Université Abderrahmane Mira de Bejaia

Faculté de Technologie

Département de Technologie

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Cours et exercices d'algèbre I

Matière : Algèbre I

Conformément au Programme de Première Année Parcours Ingénieur

Domaine Sciences de Technologie

Rédigé par :

Dr. BOUKOUCHA Rachid

Année Universitaire : 2022/2023

Table des matières

Préface

Ce polycopié "**Cours et exercices d'algèbre I**" s'adresse aux étudiants du Domaine Sciences et Technique - Parcours Ingénieur-. Il couvre le programme officiel de la matière Algèbre I du premier semestre. On a inclus dans ce cours de nombreux exemples typiques d'applications et on a inclus une série d'exercices importants avec solutions à la fin de chaque chapitre.

Le programme officiel de la matière **Algèbre I** est composé de trois chapitres comme suit :

Chapitre 1 : Ensembles, Relations et Applications

1. Théorie des ensembles.

2. Relation d'ordre, Relations d'équivalence.

3. Application injective, surjective, bijective et application réciproque, image directe, image réciproque.

Chapitre 2 : Nombres complexes

1. Définition d'un nombre complexe.

2. Représentations d'un nombre complexe : Représentation algébrique, trigonométrique, géométrique et représentation exponentielle.

3. Racines d'un nombre complexe : racines carrées, résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$, racines $n^{ème}$ d'un nombre complexe.

Chapitre 3 : Espace vectoriel, Application linéaire

1. Espace vectoriel, base, dimension (définitions et propriétés élémentaires).

2. Application linéaire, noyau, image, rang.

J'espère que ce support aidera l'étudiant de première année à assimiler les mathématiques et plus particulièrement l'Algèbre I qui constituent la base des mathématiques à l'université.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et notre reconnaissance aux deux spécialistes qui ont expertisé ce modeste polycopié. Grâce à leurs commentaires nous avons pu améliorer la présentation du présent manuscrit dans sa forme et dans son contenu. Nous les remercions pour leur travail consciencieux et professionnel et pour leurs remarques toujours pertinentes. Comme toute première version de tout manuscrit, ce polycopié peut contenir certaines erreurs et fautes de frappe, nous invitons le lecteur à nous les signaler afin d'améliorer la présentation et le contenu du présent polycopié, merci de me les communiquer par Email à l'adresse : (rachid_boukecha@yahoo.fr) ou (rachid.boukoucha@univ-bejaia.dz).

Chapitre 1

Ensembles, Relations et Applications

1.1 Généralités sur les ensembles

1.1.1 Ensemble

Définition 1.1 *Un ensemble est une collection d'objets qui ont la même propriété. Chaque objet est un élément de l'ensemble.*

Remarque 1.1 *Un élément x est distinct de l'ensemble $\{x\}$ c'est à dire $x \neq \{x\}$.*

Exemple 1.1 *Soit E l'ensemble des entiers qui divisent* 20, *on aura :*

$$E = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} .$$

$\mathbb{N}$: *l'ensemble des entiers naturels.*
$\mathbb{Z}$: *l'ensemble des entiers relatifs.*
$\mathbb{Q}$: *l'ensemble des nombres rationnels.*
$\mathbb{R}$: *l'ensemble des nombres réels.*
$\mathbb{C}$: *l'ensemble des nombres complexes..*

Appartenance, Inclusion et Égalité

Soit E un ensemble non vide.

a) Si x est un élément de E on dit aussi que x appartient à E et on écrit $x \in E$.

Si x n'est pas un élément de E, on dit que x n'appartient pas à E et on écrit $x \notin E$.

b) Un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F et on a

$$E \subset F \Longleftrightarrow [\forall x, x \in E \Longrightarrow x \in F] .$$

On dit aussi que E est une partie de F ou bien E est un sous ensemble de F.

c) E et F sont égaux si E est inclus dans F et F est inclus dans E et on écrit :

$$E = F \iff \begin{cases} E \subseteq F \\ \text{et} \\ F \subseteq E \end{cases}$$

$$\iff [\forall x, x \in E \Longleftrightarrow x \in F] .$$

L'ensemble vide noté $\emptyset$ (ou $\{\}$) est un ensemble sans éléments et de plus il est inclus dans tout ensemble E.

Réunion et intersection

a) L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments communs et on écrit

$$E \cap F = \{x / x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Et si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont disjoints.

b) La réunion de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments comptés une seule fois et on écrit

$$E \cup F = \{x / x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

Différence de deux ensembles

On appelle différence de deux ensembles E et F et on note $E - F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F et on écrit

$$E - F = \{x / x \in E \text{ et } x \notin F\}.$$

Si $F \subset E$, alors $E - F$ est dit complémentaire de F dans E et il est noté C_E^F ou $\overline{F}$ ou $C_E F$. On note $\emptyset = E - E$.

Différence symétrique

On appelle différence symétrique de deux ensembles E et F et on note $E \Delta F$, l'ensemble défini par :

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E).$$

1.1.2 Propriétés

Soient E un ensemble non vide, A, B et C trois ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1) $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$, 2) $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$.

3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, 4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

5) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, 6) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

7) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$, 8) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

9) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. 10) $A \Delta \emptyset = A$ et $A \Delta A = \emptyset$.

11) Si : A, B des parties de E, alors on a :

$$C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B \text{ et } C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B.$$

1.1.3 L'ensemble des parties d'un ensemble

Etant donné un ensemble E. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E et on note

$$\mathcal{P}(E) = \{A \text{ tel que : } A \subset E\}.$$

Remarque 1.2 *a) L'ensemble vide et E sont toujours des éléments de $\mathcal{P}(E)$.*

b) Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, donc

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \\ \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} \end{array} \right\}.$$

1.1.4 Partition d'un ensemble

Définition 1.2 *Soient E un ensemble non vide et B une famille des parties de E.*

On dit que B est une partition de E si

1) Tout élément de B n'est pas vide.

2) Les éléments de B sont deux à deux disjoints.

3) La réunion des éléments de B est égale à E.

Exemple 1.2 *Soit* $E = \{1, 2, 3, 4\}$, *on a :* $B = \{\{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\}$ *est une partition de* E.

1.1.5 Produit cartésien

Définition 1.3 *L'ensemble des couples* (x, y) *tels que* $x \in A$ *et* $y \in B$ *est appelé produit cartésien de* A *et* B *et on le note* $A \times B$

$$A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Propriétés : Soient A, B, C et D des ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1) $A \times B = \emptyset \Longrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

2) $A \times B = B \times A \Longleftrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ou $A = B$.

3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

4) $(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B)$.

5) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

6) $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Remarque Si $cardE = n$ fini, A, B des parties de E, alors on a :

$card(\mathcal{P}(E)) = 2^{cardE} = 2^n$ $\qquad$ $A \times B = cardA.cardB$

$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$

$card(A \triangle B) = cardA + cardB - 2card(A \cap B)$

Exemple 1.3 *Soient* $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$ *et* $C = \{0, 2\}$.

Déterminer

$A \cap B$, $A \cup B$, $C_E A$, $C_E B$, $A - B$, $B - A$, $A \triangle B$, $A \times C$, $C \times A$

On a :

$A \cap B = \{1, 3\}$, $\quad A \cup B = \{-2, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $\quad C_E A = \{-2, -1, 0, 2\}$,

$C_E B = \{-1, 4\}$, $\quad A - B = \{4\}$, $\quad B - A = \{-2, 0, 2\}$, $\quad A \triangle B = \{-2, 0, 2, 4\}$,

$A \times C = \{(1, 0), (1, 2), (3, 0), (3, 2), (4, 0), (4, 2)\}$,

$C \times A = \{(0, 1), (2, 1), (0, 3), (2, 3), (0, 4), (2, 4)\}$.

1.2 Exercices

Exercise 1.4 *Soient E un ensemble non vide, A et B deux parties de ensemble E.*

Montrer que :

1) $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$ $\qquad$ 2) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.

3) $(A \subseteq B) \Rightarrow C_E B \subseteq C_E A$ $\qquad$ 4) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$

Solution.

1) Montrons que

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

Soit $x \in C_E(A \cap B)$.

On a :

$$\begin{aligned} x \in C_E(A \cap B) &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in C_E A \text{ ou } x \in C_E B \\ &\Leftrightarrow x \in C_E A \cup C_E B \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x \in C_E(A \cap B) \Leftrightarrow x \in C_E A \cup C_E B.$$

Alors,

$$C_E(A\cap B)=C_EA\cup C_EB$$

2) Montrons que

$$C_E(A\cup B)=C_EA\cap C_EB$$

Soit $x\in C_E(A\cup B)$.
On a :

$$\begin{aligned}x\in C_E(A\cup B) &\Leftrightarrow x\in E \text{ et } x\notin (A\cup B)\\ &\Leftrightarrow x\in E \text{ et } (x\notin A \text{ et } x\notin B)\\ &\Leftrightarrow (x\in E \text{ et } x\notin A) \text{ et } (x\in E \text{ et } x\notin B)\\ &\Leftrightarrow x\in C_EA \text{ et } x\in C_EB\\ &\Leftrightarrow x\in C_EA\cap C_EB\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x\in C_E(A\cup B)\Leftrightarrow x\in C_EA\cap C_EB.$$

Alors,

$$C_E(A\cup B)=C_EA\cap C_EB$$

3) Montrons que :

$$(A\subseteq B)\Rightarrow C_EB\subseteq C_EA$$

On suppose que $A\subseteq B$ *et on démontre que :* $C_EB\subseteq C_EA$.
Soit $x\in C_EB$.
On a :

$$\begin{aligned}x\in C_EB &\Rightarrow x\in E \text{ et } x\notin B\\ &\Rightarrow x\in E \text{ et } x\notin A \text{ (car :} A\subseteq B\text{)}\\ &\Rightarrow x\in C_EA\end{aligned}$$

donc on a : $C_EB\subseteq C_EA$.

Alors,

$$(A\subseteq B)\Rightarrow C_EB\subseteq C_EA \quad \text{(est vraie)}$$

4) Montrons que

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$$

On suppose que $A \cap B = \emptyset$ *et on démontre que :* $A \subset C_E B$.
Soit $x \in A$.
On a :

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\Rightarrow \quad x \notin B \text{ car } A \cap B = \emptyset \\ &\Rightarrow \quad x \in C_E B \end{aligned}$$

donc $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C_E B$, *d'où* $A \subset C_E B$.
Alors,

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B \qquad \textit{(est vraie)}$$

Exercise 1.5 *Soient* A, B *et* C *trois ensembles de l'ensemble* E.
Montrer que :

$$1) \quad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)\,.$$

$$2) \quad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)\,.$$

Solution.
1) Montrons que

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Soit $x \in A - (B \cap C)$.
On a :

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cap C) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \quad \text{et} \quad x \notin (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \quad \text{et} \quad (x \notin B \text{ ou } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B) \text{ ou } (x \in A \quad \text{et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A - B) \quad \text{ou } x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x : x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)\,.$$

D'où

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$$

2) Montrons que

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C).$$

Soit $x\in A-(B\cup C)$.

On a :

$$\begin{aligned} x\in A-(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A \ \ et \ \ x\notin(B\cup C)\\ &\Leftrightarrow x\in A \ \ et \ \ (x\notin B \ et\ x\notin C)\\ &\Leftrightarrow (x\in A \ \ et \ \ x\notin B) \ et\ (x\in A \ \ et\ x\notin C)\\ &\Leftrightarrow x\in(A-B) \ \ et\ x\in(A-C)\\ &\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x: x\in A-(B\cup C)\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C).$$

D'où

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C).$$

Exercise 1.6 *Soient* A,B,C *et* D *des ensembles.*

Montrer que :

1) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$.
2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.
3) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

Solution.

1) Montrons que : $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$.

Soit $(x,y)\in(A\cap B)\times C$.

On a : $$\begin{aligned}(x,y)\in(A\cap B)\times C &\Leftrightarrow x\in A\cap B\ et\ y\in C\\ &\Leftrightarrow (x\in A\ et\ x\in B)\ \ et\ y\in C\\ &\Leftrightarrow (x\in A\ et\ y\in C\ )\ \ et\ \ (x\in B\ \ et\ y\in C)\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times C)\ \ et\ \ (x,y)\in(B\times C)\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times C)\cap(B\times C)\end{aligned}$$

Donc, $\forall (x,y) : (x,y) \in (A \cap B) \times C \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$

Alors, $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

2) Montrons que : $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Soit $(x,y) \in A \times (B \cup C)$.

On a :

$$\begin{aligned} (x,y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } y \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (y \in B \text{ ou } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B\ ) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \text{ ou } (x,y) \in (A \times C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall (x,y) : (x,y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

Alors,

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

3) Montrons que : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Soit $(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

On a :

$$\begin{aligned} (x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \text{ et } (x,y) \in (C \times D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ et } y \in B \cap D \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall (x,y) : (x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Alors,

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

1.3 Relations binaires dans un ensemble

1.3.1 Définition et Propriétés

Définition 1.4 *Soient E un ensemble, x et y deux éléments de E. S'il existe un lien qui relie x et y on dit qu'ils sont reliés par une relation $\Re$ et on écrit $x\Re y$ ou $\Re(x, y)$.*

Exemple 1.7 $E = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $x\Re y \Longleftrightarrow |x| - |y| = x - y$.

Propriétés

1) Réfléxivité : On dit que $\Re$ est réflexive dans E si :

$$\forall x \in E : x\Re x.$$

2) Symétrie : On dit que $\Re$ est symétrique dans E si :

$$\forall x, y \in E : x\Re y \Longrightarrow y\Re x.$$

3) Antisymétrie : On dit que $\Re$ est antisymétrique dans E si :

$$\forall x, y \in E : (x\Re y \text{ et } y\Re x) \Longrightarrow x = y.$$

4) Transitivité : On dit que $\Re$ est transitive dans E si :

$$\forall x, y, z \in E : (x\Re y \text{ et } y\Re z) \Longrightarrow x\Re z.$$

1.3.2 Relation d'équivalence

On dit que $\Re$ est une relation d'équivalence sur E si $\Re$ est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Classe d'équivalence

Soient $\Re$ une relation d'équivalence sur E et $a \in E$. On appelle classe d'équivalence de a notée $\hat{a}$ ou $\overline{a}$, l'ensemble des éléments x de E qui sont en relation $\Re$ avec a, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \{x \in E : x\Re a\}. \\ &= \{x \in E : a\Re x\}. \end{aligned}$$

Ensemble quotient

Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur E. On définit l'ensemble quotient de E par la relation $\Re$ l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E, noté $E/\Re$ et on a :

$$E/\Re = \{\hat{a}, a \in E\}.$$

Propriétés

Soit E un ensemble et $\Re$ une relation d'équivalence dans E. Soit x un élément de E, alors on a :

1) $\forall a \in E : a \in \hat{a}$

2) $\forall a, b \in E : a\Re b \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b}$ $(a \in \hat{b} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b})$.

3) $\forall a, b \in E : \hat{a} \neq \hat{b} \Leftrightarrow \hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$

4) $E = \underset{a \in E}{\cup} \hat{a}$

Exercise 1.8 *Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\Re$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \; x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1) Montrer que $\Re$ une relation d'équivalence.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Préciser la classe d'équivalence de a.

Solution.

1) Montrons que $\Re$ une relation d'équivalence

$\Re$ ***est réflexive ?***

$$(\forall x \in \mathbb{R} : x\Re x)?$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} x\Re x &\Leftrightarrow x^2 - x^2 = x - x \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

donc, $\forall x \in \mathbb{R} : x\Re x$*, alors* $\Re$ *est réflexive.......*(1)

$\Re$ ***est symétrique ?***

$$(\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Rightarrow y\Re x)?$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$*, on suppose* $x\Re y$ *et on démontre que :* $y\Re x$.

On a :

$$\begin{aligned} x\Re y &\Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Rightarrow -\left(y^2 - x^2\right) = -\left(y - x\right) \\ &\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Rightarrow y\Re x. \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Rightarrow y\Re x,$$

alors $\Re$ *est symétrique.......*(2)

$\Re$ ***est transitive ?***

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\Re y \text{ et } y\Re z \Rightarrow x\Re z)?$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$*, on suppose* $x\Re y$ *et* $y\Re z$ *et on démontre que :* $x\Re z$.

On a :

$$x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \tag{1.1}$$

et

$$y\Re z \Longleftrightarrow y^2 - z^2 = y - z. \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} (1.1) + (1.2) &\Rightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \\ &\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z \\ &\Rightarrow x\Re z. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\Re y \text{ et } y\Re z \Rightarrow x\Re z,$$

alors $\Re$ *est transitive.......(2)*

De $(1),(2)$ *et* (3)*, on a bien* $\Re$ *une relation d'équivalence.*

2) Soit $a \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \{x \in \mathbb{R}, x\Re a\} = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - a^2 = x - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x-a)(x+a) = x - a\} = \{x \in \mathbb{R}, (x-a)(x+a-1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x = a \text{ ou } x = 1 - a\} = \{a, 1-a\}.\end{aligned}$$

donc, $\hat{a} = \{a, 1-a\}$.

1.3.3 Relation d'ordre

Une relation binaire $\Re$ dans un ensemble E est dite relation d'ordre si elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Ordre partiel, ordre total

Soient E un ensemble et $\Re$ une relation d'ordre dans E. On dit que $\Re$ est d'ordre total si

$$\forall x, y \in E : x\Re y \text{ ou } y\Re x.$$

Et on dit qu'elle est d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total, c'est à dire :

$$\exists x, y \in E : x \text{ n'a pas de relation avec } y \text{ et } y \text{ n'a pas de relation avec } x.$$

Exercise 1.9 *On définit sur* $\mathbb{R}^*$ *la relation binaire* $\mathcal{R}_1$ *par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = kx.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'ordre.*

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ *est-il total ?*

Solution.

