

Exo1 : (06 points)

1. C'est un modèle comprenant plusieurs équations, reliant des grandeurs économiques à estimer simultanément. (1)

2. Certaines variables du modèle à équations simultanées en un double statut, elles sont endogènes dans certaines équations et exogènes dans d'autres. Cette configuration est appelée dans un modèle (forme) structurelle. La forme réduite, nous permettra d'exprimer les variables endogènes uniquement en fonction des variables exogènes. (1)

3. Le double statut de certaines variables rend l'hypothèse d'indépendance des variables exogènes et de l'erreur n'est pas respectée et l'application de MCO sur une équation du modèle conduit à des estimateurs qui ne sont pas optimaux. - Pour y remédier à cette situation;

a) On transforme le modèle de la forme structurelle à la forme réduite. (2)

b) On procède à l'identification des équations du modèle.

c) On applique la MCI ou la DMC selon le cas de l'identification de l'équation.

Les pentes intérieures, lorsque une équation du modèle est sous-identifiée, le modèle est non-identifié et il n'est pas estimable.

Exo2 : (10 points)

1°/ Tableau des calculs (1) (0,15) (0,15)

$$\sum_{t=2}^{19} (e_t - e_{t-1})^2 = 9976,58; \quad \sum_{t=1}^{19} e_t^2 = 9357,64$$

$$DW = \frac{\sum (e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^2} = 1,068 \quad (1)$$

$DW < d_1 = 1,08$, on est en présence d'autocorrélation positive des erreurs. On rejette $H_0: \rho = 0$ et on accepte $H_1: \rho \neq 0$.

2°/ $\rho = 1 - \frac{DW}{2} = 0,466 \quad (1)$

3°/

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_n\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$$

- $E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2) = \sigma_\varepsilon^2$
- $E(\varepsilon_t^2) = E(\rho\varepsilon_{t-1} + v_t)^2 = \rho^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + E(v_t^2)$

$$\sigma_\varepsilon^2(1 - \rho^2) = \sigma_v^2 \Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_v^2}{1 - \rho^2} \quad (0,15)$$

- $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+1}) = \rho \sigma_\varepsilon^2 \quad (0,15)$
- $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+2}) = \rho^2 \sigma_\varepsilon^2 \quad (0,15)$
- $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+i}) = \rho^i \sigma_\varepsilon^2 \quad (0,15)$

$$\Omega_\varepsilon = \frac{\sigma_v^2}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{18} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{17} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{18} & \rho^{17} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

avec: $\rho = 0,466$ $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n - k - 1} = \frac{9357,64}{19 - 1 - 1} = 583,602$

$$\hat{\sigma}_v^2 = (1 - \rho^2) \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = (1 - 0,217) \times 583,602 = 456,869$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_v^2 = 456,869} \quad (0,15)$$

4°/ Ω_ε^{-1}

$$\Omega_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\hat{\sigma}_v^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \rho & 1 & -\rho & \dots & 0 \\ 0 & \rho & 1 & -\rho & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & -\rho \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

On remplace ρ par 0,466 et $\hat{\sigma}_v^2 = 456,869$

Exo3 (04 points)

$$y(t, \theta_1, \theta_2, \theta_3, a) = \frac{\theta_1}{[1 + a \cdot e^{(-\theta_2(t - \theta_3))}]^2}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\theta_1}{f(t)} \right]^2 = 1 + a \cdot e^{(-\theta_2(t - \theta_3))} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\theta_1}{f(t)} \right]^2 - 1 = a \cdot e^{(-\theta_2(t - \theta_3))} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \log \left(\left[\frac{\theta_1}{f(t)} \right]^2 - 1 \right) = \log(a \cdot e^{(-\theta_2(t - \theta_3))}) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \log \left(\left[\frac{\theta_1}{f(t)} \right]^2 - 1 \right) = \log a + \theta_2 \theta_3 - \theta_2 \cdot t \quad (1)$$

$$\underbrace{\log \left(\left[\frac{\theta_1}{f(t)} \right]^2 - 1 \right)}_A = \underbrace{\log a + \theta_2 \theta_3}_A - \underbrace{\theta_2 \cdot t}_B \quad (1)$$