d $\in \mathbb{C}$).

3) Exprimer $\frac{1}{1-z}$ à l'aide d'une série.

4) Considérons la fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}$. Exprimer cette fonction en série.

Solution :

Se rappeler la somme des termes d'une suite géométrique!

1)

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad \text{à condition } z \neq 1$$

2)

Se rappeler $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ si $|x| < 1$!

Ainsi, dans notre cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$ si $|z| < 1$.

Se rappeler $|z| < 1$ signifie le disque ouvert de centre $O(0,0)$ et de rayon 1!

Ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\forall z \text{ vérifiant } |z| < 1 \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1-z}} \quad (1)$$

Mais, explicitement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ signifie $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots$

L'expression (1) peut s'écrire sous cette manière

$$\boxed{\forall z \text{ vérifiant } |z| < 1 \text{ on a } 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1-z}} \quad (2)$$

3)

A travers de la formule (2), on dit que la fonction $\frac{1}{1-z}$ est développable autour de $z_0 = 0$ dans le disque ouvert de centre $O(0,0)$ et de rayon 1.

Autrement dit, l'expression $\frac{1}{1-z}$ peut être remplacée par la série $1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$ sous la condition $|z| < 1$.

4)

A quelle condition peut-on exprimer $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}$ en série de Laurent?

Nous allons reprendre la formule (2)

$$\forall z \text{ vérifiant } |z| < 1 \text{ on a } \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

En divisant les deux membres de cette dernière formule par z^3 , on obtient :

$$\forall z \text{ vérifiant } (|z| < 1 \text{ et } z \neq 0) \text{ on a } \frac{1}{(1-z)z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \dots + z^n + \dots \quad (3)$$

L'expression $(|z| < 1 \text{ et } z \neq 0)$ peut être remplacée par $0 < |z| < 1$, la formule (3) devient :

$$\forall z \text{ vérifiant } (0 < |z| < 1) \text{ on a } \frac{1}{(1-z)z^3} = z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + \dots + z^n + \dots \quad (4)$$

De la formule (4), on dit que $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}$ est développable en série de Laurent autour de zéro (0).

Autrement dit, la fonction $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}$ peut être remplacée par

$z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + \dots + z^n + \dots$ sous la condition $0 < |z| < 1$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que une fonction de variable complexe soit développable en série de Laurent

Théorème 3-1 :

Considérons le disque ouvert pointé $D = \{z \text{ vérifiant } 0 < |z - z_0| < R\}$, ($R \leq +\infty$).

Si f est une fonction à variable complexe holomorphe dans le disque ouvert pointé D , alors elle est développable en série de Laurent suivant les puissances de $|z - z_0|$ dans le disque D .

Autrement dit, si vous prenez z dans D alors $f(z)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$f(z) = \dots + a_2(z - z_0)^{-2} + a_1(z - z_0)^{-1} + b_0 + b_1(z - z_0)^1 + b_2(z - z_0)^2 + \dots$$

3.2 Résidus

Définition :

Sous les conditions du Théorème 3-1, On appelle résidu de la fonction f au point z_0 et on note $Res(f, z_0)$ le coefficient de $(z - z_0)^{-1}$ dans le développement de Laurent

$$\dots + a_2(z - z_0)^{-2} + \underbrace{a_1}_{Res(f, z_0)} (z - z_0)^{-1} + b_0 + b_1(z - z_0)^1 + b_2(z - z_0)^2 + \dots$$