1) Montrons que $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'ordre.*

Réflexivité de $\mathcal{R}_1$: $(\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 x)$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

On a

$$\begin{aligned} &On\ a: \quad x = 1.x \\ &\qquad\qquad donc,\ \exists k = 1 \in \mathbb{N} : x = 1.x \\ &\qquad\qquad d'où,\ x\mathcal{R}_1 x. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 x,$ *alors la relation* $\mathcal{R}_1$ *est réflexive.......*(i)

Antisymétrie de $\mathcal{R}_1$ ***:***

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 x \Longrightarrow x = y)?$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$.

On suppose $x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 x$ *et on démonté* $x = y$.

On a

$$\begin{cases} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} : y = kx \\ et \\ \exists k' \in \mathbb{N} : x = k'y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : y = k\left(k'y\right)$$

$$\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : y = \left(kk'\right) y.$$

Donc $kk' = 1$ *ce qui implique que* $k = k' = 1$ *car* $k, k' \in \mathbb{N}$ *et par suite* $x = y$, *Finalement*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 x \Longrightarrow x = y.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ *est antisymétrie........*(ii)

Transitivité de $\mathcal{R}_1$:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z)?$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^*$.

On suppose $x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 z$ *et on démontre* $x\mathcal{R}_1 z$.

On a

$$\begin{cases} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} : y = kx \\ et \\ \exists k' \in \mathbb{N} : z = k'y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : z = k'\left(kx\right) = \left(k'k\right) x$$

$$\Longrightarrow \exists k'' = k'k \in \mathbb{N} : z = k''x \text{ donc, } x\mathcal{R}_1 z.$$

Alors,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ est transitive........(iii)

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ est-il total :

L'ordre $\mathcal{R}_1$ est total si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ ou } y\mathcal{R}_1 x.$$

Prenons $x = 2$ et $y = 3$, on a

$\nexists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $3 = k.2$ *donc* 2 *n'est pas en relation avec* 3
et
$\nexists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $2 = k.3$ *donc* 3 *n'est pas en relation avec* 2

Donc, l'ordre $\mathcal{R}_1$ n'est pas total, on dit que l'ordre $\mathcal{R}_1$ est partiel.

1.4 Exercices

Exercise 1.10 *Soit f l'application définie par :*

$$f \quad : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \quad \longmapsto \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1) Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}_1$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

a) Montrer que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence.

b) Déterminer la classe d'équivalence de $\frac{1}{2}$.

2) Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}_2$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y)$$

$\mathcal{R}_2$ est-elle une relation d'ordre ?

Solution.

1) Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}_1$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

a) Montrons que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence.

Réflexivité de $\mathcal{R}_1$ ***:***

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 x)?$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$x\mathcal{R}_1 x \iff f(x) = f(x) \text{ (est vraie)}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}_1 x$, *d'où* $\mathcal{R}_1$ *est réflexive.......* (i)

Symétrique de $\mathcal{R}_1$:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y \Longrightarrow y\mathcal{R}_1 x)?$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, *on suppose que* $x\mathcal{R}_1 y$ *et on démontre que* $y\mathcal{R}_1 x$.

On a :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}_1 y &\Longrightarrow f(x) = f(y) \\ &\Longrightarrow f(y) = f(x) \\ &\Longrightarrow y\mathcal{R}_1 x \end{aligned}$$

Donc, $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y \Longrightarrow y\mathcal{R}_1 x$, *d'où* $\mathcal{R}_1$ *est symétrique ....* (ii)

Transitivité de $\mathcal{R}_1$ ***:***

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z)?$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, *on suppose que* $x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 z$ *et on démontre que* $x\mathcal{R}_1 z$.

On a :

$$\begin{cases} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = f(y)......(1) \\ et \\ f(y) = f(z)......(2) \end{cases}$$

(1)+(2) de (1) *et* (2) *on a :* $f(x) = f(z)$, *d'où* $x\mathcal{R}_1 z$

Alors,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z.$$

Donc, $\mathcal{R}_1$ *est transitive.......* (iii) .

De (i), (ii) *et* (iii), *on a* $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'équivalence.*

b) Déterminons la classe d'équivalence de $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{1}{2}\right)} &= \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}_1\frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(\frac{1}{2})\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{1+x^2} = \frac{4}{5}\} = \{x \in \mathbb{R} : 4 + 4x^2 = 5\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x^2 = \frac{1}{4}\} = \{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{1}{2} \textit{ ou } x = \frac{1}{2}\} \\
&= \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}.
\end{aligned}$$

2) Sur $\mathbb{R}$*, on considère la relation* $\mathcal{R}_2$ *définie par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y)$$

$\mathcal{R}_2$ *n'est pas une relation d'ordre, car elle n'est pas antisymétrique. En effet, on a* $2\mathcal{R}(-2)$ *et* $(-2)\mathcal{R}2$*, car*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+2^2} \geq \dfrac{1}{1+(-2)^2} \\ \textit{et} \\ \dfrac{1}{1+(-2)^2} \geq \dfrac{1}{1+2^2}, \end{cases}$$

mais $2 \neq -2$.

Exercise 1.11 *1) Dans* $\mathbb{R}$*, on définit la relation binaire* $\mathcal{R}$ *par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\ \mathcal{R}\ y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

Montrer que :

a) $\mathcal{R}$ *n'est pas symétrique.*

b) $\mathcal{R}$ *n'est pas antisymétrique.*

2) On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ *la relation binaire* $\mathcal{S}$ *par :*

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[,\ x\ \mathcal{S}\ y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ *est une relation d'ordre.*

b) Cet ordre-est il total ?

Solution.

1) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\ \mathcal{R}\ y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique :
On a $0\mathcal{R}2$, car

$$0^2 - 2^2 = -4 \leq -2 = 0 - 2.$$

Mais, $2\not\mathcal{R}0$, car

$$2^2 - 0^2 > 2 = 2 - 0.$$

b) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique : On a $0\mathcal{R}1$ et $1\mathcal{R}0$, car

$$\begin{cases} 0^2 - 1^2 \leq 0 - 1 \\ et \\ 1^2 - 0^2 \leq 1 - 0. \end{cases}$$

Mais $0 \neq -1$.

2) On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[,\ x\ \mathcal{S}\ y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

Réflexivité de** S **:

$$\left(\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[,\ x\mathcal{S}x\right)?$$

Soit $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On a

$$x^2 - x^2 = 0 = x - x.$$

Donc,

$$x^2 - x^2 \leq x - x.$$

Alors,

$$\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[,\ x\mathcal{S}x.$$

D'où, $\mathcal{S}$ est une relation réflexive......... (i)

Antisymétrie de** S **:

$$\left(\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y\right)?$$

Soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.

On suppose que $x\mathcal{S}y$ *et* $y\mathcal{S}x$ *et on démontre* $x = y$.

On a

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ y^2 - x^2 \leq y - x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ x^2 - y^2 \geq x - y. \end{cases}$$

Alors,

$$x^2 - y^2 = x - y.$$

On a

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = x - y &\Longrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0. \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ ou \\ x = 1 - y \ \ (impossible,\ car\, x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[). \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \ et\, y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y.$$

D'où la relation $\mathcal{S}$ *est antisymétrique ....* (ii)

Transitivité de S ***:***

$$\left(\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \ et\, y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z\right)?$$

Soient $x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.

On suppose $x\mathcal{S}y$ *et* $y\mathcal{S}z$ *et on démontre* $x\mathcal{S}z$.

On a :

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ y^2 - z^2 \leq y - z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ x^2 - z^2 \leq x - z.$$

Donc

$$\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \ et\, y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z.$$

D'où la relation $\mathcal{S}$ est transitive .... (iii)
De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
b) L'ordre est-il total ?
En effet, soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On a

$$x^2 - y^2 \leq x - y \ \ ou \ \ x^2 - y^2 \geq x - y$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \ x^2 - y^2 \leq x - y \ \ ou \ \ y^2 - x^2 \leq y - x \\ &\Longrightarrow \ x\mathcal{S}y \ \ ou \ \ y\mathcal{S}x. \end{aligned}$$

Exercise 1.12 *On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathcal{R}_2$ par :*

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a, b) \mathcal{R}_2 (c, d) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_2$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer la classe d'équivalence de $(0, 1)$.
Solution.
On a $\mathcal{R}_2$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}^2$ comme suit :

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a, b) \mathcal{R}_2 (c, d) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

1) Montrons que $\mathcal{R}_2$ est une relation d'équivalence.
Réflexivité de $\mathcal{R}_2$:

$$\big(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \mathcal{R}_2 (a, b)\big)?$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On a

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 = a^2 + b^2 \\ \Longrightarrow \ & (a, b) \mathcal{R}_2 (a, b). \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \mathcal{R}_2 (a, b).$$

Alors, la relation $\mathcal{R}_2$ est réflexive sur $\mathbb{R}^2$....... (i)
Symétrie de $\mathcal{R}_2$:

$$\big(\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2, \ (a, b) \mathcal{R}_2 (c, d) \Longrightarrow (c, d) \mathcal{R}_2 (a, b)\big)?$$

Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, on suppose $(a, b) \mathcal{R}_2 (c, d)$ et on démontre $(c, d) \mathcal{R}_2 (a, b)$.

On a :

$$\begin{aligned}(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d) &\Longrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2\\ &\Longrightarrow c^2+d^2=a^2+b^2\\ &\Longrightarrow (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(a,b)\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\forall\,(a,b)\,,(c,d)\in\mathbb{R}^2,\ \ (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\Longrightarrow (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(a,b)\,.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_2$ est symétrique.......(ii)

Transitivité de $\mathcal{R}_2$:

$$\big(\forall\,(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f)\in\mathbb{R}^2:(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\ \ et\ \ (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\Longrightarrow (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\big)?$$

Soient $(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f)\in\mathbb{R}^2$.

On suppose $(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)$ *et* $(c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)$ *et on démontre* $(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\,.$

On a :

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\\ et\\ (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\end{array}\right. &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}a^2+b^2=c^2+d^2\\ et\\ c^2+d^2=e^2+f^2\end{array}\right.\\ &\Longrightarrow a^2+b^2=e^2+f^2\\ &\Longrightarrow (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\,.\end{aligned}$$

Alors,,

$$\forall\,(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f)\in\mathbb{R}^2:(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\ \ et\ \ (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\Longrightarrow (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\,.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_2$ est transitive........(iii)

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{R}_2$ est une relation d'équivalence.

2) Déterminons $\overline{(0,1)}$ *la classe d'équivalence de* $(0,1)\,.$

On a :

$$\begin{aligned}\overline{(0,1)} &= \left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(0,1)\right\}=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:a^2+b^2=0^2+1^2\right\}\\ &= \left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:a^2+b^2=1\right\}.\end{aligned}$$

Donc la classe d'équivalence de $(0,1)$ *est le cercle de centre* $(0,0)$ *et de rayon* 1.

Exercise 1.13 *On définit sur* $\mathbb{R}_*^+$ *la relation binaire* $\mathcal{R}_1$ *par :*

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_*^+,\quad x\mathcal{R}_1 y\Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}:y=x^k.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ est-il total ?

Solution.

1) Montrons que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

Réflexivité de R_1 : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 x)$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

On a

$$\begin{aligned} \textit{On a : } \quad & x = x^1 \\ & \textit{donc, } \exists k = 1 \in \mathbb{N} : x = x^k \\ & \textit{d'où } x\mathcal{R}_1 x. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 x$, *alors la relation* $\mathcal{R}_1$ *est réflexive.......(i)*

Antisymétrie de R_1 ***:***

$$\big(\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 x \Longrightarrow x = y\big)?$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$

On suppose $x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 x$ *et on démontre* $x = y$.

On a

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 x \end{array} \right. & \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = x^{k_1} \\ et \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} : x = y^{k_2} \end{array} \right. \\ & \Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = \left(y^{k_2}\right)^{k_1} \\ & \Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = y^{k_1 k_2}. \end{aligned}$$

Donc $k_1 k_2 = 1$ *ce qui implique que* $k_1 = k_2 = 1$ *car* $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ *et par la suite* $x = y$. *Finalement,*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 x \Longrightarrow x = y.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ *est antisymétrie........(ii)*

Transitivité de R_1 :

$$\big(\forall x, y, z \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z\big)?$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_*^+$.

On suppose $x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 z$ *et on démontre* $x\mathcal{R}_1 z$.

On a

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = x^{k_1} \\ et \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} : z = y^{k_2} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : z = \left(x^{k_1}\right)^{k_2} = x^{k_1 k_2}$$

$$\Longrightarrow \exists k_3 = k_1.k_2 \in \mathbb{N} : z = x^{k_3} \text{ donc, } x\mathcal{R}_1 z.$$

Alors,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ est transitive........(iii)

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ est-il total ?

L'ordre $\mathcal{R}_1$ est total si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ ou } y\mathcal{R}_1 x.$$

Prenons $x = 2$ et $y = 3$, on a

$$\begin{array}{l} \nexists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 3 = 2^k \text{ donc } 2 \text{ n'est pas en relation avec } 3 \\ et \\ \nexists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 2 = 3^k \text{ donc } 3 \text{ n'est pas en relation avec } 2 \end{array}$$

Donc, l'ordre $\mathcal{R}_1$ n'est pas total, on dit que l'ordre $\mathcal{R}_1$ est partiel.

Exercise 1.14 *Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, dans $\mathcal{P}(E)$, on définit la relation binaire $\Re$ par :*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : \; A\Re B \Longleftrightarrow A \subseteq B.$$

1) Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.

2) Cet ordre est-il total ?

Solution.

On a :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{\begin{array}{c} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \\ \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} \end{array}\right\}.$$

1) Montrons que $\Re$ une relation d'ordre.

$\Re$ ***est réflexive ?***

$$(\forall A \in \mathcal{P}(E) : A\Re A)?$$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

On a :

$$\begin{aligned} A\Re A \quad &\Leftrightarrow A \subseteq A \\ &A \subseteq A \text{ est toujours vraie} \end{aligned}$$

donc,

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) : A\Re A,$$

alors $\Re$ *est réflexive.......*(1)

$\Re$ ***est antisymétrique ?***

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : (A\Re B \text{ et } B\Re A) \Rightarrow A = B)?$$

Soient $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, *on suppose* $A\Re B$ *et* $B\Re A$ *et on démontre que :* $A = B$.

On a :

$$A\Re B \Longleftrightarrow A \subseteq B \tag{1.3}$$

et

$$B\Re A \Longleftrightarrow B \subseteq A. \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} de\ (1.3) + (1.4) \quad on\ a: \quad & A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A. \\ & \Rightarrow B \subseteq A \subseteq B\ . \\ & \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : (A\Re B \text{ et } B\Re A) \Rightarrow A = B,$$

alors $\Re$ *est antisymétrique.......*(2)

$\Re$ ***est transitive ?***

$$(\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) : (A\Re B \text{ et } B\Re C) \Rightarrow A\Re C)?$$

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, *on suppose* $A\Re B$ *et* $B\Re C$ *et on démontre que :* $A\Re C$.

On a :

$$A\Re B \Longleftrightarrow A \subseteq B \tag{1.5}$$

et

$$B\Re C \Longleftrightarrow B \subseteq C \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}(1.5)+(1.6) &\Rightarrow A \subseteq B \text{ et } B \subseteq C \\ &\Rightarrow A \subseteq B \ \subseteq C \\ &\Rightarrow A \subseteq C \\ &\Rightarrow A\Re C.\end{aligned}$$

Donc

$$\forall A,B,C \in \mathcal{P}(E) : (A\Re B \text{ et } B\Re C) \Rightarrow A\Re C,$$

alors, $\Re$ est transitive.......(3)

De $(1),(2)$ et (3), on a $\Re$ est une relation d'ordre.

2) L'ordre est-il total ?

L'ordre $\Re$ est total si et seulement si :

$$\forall A,B \in \mathcal{P}(E) : A\Re B \text{ ou } B\Re A.$$

Prenons : $A=\{1,3\}$ et $B=\{2,4\}$ on a :

$$\begin{aligned} &A \text{ n'est pas en relation avec } B \quad \text{car : } \quad A \nsubseteq B \\ &\qquad\qquad \text{et} \\ &B \text{ n'est pas en relation avec } A \quad \text{car : } \quad B \nsubseteq A \end{aligned}$$

Donc, l'ordre $\Re$ n'est pas total, on dit dans ce cas : $\Re$ est d'ordre partiel.

Exercise 1.15 *Dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes on définit la relation $\Re$ comme suit :*

$$\forall z,z' \in \mathbb{C} : z\Re z' \Leftrightarrow |z-i| = |i-z'|$$

1) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{C}$.

2) Déterminer, dans le plan complexe, la classe d'équivalence de $2+3i$.

Solution.

Dans $\mathbb{C}$, la relation $\Re$ est définie comme suit :

$$\forall z,z' \in \mathbb{C} : z\Re z' \Leftrightarrow |z-i| = |i-z'|$$

1) Montrons que $\Re$ une relation d'équivalence dans $\mathbb{C}$

$\Re$ est réflexive ? $(\forall z \in \mathbb{C} : z\Re z)$?

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $z\Re z \Leftrightarrow |z-i| = |i-z| \Leftrightarrow 0=0$

donc, $\forall z \in \mathbb{C} : z\Re z$*, alors* $\Re$ *est réflexive.......*(1)

$\Re$ ***est symétrique ?*** $(\forall z, z' \in \mathbb{C} : z\Re z' \Rightarrow z'\Re z)$?

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$*, on suppose* $z\Re z'$ *et on démontre que :* $z'\Re z$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } z\Re z' &\Rightarrow |z-i| = |i-z'| \\ &\Rightarrow |i-z'| = |z-i| \\ &\Rightarrow |z'-i| = |i-z|, \text{ car } |z-i| = |i-z| \text{ et } |i-z'| = |z'-i| \\ &\Rightarrow z'\Re z. \end{aligned}$$

Donc, $\forall z, z' \in \mathbb{C} : z\Re z' \Rightarrow z'\Re z$*, alors* $\Re$ *est symétrique.......*(2)

$\Re$ ***est transitive ?*** $(\forall z, z', z'' \in \mathbb{C} : (z\Re z' \text{ et } z'\Re z'') \Rightarrow z\Re z'')$?

Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$*, on suppose* $z\Re z'$ *et* $z'\Re z''$ *et on démontre que :* $z\Re z''$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } z\Re z' &\Longleftrightarrow |z-i| = |i-z'| \ldots\ldots\ldots (*) \\ \text{et } z'\Re z'' &\Longleftrightarrow |z'-i| = |i-z''| \ldots\ldots. (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) + (**) &\Rightarrow |z-i| = |i-z''|, \text{ car } |i-z'| = |z'-i| \\ &\Rightarrow |z-i| = |i-z''| \Rightarrow z\Re z''. \end{aligned}$$

Donc, $(\forall z, z', z'' \in \mathbb{C} : (z\Re z' \text{ et } z'\Re z'') \Rightarrow z\Re z'')$*, alors* $\Re$ *est transitive.......*(2)

De $(1), (2)$ *et* (3)*, on a bien* $\Re$ *une relation d'équivalence dans* $\mathbb{C}$.

2) Déterminons la classe d'équivalence de $2+3i$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \widehat{2+3i} &= \{z \in \mathbb{C},\ z\Re(1+i)\} = \{z \in \mathbb{C},\ |z-i| = |i-(2+3i)|\}, \\ &= \left\{z \in \mathbb{C},\ |z-i| = |-2-2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\right\}, \\ &= \left\{z \in \mathbb{C},\ |z-i| = 2\sqrt{2}\right\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des points $M(x,y)$ *est le cercle de centre* $A(0,1)$ *et de rayon* $r = 2\sqrt{2}$.

1.5 Applications

Définition 1.5 *Soient* E, F *deux ensembles.*

- On appelle application de E *dans* F *une relation de* E *dans* F *dont à tout élément* x *de* E *on lui correspond un et un seul élément* y *de* F. x *est dit antécédent,* E *l'ensemble de départ ou des antécédents,* y *est appelé l'image,* F *l'ensemble d'arrivée ou des images.*

- Deux applications sont égales si leurs ensembles de départ sont égaux, leurs ensembles d'arrivée sont égaux et leurs valeurs également.

En général, on schématise une fonction ou une application f par

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

$\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$ *est appelé graphe de f.*

Exemple 1.16

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x-1} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x-1}. \end{array}$$

Dans cet exemple g est une application mais f est une fonction et n'est pas une application car l'élément 1 n'a pas une image dans $\mathbb{R}$.

1.5.1 Restriction et prolongement d'une application

Soit E' un sous ensemble de E et $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application $g : E' \longrightarrow F$ telle que $\forall x \in E', g(x) = f(x)$ est appelée la restriction de f à E' et on écrit $g = f_{/E'}$ et on dit aussi que f est le prolongement de g à E.

1.5.2 Composition des applications

Soient E, F et G trois ensembles et et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On définit l'application composée de f et g notée $g \circ f$ par

$$\forall x \in E : (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

1.5.3 Injection, surjection et bijection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

a) On dit que f est injective si et seulement si :

$$\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

ou d'une manière équivalente

$$\forall x, x' \in E : x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x').$$

b) On dit que f est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x).$$

c) On dit que f est bijective si f à la fois injective et surjective.

Propriétés

a) f est injective si et seulement si l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution.

a) f est surjective si et seulement si l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.

a) f est bijective si et seulement si l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution.

Proposition 1.1 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors on a*

1) $g \circ f$ est injective $\Longrightarrow f$ est injective.

2) $g \circ f$ est surjective $\Longrightarrow g$ est surjective.

3) $g \circ f$ est bijective $\Longrightarrow f$ est injective et g est surjective.

Preuve : 1) On suppose que $g \circ f$ est injective et on montre que f est injective. Soient $x, x' \in E : f(x) = f(x')$ qui est dans F. On compose par g aux deux membres de l'égalité, on obtient

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(f(x')) &\Longrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \\ &\Longrightarrow x = x' \text{ car } g \circ f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est injective.

2) On suppose que $g \circ f$ est surjective et on montre que f est surjective.

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ surjective} &\Longrightarrow \forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in E : z = g(f(x)). \end{aligned}$$

En posant $y = f(x) \in F$ alors $\forall z \in G, \exists y \in F : z = g(y)$, ce qui montre que g est surjective.

3) $g \circ f$ est bijective $\Longleftrightarrow \begin{cases} g \circ f \text{ est injective} \\ g \circ f \text{ est surjective} \end{cases} \Longrightarrow f$ est injective et g est surjective.

1.5.4 Applications réciproques

Définition 1.6 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors il existe une application notée f^{-1} définie par $f^{-1} : F \longrightarrow E$*

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

appelée application réciproque de f.

Théorème 1.17 *Théorème : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors son application réciproque f^{-1} vérifie $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$. On rappelle*

$$\begin{array}{rccl} Id_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & Id_E(x) = x. \end{array}$$

Proposition 1.2 *Proposition : Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors on a*

a) f et g sont injectives $\Longrightarrow g \circ f$ est injective.

b) f et g sont surjectives $\Longrightarrow g \circ f$ est surjective.

c) f et g sont bijectives $\Longrightarrow g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve : a) On suppose que f et g sont injectives et on montre que $g \circ f$ est injective. Soient $x, x' \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') &\Longrightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \\ &\Longrightarrow f(x) = f(x') \text{ car } g \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow x = x' \text{ car } f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'application $g \circ f$ est injective.

b) On suppose que f et g sont surjectives et on montre que $g \circ f$ est surjective.

Soit $z \in G$, on a :

$$\begin{aligned} z \in G &\Rightarrow \exists y \in F : z = g(y) \quad \text{car } g \text{ est surjective} \\ y \in F &\Rightarrow \exists x \in E : y = f(x) \quad \text{car } f \text{ est surjective} \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Ce qui montre que l'application $g \circ f$ est surjective.

c) On suppose que f et g sont bijectives, donc f et g sont surjectives et f et g sont injectives. D'après a) et b) on déduit que $g \circ f$ est injective et est surjective, c'est à dire $g \circ f$ est bijective.

Remarque 1.3 *1. Les graphes d'une application bijective f et de son inverse f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.*

2. Notons que si f est bijective alors f^{-1} est aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

1.5.5 Image directe

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A un sous-ensemble de E.

On définit l'image directe de A par l'application f le sous-ensemble de F noté $f(A)$:

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} \\ &= \{f(x), x \in A\}. \end{aligned}$$

Exemple 1.18 *Soit*

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

et $A = [-2, 1]$.

On a :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{x^2, x \in [-2, 1]\} = [0, 4].$$

1.5.6 Image réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et B un sous-ensemble de F.

On définit l'image réciproque de B par l'application f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Exemple 1.19 *Soit*

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

et $B = [0, 4]$.

On a

$$\begin{aligned} f^{-1}([0,4]) &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0,4]\} = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \in [0,4]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x^2 \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x-2)(x+2) \leq 0\} = [-2, 2]. \end{aligned}$$

Propriétés

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A_1, A_2 deux parties de E et B_1, B_2 sont deux parties de F. Alors on a :

1) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

4) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

5) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

6) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

7) $f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}$.

1.6 Exercices

Exercise 1.20 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A_1, A_2 deux parties de E. Montrer que :*

1) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

Solution.

1) Montrons que

$$A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2).$$

On suppose que $A_1 \subset A_2$ et on montre que $f(A_1) \subset f(A_2)$.

Soit $y \in f(A_1)$:

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) &\Longrightarrow \exists x \in A_1 : y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in A_2 : y = f(x) \ \ \textit{car } A_1 \subset A_2 \\ &\Longrightarrow y \in f(A_2). \end{aligned}$$

D'où $f(A_1) \subset f(A_2)$.

2) Montrons que

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\iff \exists x \in (A_1 \cup A_2) : y = f(x) \\ &\iff [\exists x \in A_1 \ \textit{ou} \ \exists x \in A_2] : y = f(x) \\ &\iff [\exists x \in A_1 : \ y = f(x)] \ \textit{ou} \ [\exists x \in A_2 : y = f(x)] \\ &\iff y \in f(A_1) \ \textit{ou} \ y \in f(A_2) \\ &\iff y \in (f(A_1) \cup f(A_2)). \end{aligned}$$

Alors,

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

3) Montrons que :

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cap A_2) &\implies \exists x \in (A_1 \cap A_2) : y = f(x) \\ &\implies [\exists x \in A_1 \ \textit{et} \ \exists x \in A_2] : y = f(x) \\ &\implies [\exists x \in A_1 : \ y = f(x)] \ \textit{et} \ [\exists x \in A_2 : y = f(x)] \\ &\implies y \in f(A_1) \ \textit{et} \ y \in f(A_2) \\ &\implies y \in (f(A_1) \cap f(A_2)). \end{aligned}$$

Alors,

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Supposons que f *est injective et montrons la deuxième inclusion.*

Soit $y \in (f(A_1) \cap f(A_2))$

$$\begin{aligned} y \in (f(A_1) \cap f(A_2)) &\implies y \in f(A_1) \ \textit{et} \ y \in f(A_2) \\ &\implies \begin{cases} \exists x_1 \in A_1 : \ y = f(x_1) \\ \textit{et} \\ \exists x_2 \in A_2 : y = f(x_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $y = f(x_1) = f(x_2)$ *et* f *est injective, ce qui implique que* $x_1 = x_2 = x$. *Donc* $x \in (A_1 \cap A_2)$ *et* $y = f(x)$, *c'est à dire* $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

Exercise 1.21 *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application. Soient* B_1, B_2 *sont deux parties de* F. *Montrer que :*

1) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. 2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

3) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f(B_1) \cap f(B_2)$ 4) $f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}$.

Solution.

1) Montrons que :

$$B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

On suppose que $B_1 \subset B_2$ *et on montre que* $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Soit $x \in f^{-1}(B_1)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1) &\Longrightarrow f(x) \in B_1 \\ &\Longrightarrow f(x) \in B_2 \text{ car } B_1 \subset B_2 \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Alors,

$$B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

2) Montrons que :

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Longleftrightarrow f(x) \in (B_1 \cup B_2) \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ ou } f(x) \in B_2 \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

3) Montrons que :

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in (B_1 \cap B_2) \\ &\iff f(x) \in B_1 et\, f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \;\; et\; x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in \left[f^{-1}(B_1) \;\; \cap \;\; f^{-1}(B_2)\right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f(B_1) \cap f(B_2).$$

4) Montrons que :

$$f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}.$$

Soit $x \in f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) &\Leftrightarrow f(x) \in C_F^{B_1} \\ &\Leftrightarrow f(x) \in F \;\; et\; f(x) \notin B_1 \\ &\Leftrightarrow x \in E \;\; et\; x \notin f^{-1}(B_1) \\ &\Leftrightarrow x \in C_E^{f^{-1}(B_1)}. \end{aligned}$$

Alors,

$$f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}.$$

Exercise 1.22 *On considère l'application*

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

1) Calculer $f^{-1}(\{2\})$ *et* $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$.

2) Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.

Solution.

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}. \end{array}$$

1) $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = ?$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) &\iff x \in [-1,1] \text{ et } f(x) = \frac{1}{2} \\ &\iff x \in [-1,1] \text{ et } \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \\ &\iff x \in [-1,1] \text{ et } x^2 - 1 = 0 \\ &\iff x \in [-1,1] \text{ et } x = \pm 1 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \{-1, 1\}$.

$f^{-1}(\{2\}) = ?$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\{2\}) &\iff x \in [-1,1] \text{ et } f(x) = 2 \\ &\iff x \in [-1,1] \text{ et } \frac{1}{1+x^2} = 2 \\ &\iff x \in [-1,1] \text{ et } x^2 = \frac{-1}{2} \text{ impossible.} \end{aligned}$$

D'où $\nexists x \in f^{-1}(\{2\}) \Longrightarrow f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$.

2) Injectivité de f?

De la première question, on a $f(1) = f(-1) = \dfrac{1}{2}$. *Donc* f *n'est pas injective.*

Surjectivité de f?

De la première question, $\nexists x \in [-1,1] : f(x) = 2$. *Donc* f *n'est pas surjective.*

Exercise 1.23 *Soit* f *l'application définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

1) Calculer $f(\{-1,1\})$ *et* $f^{-1}(\{-1\})$.

2) f *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

3) Donner des intervalles I *et* J, *tels que l'application* $f : I \longrightarrow J$ *soit bijective.*

4) Dans ce cas, déterminer son application réciproque f^{-1}.

Solution.

Soit f *l'application définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

1) Calculons $f(\{-1,1\})$ *et* $f^{-1}(\{-1\})$.

$$f(\{-1,1\}) = \{f(x)/x \in \{-1,1\}\} = \{f(-1), f(1)\} = \{\frac{1}{2}\}$$

donc, $f(\{-1,1\}) = \{\frac{1}{2}\}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-1\}) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{-1\}\} = \{x \in \mathbb{R}/f(x) = -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\frac{1}{1+x^2} = -1\} = \{x \in \mathbb{R}/x^2 = -2\} = \emptyset. \end{aligned}$$

donc, $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.

2) f *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

- *Injectivité de* f ***:***

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)?$$

On a : $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$, *mais* $1 \neq -1$

donc, f *n'est pas injective.*

- *Surjectivité de* f ***:***

$$(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x))?$$

On a : $y = -1$ *n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente).*

donc, f *n'est pas surjective.*

- *Bijectivité de* f ***:***

f *n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.*

3) Donnons des intervalles I *et* J, *tels que l'application* $f : I \longrightarrow J$ *soit bijective :*

Résolvons l'équation $y = f(x)$ où $y \in J$ et x à déterminer d'une manière unique dans I.
On a :

$$y = \frac{1}{1+x^2} \qquad \Leftrightarrow \quad yx^2 + y - 1 = 0.....(1)$$

$$\Delta = 4(y - y^2) \;\;\Rightarrow\;\; \Delta > 0 \Leftrightarrow y \in]0,1[$$

les racines de l'équation (1) *sont*

$$x_1 = \frac{-\sqrt{y(1-y)}}{y} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\sqrt{y(1-y)}}{y}$$

Donc, des intervalles I et J sont : $I =]0,+\infty[$ et $J =]0,1[$. Il est facile de vérifier que

$$f : I =]0,+\infty[\longrightarrow J =]0,1[$$

est une une application bijective.

Remarque *: on peut aussi considérer la bijection $f : I =]-\infty,0[\longrightarrow J =]0,1[$.*

4) Déterminons, dans ce cas, l'application réciproque f^{-1}.

L'application réciproque de la bijection $f :]-\infty,0[\longrightarrow]0,1[$ est la suivante :

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: &]0,1[& \longrightarrow &]-\infty,0[\\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \dfrac{-\sqrt{y(1-y)}}{y} \end{array}$$

Exercise 1.24 *On considère les deux applications suivantes :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 3 - 2x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{llll} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = x^2. \end{array}$$

1) f est-elle injective ? surjective ?

2) Calculer $f(\{-4,3\})$, $f(]1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,0[)$.

3) Déterminer l'application gof et calculer $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ et $(gof)^{-1}(\{-1\})$.

4) gof est-elle injective ? surjective ? bijective ?

5) Donner des intervalles I et J, tels que l'application $gof : I \longrightarrow J$ soit bijective. Déterminer, dans ce cas, l'application réciproque $(gof)^{-1}$.

Solution.

On considère les deux applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 3 - 2x \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = x^2. \end{array}$$

1) f est-elle injective ? surjective ?

Injectivité de f :

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)?$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:on suppose $f(x_1) = f(x_2)$ et on démontre $x_1 = x_2$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow 3 - 2x_1 = 3 - 2x_2 \\ &\Longrightarrow -2x_1 = -2x_2 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Alors

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Donc f est injective.

***Surjectivité de** f :*

$$(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x))?$$

Soit $y \in \mathbb{R}, \exists ? x \in \mathbb{R} : y = f(x)$.

On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Longrightarrow y = 3 - 2x \\ &\Longrightarrow x = \frac{3 - y}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{3 - y}{2} \in \mathbb{R} : f(x) = y.$$

D'où f est surjective, on conclut que f est bijective,

2) Calculons $f(\{-4, 3\})$, $f(]1, +\infty[)$ et $f^{-1}(] - \infty, 0[)$.

On a :

$$\begin{aligned} f(\{-4, 3\}) &= \{f(x)/x \in \{-4, 3\}\} \\ &= \{f(-4), f(3)\} = \{-3, 11\}. \end{aligned}$$

Alors,

$$f(\{-4,3\}) = \{-3,11\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(]1,\infty[) &= \{f(x)/x \in]1,\infty[\} \\ &=]-\infty,1[\text{ (} \textit{car } f \textit{ est décroissante}). \end{aligned}$$

Alors,

$$f(]1,\infty[) =]-\infty,1[.$$

On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,0[) &= \{x \in \mathbb{R}/ \ \ f(x) \in]-\infty,0[\} = \{x \in \mathbb{R}/ \ \ f(x) < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \ \ 3-2x < 0\} = \{x \in \mathbb{R}/ \ \ x > \frac{3}{2}\} =]\frac{3}{2},+\infty[\end{aligned}$$

Donc,

$$f^{-1}(]-\infty,0[) =]\frac{3}{2},+\infty[.$$

3) Déterminons l'application gof *et calculons* $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ *et* $(gof)^{-1}(\{-1\})$.

Déterminons l'application gof :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (gof)(x) &= g(f(x)) = (3-2x)^2 \\ &= 4x^2 - 12x + 9. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} gof : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (gof)(x) = 4x^2 - 12x + 9. \end{aligned}$$

Calculons $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ *et* $(gof)^{-1}(\{-1\})$:

$$\begin{aligned} (gof)(0) &= 4(0)^2 - 12 \times 0 + 9 \quad = 9. \\ (gof)(3) &= 4(3)^2 - 12 \times (3) + 9 = 9. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (gof)^{-1}(\{-1\}) &= \{x \in \mathbb{R}/(gof)(x) \in \{-1\}\} = \{x \in \mathbb{R}/(gof)(x) = -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/4x^2 - 12x + 9 = -1\} = \{x \in \mathbb{R}/2x^2 - 6x + 5 = 0\} \end{aligned}$$

On a : $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$, *donc l'équation n'admet pas de racine dans* $\mathbb{R}$.

Alors, $(gof)^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.

4) gof est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Injectivité de gof :

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : gof\,(x_1) = gof\,(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)?$$

On a : $(gof)(0) = (gof)(3) = 9$ *mais* $0 \neq 3$, *donc* gof *n'est pas injective car* $y = 9$ *admet deux antécédents (d'après la question précédente).*

Surjectivité de gof :

$$(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = gof\,(x))?$$

On a : $y = -1$ *n'a pas d'antécédents dans* $\mathbb{R}$ *(d'après la question précédente).*

Donc gof *n'est pas surjective.*

Bijectivité de gof :

gof *n'est pas bijective car elle n'est pas surjective (ou car elle n'est pas injective).*

Donnons des intervalles I *et* J, *tels que l'application* $gof : I \longrightarrow J$ *soit bijective : Résolvons l'équation* $y = (gof)(x)$ *où* $y \in J$ *et* x *à déterminer d'une manière unique dans* I.

On a :

$$y = 4x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - y = 0.....(1)$$

$$\Delta = 144 - 4 \times 4(9 - y) = 16y$$

$$\Delta \geq 0 \quad ssi \quad y \geq 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty[$$

les racines de l'équation (1) *sont :*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12 + \sqrt{16y}}{8} &= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} \\ &et \\ x_2 &= \frac{12 - \sqrt{16y}}{8} &= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2} \end{aligned}$$

Le tableau de variation

Il est facile de vérifier que $gof : I = [\frac{3}{2}, +\infty[\longrightarrow J = [0, +\infty[$ *est une bijection.*

Remarque *: on peut aussi considérer la bijection* $gof : I =]-\infty, \frac{3}{2}] \longrightarrow J = [0, +\infty[$.

Déterminons, dans ce cas, l'application réciproque $(gof)^{-1}$ *: L'application réciproque de la bijection* $gof : I = [\frac{3}{2}, +\infty[\longrightarrow J = [0, +\infty[$ *est la suivante :*

$$\begin{array}{rccl} (gof)^{-1}: & [0, +\infty[& \longrightarrow & [\frac{3}{2}, +\infty[\\ & y & \longmapsto & \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2}. \end{array}$$

Remarque *: L'application réciproque de la bijection* $gof : I =]-\infty, \frac{3}{2}] \longrightarrow J = [0, +\infty[$ *est*

$$\begin{array}{rccl} (gof)^{-1}: & [0, +\infty[& \longrightarrow &]-\infty, \frac{3}{2}] \\ & y & \longmapsto & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2}. \end{array}$$

Exercise 1.25 *Considérons l'application* f *définie par :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Corrigé de l'exercice

Considérons l'application f *définie par :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1) Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

Injectivité de f :

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)?$$

On a :

$$f(2) = \frac{2 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}.$$

et

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Donc f n'est pas injective car $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ mais $2 \neq \frac{1}{2}$.

***Surjectivité de** f :*

$$(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x))?$$

f n'est pas surjective car $y = 2$ (par exemple) n'a pas d'antécédent. En effet,

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\iff \frac{2x}{1+x^2} = 2 \\ &\iff 2x = 2\left(1+x^2\right) \\ &\iff x^2 - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

et l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet pas de solutions réelles.

Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ou bien car elle n'est pas surjective).

2) Montrons que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad f(\mathbb{R}) &= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : y = \frac{2x}{1+x^2}\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : yx^2 - 2x + y = 0\right\} \end{aligned}$$

$$\Delta = 4 - 4y^2 \quad \text{donc,} \quad \Delta \geq 0 \text{ si } y \in [-1, 1]$$

$$\text{Alors} \quad f(\mathbb{R}) = [-1, 1].$$

Exercise 1.26 *Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2 - x$.*

1) f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

2) Déterminer $f([-1, 2])$, $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}([0, 1])$.

3) Donner des intervalles I et J, tels que l'application $f : I \to J$, soit bijective. Puis déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Solution.

Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2 - x$

1) f est-elle injective ? *f n'est pas injective car $f(0) = 0 = f(1)$ mais $0 \neq 1$.*

*f **est-elle surjective ?***

f n'est pas surjective car si $y=-4$ on aura $x^2-x=-4 \Rightarrow x^2-x+4=0$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$ car $\triangle=-15<0$ c'est à dire $y=-4, \nexists x$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x)=-4$.

***2) Déterminons** $f([-1,2])$, $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}([0,1])$.*

$$f([-1,2]) = f\left(\left[-1,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},2\right]\right)$$

$$= \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(-1)\right]\cup\left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(2)\right] = \left[-\frac{1}{4},0\right]\cup\left[-\frac{1}{4},0\right] = \left[-\frac{1}{4},0\right]$$

car f décroissante sur $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ et f croissante sur $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$.

$f^{-1}([0,1]) = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right]\cup\left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ *car $f(x)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=1$ et $f(x)=1 \Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

(Utiliser le tableau de variation de l'application f)

3) Les intervalles** I **et** J**, tels que l'application** $f: I \to J$**, soit bijective.

On prends $I=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ et $J=\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$. L'application $f:\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\to \left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$, est bijective.

4) Déterminons l'application réciproque** f^{-1}**.

Soit $y\in\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$, on calcule x en fonction de y. On a : $y=x^2-x \Rightarrow x^2-x-y=0$, $\triangle=1+4y>0$, (car $y\in\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$). Donc, $x=\frac{1-\sqrt{1+4y}}{2}$. Alors, l'application réciproque f^{-1} est

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \left[-\frac{1}{4},+\infty\right[& \longrightarrow & \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\\ & y & \longmapsto & \frac{1-\sqrt{1+4y}}{2}. \end{array}$$

Chapitre 2

Nombres Complexes

2.1 Introduction

L'équation $x^2 + 3 = 0$ dans $\mathbb{R}$ n'admet pas de solution. Donc, il faut ici considérer l'ensemble plus large $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on a :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2.2 L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

2.2.1 Définition d'un nombre complexe

Définition 2.1 *Un nombre complexe est un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que l'on notera par $z = x + iy$ ou $i^2 = -1$. Cette écriture du nombre complexe z est unique et est appelée forme algébrique ou cartésienne de z, de plus*

$x \equiv \operatorname{Re} z$ *: est appelée la partie réelle de z.*

$y \equiv \operatorname{Im} z$ *: est appelée la partie imaginaire de z.*

On écrit aussi $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Si $y = 0$, alors $z = x$. Dans ce cas on dira que z est réel.

Si $x = 0$, alors $z = y$. Dans ce cas on dira que z est imaginaire pur.

Exemple 2.1 $z = 2 + 3i$, $z = -2i$, $z = 0$, $z = \sqrt{7} + \frac{3}{2}i$, $z = 9$ *sont des nombres complexes.*

2.2.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, alors on définit les opérations suivantes :

Addition :

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i\,(y + y')\,.$$

Multiplication :

$$z.z' = (x + iy)\,(x' + iy') = (xx' - yy') + i\,(xy' + x'y)\,.$$

On développe en suivant les règles de la multiplication usuelle avec la convention suivante : $i^2 = -1$.

Multiplication par un scalaire : $\lambda z = (\lambda x) + i\,(\lambda y)$ ou $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.2 *Soient* $z_1 = 3 + 2i$ *et* $z_2 = \frac{1}{2} + 4i$ *deux nombres complexes. On a :*

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + \left(\tfrac{1}{2} + 4i\right) = \tfrac{7}{2} + 6i$$

$$z_1 z_2 = (3 + 2i)\left(\tfrac{1}{2} + 4i\right) = -\tfrac{13}{2} + 13i$$

$$z_1^2 = (3 + 2i)^2 = 5 + 12i$$

Remarque :

- On dit que $z = z'$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

- Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nuls.

Définition 2.2 *(Conjugué d'un nombre complexe).*

Soit $z = x + iy$ *un nombre complexe avec* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*. On appelle conjugué de* z *et on note* $\overline{z}$ *le complexe* $\overline{z} = x - iy$*.*

Propriétés.

Soient z et z' deux nombres complexe, alors on a :

$$1)\quad \overline{\overline{z}} = z \qquad\qquad 4)\quad \overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$$

$$2)\quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad\qquad 5)\quad z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$$

$$3)\quad \overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'} \qquad\qquad 6)\quad z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}\,z$$

Exemple 2.3 *Soient* $z_1 = 1 + 2i$ *et* $z_2 = 4 - 3i$ *deux nombres complexes. On a :*
$\overline{z}_1 = \overline{(1 + 2i)} = 1 - 2i$, $\overline{z}_2 = \overline{(4 - 3i)} = 4 + 3i$

Exercise 2.4 *Donner la forme algébrique des complexes suivants :*

$$1)\quad z_1 = (4 - i)(2 + 3i) \qquad\qquad 3)\quad z_3 = \frac{1 + i}{3 + 2i}$$

$$2)\quad z_2 = (a + bi)^2 \ \text{ où } a, b \in \mathbb{R} \qquad\qquad 4)\quad z_4 = \frac{1 + 2i}{1 - i} + \frac{1 + i}{2 + 3i}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
z_1 &= (4-i)(2+3i) = 11+10i \\
z_2 &= (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \\
z_3 &= \frac{1+i}{3+2i} = \frac{(1+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{5}{13} + \frac{1}{13}i \\
z_4 &= \frac{1+2i}{1-i} + \frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \\
&= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) + \left(\frac{5}{13} - \frac{1}{13}i\right) = -\frac{3}{26} + \frac{37}{26}i
\end{aligned}$$

Définition 2.3 *(Module d'un nombre complexe)*

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

On appelle module de z et on note $|z|$ le nombre réel positif ou nul défini par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexe, alors on :

1) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

2) $|z| \geq 0$.

3) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

4) $|z.z'| = |z| \, . \, |z'|$.

5) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, avec $z \neq 0$.

6) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, avec $z' \neq 0$.

7) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

8) $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

Exemple 2.5 *Soient $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 2 - 3i$ deux nombres complexes. On* *a :*

$$|z_1| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

$$|z_2| = |2-3i| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|-1+2i|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$$

2.2.3 Le plan complexe

Soit le plan (P) muni du repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

A tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point $M(x, y)$ de coordonnées (x, y) . Par définition :

- Le point M est l'image de z.

- Le nombre z est l'affixe du point M.

D'après le théorème de Pythagore, on a $OM^2 = x^2 + y^2$ c'est a dire $OM = |z|$.

2.2.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 2.4 *Soit z un nombre complexe non nul.*

On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ toute mesure θ dans $[0, 2\pi]$ de l'angle $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$, et on écrit $\arg(z) = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$, (on écrit aussi $\arg(z) = \theta\,[\pi]$). et on a :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|}, \\ \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|}. \end{cases}$$

On appelle forme trigonométrique de z la représentation suivante :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \;\; ou \; r = |z| \;\; et \; \theta = \arg z$$

On note aussi la forme trigonométrique d'un complexe z par $z = [r, \theta]$.

Propriétés.

Soient $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ deux nombres complexes sous forme trigonométrique, alors on a :

1) $z = z'$ si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta'$.

2) $z.z' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$.

3) $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), n \in \mathbb{N}$. (formule de Moivre).

4) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ avec $z \neq 0$.

5) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta'))$ avec $z' \neq 0$.

Notation exponentielle

Pour tout réel θ, nous définissons la notation exponentielle par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Donc tout nombre complexe s'écrit sous la forme exponentielle suivante : $z = re^{i\theta}$.

Exercise 2.6 *I) Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle des complexes suivants :*

1) $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$	3) $z_3 = z_1 z_2$
2) $z_2 = 1 - i$	4) $z_4 = \dfrac{z_1^4}{z_2}$

II) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022} \quad et \quad B = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2024}.$$

III) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équations suivantes :

1) $z - 2(2+i)\overline{z} + 6 + 8i = 0$

2) $iz^2 - 2\overline{z} - i = 0$

Solution.

I) Donnons la forme trigonométrique et la forme exponentielle des complexes suivants :

1) On a : $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$, *donc* $|z_1| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$
Soit $\theta_1 \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* z_1, *donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{x_1}{|z_1|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}, \\ \\ \sin\theta_1 = \dfrac{y_1}{|z_1|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

D'où $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \text{ est la forme trigonométrique de } z_1.$$

et

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ est la forme exponentielle de } z_1.$$

2) On a : $z_2 = 1 - i$, *donc* $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
Soit $\theta_2 \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* z_2, *donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{x_2}{|z_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \\ \sin\theta_2 = \dfrac{y_2}{|z_2|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

On obtient : $\theta_2 = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) \text{ est la forme trigonométrique de } z_2.$$

et

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}} \text{ est la forme exponentielle de } z_2.$$

3) On a :

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 z_2 \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \text{ est la forme trigonométriques de } z_3. \end{aligned}$$

et $z_3 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ *est la forme exponentielle de* z_3.

4) On a :

$$z_4 = \frac{z_1^4}{z_2} = \frac{\left(4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^4}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{4^4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)} = \frac{256}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= = \frac{256}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$ *est la forme trigonométriques de* z_4.

et $z_4 = \frac{256}{\sqrt{2}} e^{i\frac{19\pi}{12}}$ *est la forme exponentielle de* z_4.

II) Calculons la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe suivant :

$$A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022}.$$

On a :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

Donc,

$$\begin{aligned}
A=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022} &= \left(4\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right)^{2022}\\
&= 4^{2022}\left(\cos\frac{7\left(2022\right)\pi}{12}+i\sin\frac{7\left(2022\right)\pi}{12}\right)\\
&= 4^{2022}\left(\cos\left(1178\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(1178\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\right)\\
&= 4^{2022}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=-4^{2022}i.
\end{aligned}$$

On obtient : $A=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022}=-4^{2022}i$ *est la forme algébrique de* A.

On conclut que la partie réelle de A *est nulle et que la partie imaginaire de* A *est* -4^{2022}.

Calculons la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe suivant :

$$B=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2024}$$

On a :

$$\begin{aligned}
B=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2024} &= \left(4\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right)^{2024}\\
&= 4^{2024}\left(\cos\left(\frac{7\left(2024\right)\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\left(2024\right)\pi}{12}\right)\right)\\
&= 4^{2024}\left(\cos\left(1180\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(1180\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\
&= 4^{2024}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\
&= 4^{2024}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{4^{2023}}{2}+i\frac{4^{2024}\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

On obtient : $B=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2024}=-\frac{4^{2024}}{2}+i\frac{4^{2024}\sqrt{3}}{2}$ *est la forme algébrique de* B.

On conclut que la partie réelle de B est $-\dfrac{4^{2024}}{2}$ *et que la partie imaginaire de A est* $\dfrac{4^{2024}\sqrt{3}}{2}$.

III) Résolvons dans $\mathbb{C}$ *l'équations suivantes :*

1) Résolvons l'équation :

$$z - 2\left(2+i\right)\overline{z} + 6 + 8i = 0.$$

On pose $z = x + iy$ *donc* $\overline{z} = x - iy$

$$\begin{aligned} z - 2\left(2+i\right)\overline{z} + 6 + 8i = 0 &\Leftrightarrow \left(x+iy\right) - 2\left(2+i\right)\left(x-iy\right) + 6 + 8i = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(-3x - 2y + 6\right) + \left(8 - 2x + 5y\right)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 2y + 6 = 0 ......(1) \\ -2x + 5y + 8 = 0 ......(2) \end{cases} \end{aligned}$$

de (1) *on a :* $x = -\dfrac{2}{3}y + 2$, *on remplace dans* (2) *on obtient :*

$$-2\left(-\frac{2}{3}y + 2\right) + 5y + 8 = 0 \Rightarrow \frac{19}{3}y + 4 = 0,$$

donc, $y = -\dfrac{12}{19}$ *d'où* $x = -\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{12}{19}\right) + 2 = \dfrac{46}{19}$.

Alors, la solution de l'équation est $z = \dfrac{46}{19} - \dfrac{12}{19}i$.

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :*

$$iz^2 - 2\overline{z} - i = 0.$$

On pose $z = x + iy$ *donc* $\overline{z} = x - iy$

On a :

$$\begin{aligned}
iz^2 - 2\overline{z} - i = 0 \quad &\Rightarrow \quad i\,(x+iy)^2 - 2\,(x-iy) - i = 0 \\
&\Rightarrow \quad i\,(x^2 - y^2 + 2xyi) - 2\,(x-iy) - i = 0 \\
&\Rightarrow \quad x^2 i - y^2 i - 2xy - 2x + 2yi - i = 0 \\
&\Rightarrow \quad (-2xy - 2x) + i\,(x^2 - y^2 + 2y - 1) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} -2xy - 2x = 0.............(1) \\ \\ x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0.......(2) \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} x\,(y+1) = 0.............(1) \\ \\ x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0.......(2) \end{cases}
\end{aligned}$$

de l'équation (1) *on a :* $x = 0$ *ou* $y = -1$
en remplace dans l'équation (2) *on obtient :*
Si $x = 0$, *on aura*

$$\begin{aligned}
-y^2 + 2y - 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad y^2 - 2y + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad (y-1)^2 = 0
\end{aligned}$$

donc, $y = 1$.
Si $y = -1$, *on aura* $x^2 - 1 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$, *donc* $x = 2$ *ou* $x = -2$
Alors, la solution de l'équation est $z_1 = i$, $z_2 = 2 - i$ *et* $z_3 = -2 - i$

2.3 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

2.3.1 Equations du second degré à coefficients réels

Proposition 2.1 *L'équation du second degré*

$$az^2 + bz + c = 0..........(E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ *et* $a \neq 0$, *possède deux racines* z_1 *et* z_2.

Soit $\triangle = b^2 - 4ac$ *le discriminant.*

Si $\triangle > 0$, *alors l'équation* (E) *possède deux racines réelles sont*

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} \qquad et \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}.$$

Si $\triangle < 0$, *alors l'équation* (E) *possède deux racines complexes conjugués sont*

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\triangle}}{2a} \qquad et \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\triangle}}{2a}.$$

Et si $\triangle = 0$ *alors* (E) *possède une solution réelle double* $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

Exercise 2.7 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

1) $z^2 - 5z + 6 = 0$, 2) $z^2 - 2z + 5 = 0$, 3) $z^2 - 2z + 1 = 0$

Solution.

1) Résolvons l'équation : $z^2 - 5z + 6 = 0.....(1)$

On a : $\triangle = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1 > 0$, *alors l'équation* (1) *possède deux racines réelles sont*

$$z_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad et \qquad z_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

2) Résolvons l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0.....(2)$

On a : $\triangle = (-2)^2 - 4(1)(5) = -16 = (4i)^2$, *alors l'équation* (E) *possède deux racines complexes conjugués sont*

$$z_1 = \frac{-(-2) - 4i}{2(1)} = 1 - 2i \qquad et \qquad z_2 = \frac{-(-2) + 4i}{2(1)} = 1 + 2i.$$

3)Résolvons l'équation : $\frac{1}{8}z^2 - z + 2 = 0.....(3)$

On a : $\triangle = (-1)^2 - 4\left(\frac{1}{8}\right)(2) = 0$, *alors* (3) *possède une solution réelle double* $z_1 = z_2 = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{8}\right)} = 4$.

2.4 Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe

2.4.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Soit $Z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle racines carrées de Z, les solutions z dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 = Z$.

Méthode de résolution algébrique de $z^2 = Z$.

Posons $Z = a + ib$ et désignons par $x + iy$ une des racines carrées de Z. On a :

$$\begin{aligned} z^2 = Z &\iff (x+iy)^2 = a + ib \\ &\iff (x^2 - y^2) + i(2xy) = a + ib \end{aligned}$$

D'où

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & \ldots\ldots \quad (1) \\ 2xy = b & \ldots\ldots \quad (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & \ldots\ldots \quad (3) \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne les racines carrées z de Z.

Méthode de résolution trigonométrique de $z^2 = Z$.

Soit $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un complexe. Le nombre complexe $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ est la racine de $z^2 = Z$, on a :

$$z^2 = Z \Leftrightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$$

d'où

$$\begin{cases} \rho^2 = r \\ \\ 2\alpha = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \\ \alpha = \dfrac{\theta}{2} + k\pi / k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation $z^2 = Z$ sont :

$$z_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right).$$

Exemple 2.8 *Déterminer les racines carrées de $-3 + 4i$, par la méthode de résolution algébrique.*

Désignons par $x + iy$ une des racines carrées de Z. On a :

$$\begin{aligned} z^2 = -3 + 4i &\iff (x+iy)^2 = -3 + 4i, \\ &\iff (x^2 - y^2) + i(2xy) = -3 + 4i, \end{aligned}$$

d'où

$$z^2 = Z \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & ...... \quad (1) \\ 2xy = 4 & ...... \quad (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & ...... \quad (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2x^2 = 2$ *où* $x = 1$ *ou* $x = -1$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{aligned} &\text{Si} \quad x = 1 \text{ on obtient } \quad y = \frac{2}{x} = \frac{2}{1} = 2 \\ &\text{Si} \quad x = -1 \text{ on obtient } \quad y = \frac{2}{x} = \frac{2}{-1} = -2 \end{aligned}$$

Alors, les racines carrées de $-3 + 4i$ *sont :*

$$z_1 = 1 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - 2i.$$

Exemple 2.9 *Déterminer les racines carrées de* $Z = -1 + \sqrt{3}i$, *par la méthode de résolution trigonométrique.*

On écrit d'abord Z *sous la forme trigonométrique.*

$|Z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, *soit* $\theta \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* Z, *donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{-1}{2}, \\ \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \quad D'où \;\; \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}.$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \text{ est la forme trigonométriques de } Z.$$

Le nombre complexe $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *est la racine de* $z^2 = Z$, *on a :*

$$z^2 = Z \Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$$

d'où

$$\begin{cases} \rho^2 = 2 \\ \\ 2\alpha = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \\ \alpha = \dfrac{\pi}{3} + k\pi/k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Alors, les racines carrées de $-1 + \sqrt{3}i$ *sont :*

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad et \quad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

2.4.2 Equations du second degré à coefficients complexes

Proposition 2.2 *L'équation du second degré*

$$az^2 + bz + c = 0 \ldots\ldots\ldots (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ *et* $a \neq 0$, *possède deux solutions* z_1 *et* z_2 *dans* $\mathbb{C}$.

Soit $\triangle = b^2 - 4ac$ *le discriminant et* δ *une racine carrée de* $\triangle$. *Alors les solutions sont*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \qquad et \qquad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$

Et si $\triangle = 0$ *alors* (E) *possède une solution double* $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

Exercise 2.10 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :*

$$z^2 - (3+4i)\, z - (1-5i) = 0 \tag{2.1}$$

Solution.

Le discriminant vaut

$$\triangle = (3+4i)^2 + 4\,(1)\,(1-5i) = -3+4i$$

Soit $\delta = a + ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$. *On a :*

$$\begin{aligned} \delta^2 = -3+4i &\iff (a+ib)^2 = -3+4i \\ &\iff (a^2-b^2) + i\,(2ab) = -3+4i \end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -3+4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 & \ldots\ldots \ (1) \\ 2ab = 4 & \ldots\ldots \ (2) \\ a^2 + b^2 = 5 & \ldots\ldots \ (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 2$ *où* $a = 1$ *ou* $a = -1$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{array}{l} Si \quad a = 1 \text{ on obtient } \quad b = \dfrac{2}{a} = \dfrac{2}{1} = 2 \\ Si \quad a = -1 \text{ on obtient } \quad b = \dfrac{2}{a} = \dfrac{2}{-1} = -2 \end{array}$$

Donc, $\delta = 1 + 2i$ *ou* $\delta = -1 - 2i$, *alors l'équation* (2.1) *possède deux racines complexes sont*

$$z_1 = \frac{(3+4i) + (1+2i)}{2\,(1)} = 2 + 3i$$

et

$$z_2 = \frac{(3+4i) - (1+2i)}{2\,(1)} = 1 + i$$

2.4.3 Racines n^{ièmes} d'un nombre complexe

Soit $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un complexe. On appelle racines n^{ièmes} de Z, les solutions z dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^n = Z$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$.

Posons $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ est la racine de $z^n = Z$, on a :

$$z^n = Z \Leftrightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

d'où

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ \\ n\alpha = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \\ \alpha = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} / 0 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation $z^n = Z$ sont :

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) / 0 \leq k \leq n-1.$$

2.4.4 Racines $n^{ièmes}$ de l'unité

Les racines $n^{ièmes}$ de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$. Les solutions de cette équation sont : z_0, z_1, ..., z_{n-1} où

$$z_k = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) / 0 \leq k \leq n-1.$$

Exemple 2.11 *Trouver les racines cubiques de $Z = 1$, et vérifier que la sommes de ces racines et nul.*

On écrit d'abord Z sous la forme trigonométriques.

On a :

$$|Z| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = 1$$

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ l'argument de 1, donc :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|Z|} = \dfrac{1}{1} = 1, \\ \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|Z|} = \dfrac{0}{1} = 0. \end{cases}$$

On obtient : $\theta = 0 + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$. *on écrit aussi :* $2k\pi/k \in \mathbb{Z}$.

$$z = 1(\cos 0 + i \sin 0) \text{ est la forme trigonométriques de } 1.$$

Cherchons $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *tel que* $z^3 = 1$, *d'où*

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ \\ 3\alpha = 2k\pi/k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \\ \alpha = \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\}. \end{cases}$$

Cas $k = 0$, *on aura :* $\alpha = 0$ *donc :*

$$z_0 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1.$$

Cas $k = 1$, *on aura :* $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ *donc :*

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \equiv j.$$

Cas $k = 2$, *on aura :* $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$ *donc :*

$$z_2 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = e^{\frac{4\pi i}{3}} \equiv j^2.$$

Conclusion : les racines cubiques de 1 *sont :* 1, j *et* j^2
Vérifions que :$1 + j + j^2 = 0$
On a :

$$1 + j + j^2 = j^3 + j + j^2 = j(1 + j + j^2), \text{ car } j^3 = 1$$

donc,

$$(j-1)(1 + j + j^2) = 0, \text{ d'où } 1 + j + j^2 = 0 \text{ car } j \neq 1$$

Exemple 2.12 *Trouver les 5-racines de* $Z = 16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i$.
On écrit d'abord Z *sous la forme trigonométriques.*
On a :

$$|Z| = \sqrt{\left(16\sqrt{2}\right)^2 + \left(16\sqrt{2}\right)^2} = 32$$

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* Z*, donc :*

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|Z|} = \dfrac{16\sqrt{2}}{32} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|Z|} = \dfrac{-16\sqrt{2}}{32} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

On obtient : $\theta = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$*. on écrit aussi :* $\theta = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$*.*

$$z = 32\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \text{ est la forme trigonométriques de } Z.$$

Cherchons $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *tel que* $z^5 = Z$*, d'où*

$$\begin{cases} \rho^5 = 32 \\ \\ 5\alpha = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[5]{32} = 2 \\ \\ \alpha = \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

Cas $k = 0$*, on aura :* $\alpha = \dfrac{7\pi}{20}$ *donc :*

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right).$$

Cas $k = 1$*, on aura :* $\alpha = \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{4}$ *donc :*

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Cas $k = 2$*, on aura :* $\alpha = \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{2(2)\pi}{5} = \dfrac{23\pi}{20}$ *donc :*

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right).$$

Cas $k = 3$*, on aura :* $\alpha = \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{2(3)\pi}{5} = \dfrac{31\pi}{20}$ *donc :*

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right).$$

Cas $k = 4$*, on aura :* $\alpha = \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{2(4)\pi}{5} = \dfrac{39\pi}{20}$ *donc :*

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{39\pi}{20} + i\sin\frac{39\pi}{20}\right).$$

Conclusion : L'ensemble solutions de l'équation $z^5 = Z$ *est :*

$$\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}.$$

2.5 Exercices

Exercise 2.13 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

1) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0.$

2) $z^2 - \left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 1 + i\sqrt{3} = 0.$

3) $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2i(\sin\alpha)e^{i\alpha} = 0,$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}.$

4) $z^4 - (15 + 30i)z^2 - 88 + 234i = 0$ *cette équation est dite bicarrée.*

5) $2z^3 - (1-i)z^2 + (1+i)z + 2i = 0,$ *sachant qu'elle à une racine imaginaire pur.*

Solution.
1) Résolvons l'équation

$$z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\triangle = 4(2+i)^2 - 4(1)(6+8i) = -12 - 16i$$

Soit $\delta = a + ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$*. On a :*

$$\begin{aligned} \delta^2 = -12 - 16i &\iff (a+ib)^2 = -12 - 16i \\ &\iff (a^2 - b^2) + i(2ab) = -12 - 16i \end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -3 + 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -12 & \ldots\ldots \quad (1) \\ 2ab = -16 & \ldots\ldots \quad (2) \\ a^2 + b^2 = 20 & \ldots\ldots \quad (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 8$ *où* $a = 2$ *ou* $a = -2$*, de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{aligned} &Si \quad a = 2 \text{ on obtient } \quad b = \frac{-8}{a} = \frac{-8}{2} = -4 \\ &Si \quad a = -2 \text{ on obtient } \quad b = \frac{-8}{a} = \frac{-8}{-2} = 4 \end{aligned}$$

Donc, $\delta = 2-4i$ *ou* $\delta = -2+4i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$z_1 = \frac{2(2+i)+(2-4i)}{2(1)} = 3-i$$

et

$$z_2 = \frac{2(2+i)-(2-4i)}{2(1)} = 1+3i$$

2) Résolvons l'équation suivante :

$$z^2 - \left(1+i\sqrt{3}\right)z - 1 + i\sqrt{3} = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\triangle = \left(1+i\sqrt{3}\right)^2 - 4(1)\left(-1+i\sqrt{3}\right) = 2-2i\sqrt{3}$$

Soit $\delta = a+ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$. *On a :*

$$\begin{aligned} \delta^2 = 2-2i\sqrt{3} &\iff (a+ib)^2 = 2-2i\sqrt{3} \\ &\iff (a^2-b^2)+i(2ab) = 2-2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -3+4i \iff \begin{cases} a^2-b^2 = 2 & \ldots\ldots \ (1) \\ 2ab = -2\sqrt{3} & \ldots\ldots \ (2) \\ a^2+b^2 = 4 & \ldots\ldots \ (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 6$ *où* $a = \sqrt{3}$ *ou* $a = -\sqrt{3}$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{aligned} &\text{Si} \quad a = \sqrt{3} \text{ on obtient} \quad b = \frac{-\sqrt{3}}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1 \\ &\text{Si} \quad a = -\sqrt{3} \text{ on obtient} \quad b = \frac{-8}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 1 \end{aligned}$$

Donc, $\delta = \sqrt{3}-i$ *ou* $\delta = -\sqrt{3}+i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$z_1 = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-i\right)}{2(1)} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

et

$$z_2 = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-i\right)}{2(1)} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

3) Résolvons l'équation suivante :

$$z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2i(\sin\alpha)e^{i\alpha} = 0, \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le discriminant vaut

$$\begin{aligned}
\triangle &= \left(2e^{i\alpha}\right)^2 - 4\,(1)\,(2i\,(\sin\alpha)\,e^{i\alpha}) \\
&= 4\,(e^{i\alpha} - 2i\sin\alpha)\,e^{i\alpha} = 4\,(e^{i\alpha} - 2i\sin\alpha)\,e^{i\alpha} \\
&= 4\,(\cos\alpha + i\sin\alpha - 2i\sin\alpha)\,e^{i\alpha} = 4\,(\cos\alpha - i\sin\alpha)\,e^{i\alpha} \\
&= 4\,(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))\,e^{i\alpha} = 4e^{-i\alpha}e^{i\alpha} = 4 = (2)^2\,.
\end{aligned}$$

Alors l'équation possède deux racines complexes sont :

$$z_1 = \frac{2e^{i\alpha}+2}{2\,(1)} = 1 + e^{i\alpha} \qquad et \qquad z_2 = \frac{2e^{i\alpha}-2}{2\,(1)} = -1 + e^{i\alpha}.$$

4) Résolvons l'équation suivante :

$$z^4 - (15+30i)\,z^2 - 88 + 234i = 0.$$

cette équation est dite bicarrée.

On pose d'abord $W = z^2$, donc l'équation bicarrée devient :

$$W^2 - (15+30i)\,W - 88 + 234i = 0$$

Le discriminant vaut

$$\triangle = (15+30i)^2 - 4\,(1)\,(-88+234i) = -323 - 36i$$

Soit $\delta = a + ib$ une des racines carrées de $\triangle$. On a :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = -323 - 36i &\iff (a+ib)^2 = -323 - 36i \\
&\iff (a^2 - b^2) + i\,(2ab) = -323 - 36i
\end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -323 - 36i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -323 & \ldots\ldots \quad (1) \\ 2ab = -36 & \ldots\ldots \quad (2) \\ a^2 + b^2 = 325 & \ldots\ldots \quad (3) \end{cases}$$

De (1) et (3) on a : $2a^2 = 2$ où $a = 1$ ou $a = -1$, de l'équation (2) on aura :

$$\begin{aligned}
&Si \quad a = 1 \text{ on obtient } \quad b = \frac{-18}{a} = \frac{-18}{1} = -18 \\
&Si \quad a = -1 \text{ on obtient } \quad b = \frac{-18}{a} = \frac{-18}{-1} = 18
\end{aligned}$$

Donc, $\delta = 1 - 18i$ *ou* $\delta = -1 + 18i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{(15+30i)+(1-18i)}{2(1)} = 8+6i \\ &\textit{et} \\ W_2 &= \frac{(15+30i)-(1-18i)}{2(1)} = 7+24i \end{aligned}$$

Mais on a : $W = z^2$.

Cas 1 : $W = 8 + 6i = z^2$, *on pose* $z = x + iy$ *une des racines carrées de* $\triangle$. *On a :*

$$\begin{aligned} z^2 = 8+6i &\iff (x+iy)^2 = 8+6i \\ &\iff (x^2-y^2) + i(2xy) = 8+6i \end{aligned}$$

D'où

$$z^2 = 8+6i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 & \ldots\ldots \ (1) \\ 2xy = 6 & \ldots\ldots \ (2) \\ x^2 + y^2 = 10 & \ldots\ldots \ (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2x^2 = 18$ *où* $x_1 = 3$ *ou* $x_2 = -3$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{aligned} &\textit{Si} \quad x_1 = 3 \ \textit{on obtient} \quad y_1 = \frac{3}{x_1} = \frac{3}{3} = 1 \\ &\textit{Si} \quad x_2 = -3 \ \textit{on obtient} \quad y_2 = \frac{3}{x_2} = \frac{3}{-3} = -1 \end{aligned}$$

Donc on aura

$$z_1 = 3 + i \qquad \textit{et} \quad z_2 = -3 - i$$

Cas 2 : $W = 7 + 24i = z^2$, *on pose* $z = x + iy$ *une des racines carrées de* $\triangle$. *On a :*

$$\begin{aligned} z^2 = 7+24i &\iff (x+iy)^2 = 7+24i \\ &\iff (x^2-y^2) + i(2xy) = 7+24i \end{aligned}$$

D'où

$$z^2 = 7+24i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 & \ldots\ldots \ (1) \\ 2xy = 24 & \ldots\ldots \ (2) \\ x^2 + y^2 = 25 & \ldots\ldots \ (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2x^2 = 32$ *où* $= 4$ *ou* $x_4 = -4$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{aligned} &\textit{Si} \quad x_3 = 4 \ \textit{on obtient} \quad y_3 = \frac{12}{x_3} = \frac{12}{4} = 3 \\ &\textit{Si} \quad x_4 = -4 \ \textit{on obtient} \quad y_4 = \frac{12}{x_4} = \frac{12}{-4} = -3 \end{aligned}$$

Donc on aura

$$z_3 = 4 + 3i \qquad et \quad z_4 = -4 - 3i$$

Alors les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = 3 + i \quad , \quad z_2 = -3 - i \quad , \quad z_3 = 4 + 3i \qquad et \quad z_4 = -4 - 3i$$

5) Résolvons l'équation

$$2z^3 - (1-i)\,z^2 + (1+i)\,z + 2i = 0.$$

Sachant qu'elle à une racine imaginaire pur.

Soit $z_0 = \lambda i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *la racine imaginaire pur de l'équation, donc on aura :*

$$\begin{aligned} 2z_0^3 - (1-i)\,z_0^2 + (1+i)\,z_0 + 2i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2i\lambda^3 + (1-i)\,\lambda^2 + (-1+i)\,\lambda + 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\lambda^2 - \lambda\right) + \left(-2\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 2\right) i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda^2 - \lambda = \lambda\,(\lambda - 1) = 0 \ldots\ldots\, (1) \\ \\ -2\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \ldots\ldots\, (2) \end{cases} \end{aligned}$$

de (1) *on a :*$\lambda = 0$ *où* $\lambda = 1$. *Remplaçons* $\lambda = 0$ *dans l'équation* (2) *on obtient* $2 = 0$, *donc* $\lambda = 0$ *est rejeté.*

Remplaçons $\lambda = 1$ *dans l'équation* (2) *on obtient* $0 = 0$.

Donc $z_0 = i$ *est la racine imaginaire pur.*

Cherchons a, b *et* c *de* $\mathbb{C}$ *tel que :*

$$2z^3 - (1-i)\,z^2 + (1+i)\,z + 2i = (z - i)\left(az^2 + bz + c\right)$$

On a :

$$\begin{aligned} 2z^3 - (1-i)\,z^2 + (1+i)\,z + 2i &= (z-i)\,(az^2 + bz + c) \\ &= az^3 + bz^2 + cz - aiz^2 - ibz - ic \\ &= az^3 + (b - ai)\,z^2 + (c - ib)\,z - ic \end{aligned}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - ai = -1 + i \\ c - ib = 1 + i \\ -ic = 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - ai = -1 + i \\ c - ib = 1 + i \\ c = -2 \end{cases} \quad d'où \ \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 + 3i \\ c = -2 \end{cases}$$

donc l'équation devient :

$$(z-i)\left(2z^2+(-1+3i)\,z-2\right)=0$$

Résolvons l'équation

$$2z^2+(-1+3i)\,z-2=0.$$

Le discriminant vaut

$$\triangle=(-1+3i)^2-4\,(2)\,(-2)=8-6i$$

Soit $\delta=a+ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$*. On a :*

$$\begin{aligned}\delta^2=8-6i &\iff (a+ib)^2=8-6i\\ &\iff \left(a^2-b^2\right)+i\,(2ab)=8-6i\end{aligned}$$

D'où,

$$\delta^2=-3+4i\iff\begin{cases}a^2-b^2=8 & \ldots\ldots\ (1)\\ 2ab=-6 & \ldots\ldots\ (2)\\ a^2+b^2=10 & \ldots\ldots\ (3)\end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2=18$ *où* $a=3$ *ou* $a=-3$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{aligned}&\text{Si}\quad a=3 \text{ on obtient}\quad b=\frac{-3}{a}=\frac{-3}{3}=-1\\ &\text{Si}\quad a=-3 \text{ on obtient}\quad b=\frac{-3}{a}=\frac{-3}{-3}=1\end{aligned}$$

Donc, $\delta=3-i$ *ou* $\delta=-3+i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$z_1=\frac{-(-1+3i)+(3-i)}{2\,(2)}=1-i\qquad et\ \ z_2=\frac{-(-1+3i)-(3-i)}{2\,(2)}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

Alors les solutions de l'équation sont :

$$z_0=i\quad,\quad z_1=1-i\qquad et\quad z_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

Exercise 2.14 *Soit* $z\in\mathbb{C}$, *on pose :*

$$P\,(z)=z^4+2z^3+2z^2-2z+1.$$

1) Déterminer les réels a *et* b *tel que :*

$$\forall z\in\mathbb{C}^*:P\,(z)=z^2\left(\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+a\left(z-\frac{1}{z}\right)+b\right).$$

2) Résoudre l'équation $U^2 + aU + b = 0$, puis l'équation $P(z) = 0$.
Solution : *Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1.$$

1) Déterminons les réels a et b tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^* : P(z) = z^2 \left(\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right).$$

On a :

$$\begin{aligned}
P(z) &= z^2 \left(\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right) \\
&= z^2 \left(\left(z^2 + \frac{1}{z^2} - 2 \right) + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right) \\
&= z^4 - 2z^2 + 1 + az^3 - az + bz^2 \\
&= z^4 + az^3 + (b-2) z^2 - az + 1
\end{aligned}$$

Par identification on obtient :$z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2 = 2 \\ -a = -2 \end{cases} \text{donc,} \begin{cases} a = 2 \\ \\ b = 4 \end{cases}$$

Alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}^* : P(z) = z^2 \left(\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + 2 \left(z - \frac{1}{z} \right) + 4 \right).$$

2) Résolvons l'équation : $U^2 + 2U + 4 = 0$.
Le discriminant vaut

$$\triangle = (2)^2 - 4(1)(4) = -12 = \left(2\sqrt{3}i \right)^2,$$

alors l'équation possède deux racines complexes sont

$$U_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{2(1)} = -1 + \sqrt{3}i \quad et \quad U_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{2(1)} = -1 - \sqrt{3}i.$$

Résolvons l'équation $P(z) = 0$

$$P(z) = z^2 \left(\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + 2 \left(z - \frac{1}{z} \right) + 4 \right) = 0.$$

On a :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \ \textit{(rejeté car } z \in \mathbb{C}^*) \\ \\ \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + 2 \left(z - \frac{1}{z} \right) + 4 = 0 \end{cases}$$

On pose $U = z - \frac{1}{z}$, *donc l'équation* $\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + 2 \left(z - \frac{1}{z} \right) + 4 = 0$ *devient* $U^2 + 2U + 4 = 0$,

les racines de cette dernière équation sont $U_1 = -1 + \sqrt{3}i$ *et* $U_2 = -1 - \sqrt{3}i$

Cas 1 : $U_1 = -1 + \sqrt{3}i = z - \frac{1}{z}$, *on aura*

$$z - \frac{1}{z} = -1 + \sqrt{3}i \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 1 = \left(-1 + \sqrt{3}i \right) z$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + \left(1 - \sqrt{3}i \right) z - 1 = 0$$

Le discriminant vaut

$$\triangle = \left(1 - \sqrt{3}i \right)^2 - 4(1)(-1) = 2 - 2i\sqrt{3}$$

Soit $\delta = a + ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$. *On a :*

$$\begin{aligned} \delta^2 = 2 - 2i\sqrt{3} &\iff (a + ib)^2 = 2 - 2i\sqrt{3} \\ &\iff \left(a^2 - b^2\right) + i(2ab) = 2 - 2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -3 + 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 & \ldots\ldots \ (1) \\ 2ab = -2\sqrt{3} & \ldots\ldots \ (2) \\ a^2 + b^2 = 4 & \ldots\ldots \ (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 6$ *où* $a = \sqrt{3}$ *ou* $a = -\sqrt{3}$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\textit{Si} \quad a = \sqrt{3} \textit{ on obtient} \quad b = \frac{-\sqrt{3}}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1$$

$$\textit{Si} \quad a = -\sqrt{3} \textit{ on obtient} \quad b = \frac{-\sqrt{3}}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 1$$

Donc, $\delta = \sqrt{3} - i$ *ou* $\delta = -\sqrt{3} + i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$z_1 = \frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)+\left(\sqrt{3}-i\right)}{2\,(1)} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$$

et

$$z_2 = \frac{-\left(1-\sqrt{3}i\right)-\left(\sqrt{3}-i\right)}{2\,(1)} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

Cas 2 : $U_2 = -1 - \sqrt{3}i = z - \frac{1}{z}$, *on aura*

$$z - \frac{1}{z} = -1 - \sqrt{3}i \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 1 = -\left(1+\sqrt{3}i\right) z$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + \left(1+\sqrt{3}i\right) z - 1 = 0$$

Le discriminant vaut

$$\triangle = \left(1+\sqrt{3}i\right)^2 - 4\,(1)\,(-1) = 2 + 2i\sqrt{3}$$

Soit $\delta = a + ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$. *On a :*

$$\begin{aligned} \delta^2 = 2 + 2i\sqrt{3} &\iff (a+ib)^2 = 2 + 2i\sqrt{3} \\ &\iff (a^2 - b^2) + i\,(2ab) = 2 + 2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -3 + 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 & \ldots\ldots \quad (1) \\ 2ab = 2\sqrt{3} & \ldots\ldots \quad (2) \\ a^2 + b^2 = 4 & \ldots\ldots \quad (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 6$ *où* $a = \sqrt{3}$ *ou* $a = -\sqrt{3}$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\text{Si} \quad a = \sqrt{3} \text{ on obtient } \quad b = \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\text{Si} \quad a = -\sqrt{3} \text{ on obtient } \quad b = \frac{-\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -1$$

Donc, $\delta = \sqrt{3} + i$ *ou* $\delta = -\sqrt{3} - i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$z_3 = \frac{-\left(1+\sqrt{3}i\right)+\left(\sqrt{3}+i\right)}{2\,(1)} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

et

$$z_4 = \frac{-\left(1+\sqrt{3}i\right)-\left(\sqrt{3}+i\right)}{2\,(1)} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$$

Alors les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i \qquad z_2\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \qquad z_4 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$$

Exercise 2.15 *Soient $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$.*

1) Donner la forme trigonométrique des complexes suivants : z_1, z_2, $z_1 z_2$

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution.

I) Donnons la forme trigonométrique des complexes suivants : z_1, z_2, $z_1 z_2$.

On a : $z_1 = 1+i$, donc $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Soit $\theta_1 \in [0, 2\pi[$ l'argument de z_1, donc on a :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{x_1}{|z_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \\ \sin\theta_1 = \dfrac{y_1}{|z_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

D'où, $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ est la forme trigonométrique de } z_1.$$

On a : $z_2 = \sqrt{3} - i$, donc $|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$

Soit $\theta_2 \in [0, 2\pi[$ l'argument de z_2, donc on a :

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{x_2}{|z_2|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \\ \sin\theta_2 = \dfrac{y_2}{|z_2|} = \dfrac{-1}{2}. \end{cases}$$

D'où, $\theta_2 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$. :

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) \text{ est la forme trigonométrique de } z_1.$$

On a :

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= \left(2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right)\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right), \end{aligned}$$

est la forme trigonométrique de z_1z_2.
2) Déduisons les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$.
On écrit d'abord z_1z_2 *sous la forme algébrique.*
On a :

$$z_1z_2 = (1+i)\left(\sqrt{3}-i\right) = \left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)$$

est la forme algébrique de z_1z_2.

Par identification la forme algébrique et la forme trigonométrique de nombre z_1z_2, *on obtient :*

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -1+\sqrt{3} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Exercise 2.16 *Soient* $z_1 = -1-\sqrt{3}i$, $z_2 = 1-i$ *deux nombres complexes.*
1) Donner la forme trigonométrique des complexes suivants : z_1, z_2, $\frac{z_1}{z_2}$.
2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{19\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{19\pi}{12}$.
3) Déterminer les racines carrées de : $z = -3-4i$.
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :* $(z^2+1)(iz^2-3z+1-3i) = 0$.
Solution.
Soient $z_1 = -1-\sqrt{3}i$, $z_2 = 1-i$ *deux nombres complexes.*
I) Donnons la forme trigonométrique des complexes suivants : z_1, z_2, $\frac{z_1}{z_2}$.
On a : $z_1 = -1-\sqrt{3}i,$, *donc* $|z_1| = \sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$

Soit θ_1 *l'argument de* z_1*, donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{x_1}{|z_1|} = \dfrac{-1}{2} \\ \\ \sin\theta_1 = \dfrac{y_1}{|z_1|} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

D'où, $\theta_1 = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

Alors, $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ *est la forme trigonométrique de* z_1.

On a : $z_2 = 1 - i$*, donc* $|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
Soit $\theta_2 \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* z_2*, donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{x_2}{|z_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \\ \sin\theta_2 = \dfrac{y_2}{|z_2|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

D'où, $\theta_2 = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

Alors, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)$ *est la forme trigonométrique de* z_1.

On a : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{19\pi}{12}\right)\right)$ *est la forme trigonométrique de* $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2) Déduisons les valeurs exactes de $\cos\dfrac{19\pi}{12}$ ***et*** $\sin\dfrac{19\pi}{12}$.

On écrit d'abord $\dfrac{z_1}{z_2}$ *sous la forme algébrique.*

$$\text{On a : } \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i,$$

est la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Par identification la forme algébrique et la forme trigonométrique de nombre $\frac{z_1}{z_2}$*, on obtient :*

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad d'où \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \\ \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

3) Déterminons les racines carrées de : $z = -3-4i$.

Soit $\delta = a+ib$ *une des racines carrées de* z*. On a :*

$$\delta^2 = -3-4i \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = -3 & ...... \quad (1) \\ 2ab = -4 & ...... \quad (2) \\ a^2+b^2 = 5 & ...... \quad (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 2$ *où* $a = 1$ *ou* $a = -1$*, de l'équation* (2) *on aura :*

$$Si \quad a = 1 \text{ on obtient } \quad b = \frac{-2}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$
$$Si \quad a = -1 \text{ on obtient } \quad b = \frac{-2}{a} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Donc, les deux racines carrées de $z = -3-4i$ *sont* $\delta_1 = 1-2i$ *et* $\delta_2 = -1+2i$

4) Résolvons dans $\mathbb{C}$ ***l'équation*** $(z^2+1)(iz^2-3z+1-3i) = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} &(z^2+1)(iz^2-3z+1-3i) = 0 \\ \Rightarrow &\begin{cases} z^2+1 = 0 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z_1 = i \text{ ou } z_2 = -i \\ \\ iz^2-3z+1-3i = 0.....(E) \end{cases} \end{aligned}$$

Résolvons l'équation suivante : (E)

Le discriminant $\triangle = (-3)^2 - 4(i)(1-3i) = -3-4i$*, d'après la réponse précédente on a* $\delta_1 = 1-2i$ *est une racine carrée de* $\triangle$*, alors l'équation possède deux racines complexes sont :*

$$z_3 = \frac{3+(1-2i)}{2i} = \frac{4-2i}{2i} = \frac{2-i}{i} = 1-2i \quad et$$

$$z_4 = \frac{3-(1-2i)}{2i} = \frac{2+2i}{2i} = \frac{1+i}{i} = -1+i$$

Alors, $S = \{1-2i, -1+i\}$ *est l'ensemble de solution de l'équation* (E).

$$\text{Donc on a :} \quad \begin{cases} z^2+1=0 \\ \\ iz^2-3z+1-3i=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = i \text{ ou } z_2 = -i \\ \\ z_3 = -1+i \text{ ou } z_4 = 1-2i \end{cases}$$

Alors, $S = \{-i,\ i,\ 1-2i,\ -1+i\}$ *est l'ensemble de solution de l'équation.*

Exercise 2.17 *Soit* $z \in \mathbb{C}$.

Déterminer, dans le plan complexe, l'ensemble de points d'affixe z *dans chacun des cas suivants :*

$$1)\quad z^3 \in \mathbb{R}. \qquad\qquad 2)\quad z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R}. \qquad\qquad 3)\ \frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{R}.$$

Solution.

1) Déterminons dans le plan complexe, l'ensemble de points d'affixe z *tel que :* $z^3 \in \mathbb{R}$.

On pose $z = x+iy$ *où* $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z^3 = (x+iy)^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + \left(3x^2y - y^3\right) i.$$

Donc,

$$\begin{aligned} z^3 \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im} z^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2y - y^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow y\left(3x^2 - y^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow y\left(\sqrt{3}x - y\right)\left(\sqrt{3}x + y\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{3}x \\ y = -\sqrt{3}x \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des points $M(x,y)$ *est la réunion des trois droites :* $y=0$, $y = \sqrt{3}x$ *et* $y = -\sqrt{3}x$.

2) Déterminons dans le plan complexe, l'ensemble de points d'affixe z *tel que :* $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

On pose $z = x + iy$ *où* $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
z + \frac{1}{z} &= x + iy + \frac{1}{x+iy} = x + iy + \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} \\
&= x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2} = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y + \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{x^2y + y^3 - y}{x^2+y^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2y + y^3 - y = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des points $M(x, y)$ *est la réunion de cercle de centre* $O(0, 0)$ *et de rayon* $r = 1$ *et de droite :* $y = 0$ *(l'axe d'abscisses) à l'exception le point* $O(0, 0)$.

3) Déterminons dans le plan complexe, l'ensemble de points d'affixe z *tel que :* $\dfrac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{R}$.

On pose $z = x + iy$ *où* $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz} &= \frac{1-i(x+iy)}{1+i(x+iy)} = \frac{1+y-ix}{1-y+ix} \\
&= \frac{(1+y-ix)(1-y-ix)}{(1-y+ix)(1-y-ix)} = \frac{(-x^2-y^2+1)-2xi}{(1-y)^2+x^2} \\
&= \frac{-x^2-y^2+1}{(1-y)^2+x^2} + i\frac{-2x}{(1-y)^2+x^2}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{-2x}{(1-y)^2+x^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (1-y)^2 + x^2 \neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \neq 0 \ \textit{et} \ y \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des points $M(x, y)$ *est la droite :* $x = 0$ *(l'axe des ordonnées) à l'exception le point* $A(0, 1)$.

Chapitre 3

Espaces Vectoriels, Applications Linéaires

3.1 Introduction

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents, comme : L'ensemble des vecteurs du plan, l'ensemble des fonctions, l'ensemble des polynômes, l'ensemble des matrices,...

3.2 Espace Vectoriel, Base, Dimension

3.2.1 Lois de composition interne

Définition 3.1 *Soit E un ensemble non vide.*

On appelle " $*$ " loi (opération) de composition interne dans E l'application de $E \times E$ dans E.

$$\begin{array}{rccc} *: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x*y \end{array}$$

C'est à dire $\forall x, y \in E : x * y \in E$.

Exemple 3.1 *L'addition dans $\mathbb{R}$ est une opération interne car : $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x + y \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

La multiplication dans $\mathbb{R}$ est une opération interne car : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \times y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} \times: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x\times y \end{array}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et " $*$ ", " $\triangle$ " deux lois de composition interne dans E, alors :

1) On dit que " $*$ " est commutative dans E si et seulement si et seulement si :

$$\forall x, y \in E : x * y = y * x.$$

2) On dit que " $*$ " est associative dans E si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E : (x * y) * z = x * (y * z) .$$

3) Soit $e \in E$, on dit que "e" est un élément neutre de " $*$ " dans E si et seulement si :

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x.$$

4) Soit $x \in E$, on dit que x' de E est le symétrique de x si et seulement si :

$$x * x' = x' * x = e.$$

5) On dit que " $*$ " est distributive par rapport à " $\triangle$ "si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E; \begin{cases} x * (y \triangle z) = (x * y) \triangle (x * z) \\ \\ (x \triangle y) * z = (x * z) \triangle (y * z) \end{cases}$$

3.2.2 Groupes

Définition 3.2 *Soit E un ensemble muni d'une loi " $*$ ". On dit que $(E, *)$ est un groupe si et seulement si :*

1) La loi " $*$ " est interne dans E.

2) La loi " $*$ " est associative.

3) La loi " $*$ " admet un élément neutre dans E.

4) Tout élément de E admet un symétrique pour la loi " $*$ ".

Et si de plus " $*$ " est commutative, on dit que E est un groupe abélien (ou commutatif).

Exemple 3.2 $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{Z}, +)$ *sont des groupes abéliens.*

$(\mathbb{N}, +)$ *n'est pas un groupe car les éléments de $\mathbb{N}^*$ n'ont pas de symétrique.*

Exemple 3.3 *Soit $E = \{-1, 1\}$, on a : $(E, \times)$ est un groupe abélien.*

3.3 Espaces vectoriels

Dans cette partie, $(\mathbb{k}, +, .)$ désigne un corps commutatif, en pratique $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. On note par $1_{\mathbb{k}}$ l'élément neutre pour la loi "."

3.3.1 Structure d'espace vectoriel

On appelle $\mathbb{k}-$espace vectoriel (ou espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$) tout ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $\oplus$ et d'une loi de composition externe notée $\otimes$

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & E\times E & \rightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & x\oplus y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \otimes: & \mathbb{k}\times E & \rightarrow & E \\ & (\lambda,y) & \longmapsto & \lambda\otimes y \end{array}$$

tels que :

1. $(E,\oplus)$ est un groupe abélien.
2. $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{k},\forall x\in E$:

a) $(\lambda+\mu)\otimes x=(\lambda\otimes x)\oplus(\mu\otimes x)$

b) $\lambda\otimes(\mu\otimes x)=(\lambda.\mu)\otimes x$

3. $\forall x,y\in E,\forall\lambda\in\mathbb{k}:\lambda\otimes(x\oplus y)=(\lambda\otimes x)\oplus(\lambda\otimes y)$
4. $\forall x\in E,1_{\mathbb{k}}\otimes x=x$ avec $1_{\mathbb{k}}$ l'élément neutre de $\mathbb{k}$ pour la deuxième loi (la multiplication).

Lorsqu'on ne change pas le corps de base $\mathbb{k}$ on peut utiliser l'expression espace vectoriel au lieu de $\mathbb{k}-$espace vectoriel.

Exemples et conséquences

a) $E=\mathbb{R}^2$, $\mathbb{k}=\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((x,y),(x',y')) & \longmapsto & (x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y') \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \otimes: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\lambda,(x',y')) & \longmapsto & \lambda\otimes(x,y)=(\lambda.x,\lambda.y) \end{array}$$

$(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

b) Le corps $\mathbb{k}$ est un $\mathbb{k}-$espace vectoriel pour les lois $+$ et ., dans ce cas les éléments de $\mathbb{k}$ sont considérés simultanément comme vecteurs et scalaires.

c) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et en général si $\mathbb{k}\subset L$ alors L est un $\mathbb{k}-$espace vectoriel.

Conséquences

Théorème 3.4 *Soient $(E,\oplus,\otimes)$ un $\mathbb{k}-$espace vectoriel, $\lambda,\mu\in\mathbb{k}$ et $x,y\in E$, alors on a*

1. $\lambda\otimes x=0_E\Longleftrightarrow\lambda=0_{\mathbb{k}}$ *ou* $x=0_E$

2. $(\lambda-\mu)\otimes x=(\lambda\otimes x)-(\mu\otimes x)$

3. $\lambda\otimes(x-y)=(\lambda\otimes x)-(\lambda\otimes y)$

Preuve. $\Longrightarrow$) $\lambda \otimes x = 0_E \Longrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{k}}$ ou $x = 0_E$?

Supposons que $\lambda \otimes x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_{\mathbb{k}}$ et montrons que $x = 0_E$.

Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{k}}$, alors λ^{-1} existe dans $\mathbb{k}$ (car $\mathbb{k}$ est un corps). On a

$$\lambda^{-1} \otimes (\lambda \otimes x) = \lambda^{-1} \otimes 0_E = 0_E$$

et

$$\lambda^{-1} \otimes (\lambda \otimes x) = \left(\lambda^{-1}.\lambda\right) \otimes x = 1_{\mathbb{k}} \otimes x = x.$$

Donc $x = 0_E$.

$\Longleftarrow$) $\lambda = 0_{\mathbb{k}}$ ou $x = 0_E \Longrightarrow \lambda \otimes x = 0_E$?

Supposons $\lambda = 0_{\mathbb{k}}$. On a

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{k}} \otimes x &= (0_{\mathbb{k}} + 0_{\mathbb{k}}) \otimes x \\ &= (0_{\mathbb{k}} \otimes x) \oplus (0_{\mathbb{k}} \otimes x). \end{aligned}$$

En composant par $-(0_{\mathbb{k}} \otimes x)$, on trouve $0_{\mathbb{k}} \otimes x = 0_E$.

Supposons maintenant que $x = 0_E$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \otimes 0_E &= \lambda \otimes (0_E + 0_E) \\ &= (\lambda \otimes 0_E) \oplus (\lambda \otimes 0_E). \end{aligned}$$

En composant par $-(\lambda \otimes 0_E)$, on trouve $\lambda \otimes 0_E = 0_E$.

2. On a

$$\begin{aligned} \lambda \otimes x &= (\lambda - \mu + \mu) \otimes x \\ & [(\lambda - \mu) \otimes x] \oplus (\mu \otimes x). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$(\lambda - \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) - (\mu \otimes x).$$

3. On a

$$\begin{aligned} \lambda \otimes x &= \lambda \otimes (x - y \oplus y) \\ & [\lambda \otimes (x - y)] \oplus (\lambda \otimes y). \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\lambda \otimes (x - y) = (\lambda \otimes x) - (\lambda \otimes y)$. ■

Appellations et conventions

- On appelle les éléments de E, les **vecteurs.**
- On appelle les éléments de $\mathbb{k}$, les **scalaires.**
- Loi de composition interne $\oplus$ sera notée par $+$
- Loi de composition externe $\otimes$ sera noté par . ou $\times$

Théorème 3.5 *Soient* $(E, +, \times)$ *un* $\Bbbk-$*espace vectoriel,* $\lambda, \mu \in \Bbbk$ *et* $x, y \in E$, *alors on a*

1) $\lambda.x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_{\Bbbk}$ *ou* $x = 0_E$

2) $(\lambda - \mu).x = (\lambda.x) - (\mu.x)$

3) $\lambda.(x - y) = (\lambda.x) - (\lambda.y)$

Exemple 3.6 *1)* $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 ...., \mathbb{R}^n$ *sont des espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$.

2) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *est noté* $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

3) L'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *est noté* $S(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

4) L'ensemble des matrices à n *lignes et* p *colonnes à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *est noté* $M_{n,p}(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

5) L'ensemble des polynômes des degrés n *à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *est noté* $\mathbb{R}[x]$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

3.3.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3.3 *Soient* E *un* $\Bbbk-$*espace vectoriel et* F *un sous ensemble de* E. *On dit que* F *est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de* E *si et seulement si*

$$\begin{cases} 1) \ F \neq \emptyset, \\ \\ 2) \ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \beta \in \Bbbk, (\lambda.x + \beta.y) \in F. \end{cases}$$

Remarques

1. $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v. de E.
2. $\mathbb{R} \times \{0_{\mathbb{R}}\}$ est un s.e.v. de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur le corps $\mathbb{R}$.
3. Si F est un s.e.v. de E et E est un s.e.v. de G alors F est un s.e.v. de G.

Exemple 3.7 $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$.

F_1 *et* F_2 *sont deux sous-espaces vectoriels de* E, *supplémentaires dans* E.

Exercise 3.8 *Soient les ensembles suivants :*

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\},$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}.$$

$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}.$$

1) Montrer que F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que F_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) F_3 est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Solution.

1) Montrons que $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

On va montrer que :

$$F_1 \neq \emptyset \quad et \quad \forall X, Y \in F_1, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, (\lambda.X + \beta.Y) \in F_1.$$

On a : $F_1 \neq \emptyset$, car $(0, 0) \in F_1$.

Soient $X, Y \in F_1$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_1 \Rightarrow X = (x_1, x_2) \ \ et\ x_1 = x_2$$

$$Y \in F_1 \Rightarrow Y = (y_1, y_2) \ \ et\ y_1 = y_2$$

On a :

$$\begin{aligned} \lambda.X + \beta.Y &= \lambda.(x_1, x_2) + \beta.(y_1, y_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\beta y_1, \beta y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2) \end{aligned}$$

De plus on a : $\lambda x_1 + \beta y_1 = \lambda x_2 + \beta y_2$ car $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

Alors, $\lambda.X + \beta.Y \in F_1$

Donc, F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrons que : $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On va montrer que :

$$F_2 \neq \emptyset \quad et \ \ \forall X, Y \in F_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, (\lambda.X + \beta.Y) \in F_2.$$

On a : $F_2 \neq \emptyset$, car $(0, 0, 0) \in F_2$, puisque $0 + 0 + 2.0 = 0$

Soient $X, Y \in F_2$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_2 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3) \ \ et\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 ...... (1)$$

$$Y \in F_2 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3) \ \ et\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 0 ...... (2)$$

On a :

$$\begin{aligned}\lambda.X+\beta.Y &= \lambda.(x_1,x_2,x_3)+\beta.(y_1,y_2,y_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)+(\beta y_1,\beta y_2,\beta y_3)\\ &= =(\lambda x_1+\beta y_1,\lambda x_2+\beta y_2,\lambda x_3+\beta y_3)\end{aligned}$$

De plus on a :

$$(\lambda x_1+\beta y_1)+(\lambda x_2+\beta y_2)+2(\lambda x_3+\beta y_3)=\lambda\underbrace{((x_1+x_2+2x_3))}_{(1)}++\beta\underbrace{(y_1+y_2+2y_3)}_{(2)}$$

$= \lambda.0+\beta.0=0$

D'où $\lambda.X+\beta.Y\in F_2$.
Donc, F_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
3) $F_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=1\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$?
F_3 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$F_3\neq\emptyset \quad et \quad \forall X,Y\in F_3,\forall\lambda,\beta\in\mathbb{R} : (\lambda.X+\beta.Y)\in F_3.$$

On a : $(0,0,0)\notin F_3$ *car* $0+0-0=0\neq 1$.
Alors, $F_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=1\}$ *n'est pas un sous espace vectoriel.*

Proposition 3.1 *Soient* E *un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel,* F_1,F_2 *deux sous-espaces vectoriels de* E. *L'ensemble défini par*

$$F_1+F_2 = \{x_1+x_2 : x_1\in F_1 \text{ et } x_2\in F_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de E *appelé* ***somme*** *de* F_1 *et* F_2.

Preuve. 1. $F_1+F_2\neq\emptyset$ car $0_E=0_E+0_E\in F_1+F_2$.
2. Soient $x,y\in F_1+F_2$ et $\lambda,\beta\in\mathbb{k}$

$$x\in F_1+F_2\Longrightarrow x=x_1+x_2 : x_1\in F_1 \text{ et } x_2\in F_2$$

et

$$y\in F_1+F_2\Longrightarrow y=y_1+y_2 : y_1\in F_1 \text{ et } y_2\in F_2.$$

Montrons que $\lambda x+\beta y\in F_1+F_2$. On a

$$\begin{aligned}\lambda x+\beta y &= \lambda(x_1+x_2)+\beta(y_1+y_2)\\ &= (\lambda x_1+\beta y_1)+(\lambda x_2+\beta y_2)\in F_1+F_2.\end{aligned}$$

■

Proposition 3.2 *Soient E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel, F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Alors, on a*

$$F_1 + F_2 = F_2 + F_1, \qquad F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_1, \qquad F_1 \cap F_1 = F_1$$

$$F_1 \subset F_1 + F_2, \qquad F_1 \cap F_2 \subset F_1, \qquad F_1 \cap F_2 \subset F_2$$

$$F_1 + E = E, \qquad F_1 + F_1 = F_1, \qquad F_1 \cap E = F_1$$

$$\left.\begin{array}{c} F_1 \subset F_3 \\ et \\ F_2 \subset F_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow F_1 + F_2 \subset F_3 \qquad \left.\begin{array}{c} F_3 \subset F_1 \\ et \\ F_3 \subset F_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow F_3 \subset F_1 \cap F_2.$$

Définition 3.4 ***(Somme directe)***

Soient E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F_1 + F_2$ est directe si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et on note $F_1 \oplus F_2$.

Proposition 3.3 ***(Caractérisation de la somme directe)***

Pour que deux sous-espaces vectoriels soient en somme directe, il faut et il suffit que tout élément de la somme $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique en somme d'un élément de F_1 et d'un autre de F_2. C'est à dire,

$$F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2 \iff \begin{array}{c} \forall x \in F_1 + F_2, \exists! x_1 \in F_1 \text{ et } \exists! x_2 \in F_2 \\ x = x_1 + x_2. \end{array}$$

Définition 3.5 *Soient E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. F_1, F_2 sont dits supplémentaires dans E si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et $F_1 + F_2 = E$.*

Exemple 3.9 $\mathbb{k} = \mathbb{R}, E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$. *$F_1$ et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E.*

3.4 Dépendance, Indépendance linéaires

3.4.1 Combinaisons linéaires

Définition 3.6 *Soient E un $\Bbbk-$e.v. $v_1, v_2, ..., v_n \in E$. On appelle combinaison linéaires des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ tout vecteur v de E de la forme*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Bbbk$.

Proposition 3.4 ***(Autre caractérisation d'un s.e.v. par les combinaisons linéaires)***

Soient E un $\Bbbk-$espace vectoriel et F un sous ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si et seulement si

$$\begin{cases} 1)\ F \neq \emptyset \\ \\ 2)\ \forall\,(x,y) \in F^2,\ \forall\,(\lambda,\mu) \in \Bbbk^2, (\lambda x + \mu y) \in F. \\ \\ \textit{(i.e. } F \textit{ est stable par combinaisons linéaires).} \end{cases}$$

3.4.2 Familles liées, familles libres

Définition 3.7 *Soient E un $\Bbbk-$e.v., $n \in \mathbb{N}^*$, $(v_1, v_2, ..., v_n) \in E^n$.*

1) On dit que la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est libre si et seulement si $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Bbbk$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0_{\Bbbk}.$$

On dit aussi que les vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ sont linéairement indépendants.

2) On dit que la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est liée si et seulement si $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Bbbk - \{0_{\Bbbk}\} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$.

Exemple 3.10 *1) Soient $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a : v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. Car, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 =$*

$0_{\mathbb{R}^3}$*, montrons que* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \lambda_1 (1,0,1) + \lambda_2 (2,1,-1) = (0,0,0) \\
&\Longrightarrow (\lambda_1, 0, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2) = (0,0,0) \\
&\Longrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) = (0,0,0) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.
\end{aligned}$$

2) Soient $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,1)$, $v_3 = (-1,0)$ *trois vecteurs de* $\mathbb{R}^2$*. La famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est liée. Car,*

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^2}$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^2} &\Longrightarrow \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (2,1) + \lambda_3 (-1,0) = (0,0) \\
&\Longrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_1 + 2(-\lambda_1) = -\lambda_1 \\ \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ *n'est pas toujours vérifié, prenons* $\lambda_1 = 1$ *on aura* $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$$v_1 - v_2 - v_3 = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2},$$

c'est à dire $v_1 = v_2 + v_3$.

Remarque 3.1 *1) Pour que la famille* $\{v\}$ *soit liée il faut et il suffit que* $v = 0_E$.

2) $\forall v \in E, \{v, v\}$ *est liée* $v - v = 0_E$.

3) Toute famille contenant 0_E est liée.

4) Si la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est liée alors tout v_i s'écrit comme combinaison linéaires des autres.

3.4.3 Sous-espace engendré par une partie

Définition 3.8 *Soient E un $\mathbb{k}-$e.v. et $A \subset E$. On appelle s.e.v. engendré par A l'intersection de tous les s.e.v. de E contenant A et on le note $\langle A \rangle$ ou bien*

$$Vect\,(A) = \cap_{\substack{F s.e.v \\ A \subset F}} F.$$

En d'autres termes, si $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$,

$$\langle A \rangle = \left\{ v \in E : \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right\}.$$

3.4.4 Familles génératrices, bases

Définition 3.9 *Soient E un $\mathbb{k}-$e.v. et $G \subset E$. On dit que G est une famille génératrice de E si et seulement si $E = \langle G \rangle$, c'est à dire si $G = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, on dit que G engendre E (ou G est une partie génératrice de E) si et seulement si*

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Définition 3.10 *Soient E un $\mathbb{k}-$e.v. et B une partie de E.*

On dit que B est une base de E si et seulement si B est à la fois, libre et génératrice de E.

C'est à dire, si on pose $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, alors B est une base de E si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists!\, (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{k}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Dans ce cas, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont appelés les coordonnées (ou bien les composantes) de x dans la base B.

La base canonique de $\mathbb{R}^2$

Définition 3.11 *Soit $B = \{e_1, e_2\}$ où $e_1 = (1, 0)\,, e_2 = (0, 1)\,.$*

B est dite la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Car :

a) B est libre, en effet : soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \quad & \alpha (1,0) + \beta (0,1) = (0,0) \\ & (\alpha, \beta) = (0,0) \\ & \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

b) B engendre $\mathbb{R}^2$, en effet, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donc $\exists \lambda_1 = x \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = y \in \mathbb{R}$:

$$(x,y) = \lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (0,1).$$

Donc, B engendre $\mathbb{R}^2$ de plus B est libre dans $\mathbb{R}^2$, alors B est une base de $\mathbb{R}^2$.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.12 *Soit* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$.

B est dite base canonique de $\mathbb{R}^3$. Car :

a) B est libre, en effet : soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} & \implies \alpha (1,0,0) + \beta (0,1,0) + \gamma (0,0,1) = (0,0,0) \\ & \implies (\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0) \\ & \implies \alpha = 0, \beta = 0 \text{ et } \gamma = 0. \end{aligned}$$

Donc, B est libre.

b) B engendre $\mathbb{R}^3$, en effet, soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\exists ? \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists ? \lambda_2 \in \mathbb{R}, \exists ? \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x,y,z) = \lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,1,0) + \lambda_3 (0,0,1).$$

On a :

$$(x,y,z) = x (1,0,0) + y (0,1,0) + z (0,0,1).$$

d'où, $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$ et $\lambda_3 = z$.

Donc, B engendre $\mathbb{R}^3$ de plus B est libre dans $\mathbb{R}^3$, alors B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercise 3.11 *1) Montrer que* $B = \{e_1, e_2\}$ *où* $e_1 = (1,1), e_2 = (2,3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1,3,2), e_2 = (2,1,-1), e_3 = (1,-1,1)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1) Montrons que $B = \{e_1, e_2\}$ *où* $e_1 = (1,1), e_2 = (2,3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

a) Montrons que B *est libre : Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on suppose que :* $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$.

On a :

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} &\Longrightarrow \alpha(1,1) + \beta(2,3) = (0,0) \\ &\Longrightarrow (\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta) = (0,0) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \ldots\ldots. (1) \\ \\ \alpha + 3\beta = 0 \ldots\ldots. (2) \end{cases}. \end{aligned}$$

de $(2)-(1)$ *on a :* $\beta = 0$, $(1) \Rightarrow \alpha = -2\beta = 0$.

On conclut, $\alpha = \beta = 0$, *d'où* B *est libre.*

b) Montrons que B *engendre* $\mathbb{R}^2$ *: Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists ?\lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists ?\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tel que :* $(x,y) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,3)$.

On a :

$$(x,y) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,3) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \ldots\ldots. (1) \\ \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = y \ldots\ldots. (2) \end{cases}$$

De $(2)-(1)$ *on obtient :* $\lambda_2 = y - x$, *puis de* (1) *on aura :* $\lambda_1 = x - 2\lambda_2 = 3x - 2y$.

On conclut : $\exists \lambda_1 = 3x - 2y \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = y - x \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x,y) = (3x - 2y)(1,1) + (y - x)(2,3).$$

Donc, $B = \{e_1, e_2\}$ *où* $e_1 = (1,1), e_2 = (2,3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrons que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1,3,2), e_2 = (2,1,-1), e_3 = (1,-1,1)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

a) Montrons que B *est libre : Soient* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que:* $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

On a :

$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1,3,2) + \beta(2,1,-1) + \gamma(1,-1,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + \beta - \gamma, 2\alpha - \beta + \gamma) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0.......(1) \\ \\ 3\alpha + \beta - \gamma = 0.......(2) \\ \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0.......(3) \end{cases}$$

De $(2)+(3)$ *on obtient :* $5\alpha = 0$ *d'où* $\alpha = 0$ *et de* $((1)+(2))$ *et* $(\alpha = 0)$ *on obtient :* $3\beta = 0$ *d'où* $\beta = 0$ *et on aura aussi* $\gamma = 0$*. On conclut,* $\alpha = \beta = \gamma = 0$*, d'où* B *est libre.*

b) Montrons que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1,3,2), e_2 = (2,1,-1), e_3 = (1,-1,1)$ *engendre* $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*,* $\exists ?\lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists ?\lambda_2 \in \mathbb{R}, \exists ?\lambda_3 \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,3,2) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(1,-1,1).$$

On a : $(x,y,z) = \lambda_1(1,3,2) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(1,-1,1)$

d'où $(x,y,z) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)$

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = x.......(1) \\ \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = y.......(2) \\ \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = z.......(3) \end{cases}$$

de $(2)+(3)$ *on a* $: 5\lambda_1 = y + z$ *d'où* $\lambda_1 = \dfrac{y+z}{5}$

de $(1)+(2)$ *on a* $: \lambda_2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}\lambda_1$

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{5}y + \tfrac{1}{5}z\right) = \frac{5x + y - 4z}{15}$$

de (1), *on aura :*

$$\lambda_3 = x - 2\lambda_2 - \lambda_1 = x - 2\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{15}y - \frac{4}{15}z\right) - \left(\frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z\right) = \frac{x-y+z}{3}$$

On conclut :

$$\exists\lambda_1 = \frac{y+z}{5} \in \mathbb{R}, \qquad \exists\lambda_2 = \frac{5x+y-4z}{15} \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \;\; \exists\lambda_3 = \frac{x-y+z}{3} \in \mathbb{R}$$

tel que :

$$(x,y,z) = \frac{y+z}{5}(1,3,2) + \frac{5x+y-4z}{15}(2,1,-1) + \frac{x-y+z}{3}(1,-1,1).$$

Donc, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1,3,2), e_2 = (2,1,-1), e_3 = (1,-1,1)$ *engendre* $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.5 *Soient* F_1, F_2 *deux familles de vecteurs de* E *telles que* $F_1 \subset F_2$, *alors on a*

a) Si F_2 *est libre alors* F_1 *est libre.*

b) Si F_1 *engendre* E *alors* F_2 *engendre* E.

Proposition 3.6 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*, F_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}, F_2 = F_1 \cup \{v_{n+1}\} = \{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}\}$ *deux s.e.v. de* E, *alors on a*

a) F_1 *est libre et* $v_{n+1} \notin \langle F_1 \rangle \Longrightarrow F_2$ *es libre.*

b) F_2 *engendre* E *et* $v_{n+1} \in \langle F_1 \rangle \Longrightarrow F_1$ *engendre* E.

3.5 Théorie de la dimension

Définition 3.13 *Soit* E *un* $\mathbb{k}-$*e.v. On appelle dimension de* E *le cardinal d'une base* B *de* E *et on note* $\dim E = cardB$.

Exemple 3.12 *a)* $E = \mathbb{R}^n, B_{\mathbb{R}^n} = \{e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1)\}$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

b) La famille $L = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, u_i \in \mathbb{R}^3$ *ne peut pas être une base de* $\mathbb{R}^3$ *car :* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ *et* $cardL = 4$.

Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{k}-$e.v. de dimension finie $\dim E = n$, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Soit $L = \{u_1, u_2, ..., u_r\}$, $r \leq n$ une famille libre de E. Alors il existe au moins une façon de compléter L par $(n-r)$ vecteurs de B pour obtenir une nouvelle base de E.

Exemple 3.13 $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* $L = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,1,1)\}$ *une famille libre de* $\mathbb{R}^3$. *On peut prendre* $e_3 = (0,0,1)$ *de* B *pour compléter* L *et avoir une nouvelle base de* $\mathbb{R}^3$. $L' = \{u_1, u_2, e_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.7 *Soit* E *un* $\mathbb{k}-$*e.v. de dimension finie* $\dim E = n$. *Alors*

1. *Toute famille libre admet au plus* n *éléments.*
2. *Toute famille génératrice admet au moins* n *éléments.*
3. *Toute base de* E *admet exactement* n *éléments.*

Proposition 3.8 *Soit* E *un* $\mathbb{k}-$*e.v. de dimension finie* $\dim E = n$ *et soit* F *une famille finie d'éléments de* E. *On a :.*

1. *Si* $cardF = n$ *et* F *est libre, alors* F *est une base de E.*
2. *Si* $cardF = n$ *et* F *est génératrice, alors* F *est une base de E.*

Exercise 3.14 *Soient* $A = \{(2,1), (-1,1)\}$ *et* $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.

1) Montrer que A *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que B *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1) Montrons que $A = \{(2,1), (-1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

On a $cardA = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, *donc il suffit de montrer que* A *est libre ou bien* A *est génératrice.*

Montrons que $A = \{(2,1), (-1,1)\}$ *engendre* $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists ? \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists ? \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x,y) = \lambda_1 (2,1) + \lambda_2 (-1,1).$$

$$\text{On a : } (x,y) = \lambda_1 (2,1) + \lambda_2 (-1,1) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = x.......(1) \\ \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y.......(2) \end{cases}$$

De $(1)+(2)$ *on a :* $\lambda_1 = \dfrac{x+y}{3}$, *et de* (1) *on obtient :* $\lambda_2 = 2\lambda_1 - x = \dfrac{2y-x}{3}$.

On conclut : $\exists \lambda_1 = \dfrac{x+y}{3} \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = \dfrac{2y-x}{3} \in \mathbb{R}$, *tel que :*

$$(x,y) = \frac{x+y}{3}(2,1) + \frac{2y-x}{3}(-1,1).$$

Donc A *est engendre* $\mathbb{R}^2$.

On a card$A = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ et A est engendre $\mathbb{R}^2$, alors A est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrons que $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a card$B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc il suffit de montrer que B est libre ou bien B est génératrice.

Montrons que $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que:

$$\alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0).$$

On a :

$$\alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \ldots\ldots (1) \\ \\ \alpha + \gamma = 0 \ldots\ldots (2) \\ \\ \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

De $(1) - (2)$ on obtient $\beta = \gamma$ et de (3) on a : $2\gamma = 0$, d'où $\gamma = \beta = 0$ et $(1) \Rightarrow \alpha = 0$.

On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, d'où B est libre.

On a card$B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et B est libre dans $\mathbb{R}^3$, alors B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.9 *Soit E un $\Bbbk-$e.v. de dimension finie, alors tout s.e.v. F de E est de dimension finie et on a $\dim F \leq \dim E$.*

Proposition 3.10 *Soit F un s.e.v. de E avec $dimE = n, \dim F = p$. Alors*

1. *F admet un supplémentaire dans E*
2. *Tout supplémentaire de F dans E est de dimension $n - p$.*

Corollaire 3.15 *Soient E un $\Bbbk-$e.v. de dimension finie, F et G sont deux s.e.v. de E. Alors*

$$\left.\begin{array}{r} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{array}\right\} \Longrightarrow F = G.$$

Preuve. $F \subset G \Longrightarrow F$ admet un supplémentaire H dans G.
$\dim H = \dim G - \dim F = 0 \Longrightarrow H = \{0_E\}$. Donc

$$G = F + H = F + \{0_E\} = F.$$

■

Théorème 3.16 ***(Formule de Grassmann)***
Soient E un $\mathbb{k}-$e.v. de dimension finie. Pour tout F, G s.e.v. de E.

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Corollaire 3.17 *Si F et G sont deux s.e.v. de E en somme directe. Alors*

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 3.14 *Soit E un $\mathbb{k}-$e.v. et F une famille d'éléments de E. On appelle rang de F et on note rgF le nombre maximal de vecteurs de F qui sont linéairement indépendants.*

Exemple 3.18 *Soit $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.*
On a : $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0)$, on aura : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
D'où les vecteurs de B qui sont linéairement indépendants, donc $rgB = 3$

Exemple 3.19 *Soit $F = \{(1,2),(1,0),(1,-1)\}$ avec $v_1 = (1,2), v_2 = (1,0), v_3 = (1,-1)$.*
remarquons que $v_1 = 3v_2 - 2v_3$ donc toute famille de 3 vecteurs est liée, on déduit que $rgF \leq 2$.
Mais, $\{v_2, v_3\}$ est libre, en effet : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha(1,0) + \beta(1,-1) = (0,0)$,
on aura : $\alpha = \beta = 0$. Alors, $rgF = 2$.

3.6 Exercices

Exercise 3.20 *1) On considère les vecteurs $v_1 = (1,-1,2,1)$, $v_2 = (2,1,0,1)$, $v_3 = (3,3,-2,1)$, on note $E_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*
Déterminer une base de E_1.
2) Soit

$$E_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x - z - t = 0\right\}.$$

Montrer que E_2 est s.e.v de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.
Solution.

1) $E_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ *où* $v_1 = (1, -1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0, 1)$ *et* $v_3 = (3, 3, -2, 1)$.

Déterminons une base de E_1 *:*

Vérifions d'abord si $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est linéairement indépendante dans* $\mathbb{R}^4$ *:*

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*:

$$\alpha (1, -1, 2, 1) + \beta (2, 1, 0, 1) + \gamma (3, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

On a :

$$\alpha (1, -1, 2, 1) + \beta (2, 1, 0, 1) + \gamma (3, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (1) \\ \\ -\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \\ \\ 2\alpha - 2\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (4) \end{cases}$$

On a : $(3) \Rightarrow \alpha = \gamma$, *et* $(4) \Rightarrow \beta = -\gamma - \alpha = -2\gamma$ *on remplace les valeurs* $\alpha = \gamma$ *et* $\beta = -2\gamma$ *dans l'équation* (2) *on obtient* $-\gamma - 2\gamma + 3\gamma = 0$ *on aura* $0 = 0$, *le même résultat si on remplace* $\alpha = \gamma$ *et* $\beta = -2\gamma$ *dans l'équation* (3)

On conclut, $\alpha = \gamma$, $\beta = -2\gamma$ *et* $\gamma \in \mathbb{R}$, *alors la famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est liée dans* $\mathbb{R}^4$.

Pour plus de détail voir l'exemple suivant, si on prend $\gamma = 1$ *d'où* $\alpha = 1$, $\beta = -2$ *et*

$$(1, -1, 2, 1) + (-2) (2, 1, 0, 1) + (3, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

Maintenant vérifions si $\{v_1, v_2\}$ *est linéairement indépendante dans* $\mathbb{R}^4$ *:*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on suppose que*:

$$\alpha (1, -1, 2, 1) + \beta (2, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

On a :

$$\alpha (1, -1, 2, 1) + \beta (2, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc, la famille $\{v_1, v_2\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^4$.

On a : $\{v_1, v_2\}$ *engendre* E_1 *et libre, alors* $\{v_1, v_2\}$ *est une base de* E_1 *et* $\dim E_1 = 2$.

2) On a :

$$E_2 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \ \text{et} \ x - z - t = 0\right\}.$$

Montrons que E_2 *est s.e.v de* $\mathbb{R}^4$ *et en donnons une base.*

E_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *si et seulement si :*

$$E_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in E_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in E_2.$$

On a : $E_2 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0, 0, 0) \in E_2$, *puisque* $0 - 0 + 0 - 2.0 = 0$ *et* $0 - 0 - 0 = 0$

Soient $X, Y \in E_2$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in E_2 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \ \text{et} \ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \ x_1 - x_3 - x_4 = 0 ......(1)$$

$$Y \in E_2 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \ \text{et} \ y_1 - y_2 + y_3 - 2y_4 = 0, \ y_1 - y_3 - y_4 = 0 ......(2)$$

$$\text{On a : } \lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1, x_2, x_3, x_4) + \beta.(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3, \beta y_4)$$

$$= \left(\underbrace{\lambda x_1 + \beta y_1}_{z_1}, \underbrace{\lambda x_2 + \beta y_2}_{z_2}, \underbrace{\lambda x_3 + \beta y_3}_{z_3}, \underbrace{\lambda x_4 + \beta y_4}_{z_4}\right)$$

De plus on a :

$$z_1 - z_2 + z_3 - 2z_4 = (\lambda x_1 + \beta y_1) - (\lambda x_2 + \beta y_2) + (\lambda x_3 + \beta y_3) - 2(\lambda x_4 + \beta y_4)$$

$$= \lambda(x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4) + \beta(y_1 - y_2 + y_3 - 2y_4) = \lambda.0 + \beta.0 = 0$$

$$z_1 - z_3 - z_4 = (\lambda x_1 + \beta y_1) - (\lambda x_3 + \beta y_3) - (\lambda x_4 + \beta y_4)$$

$$= \lambda(x_1 - x_3 - x_4) + \beta(y_1 - y_3 - y_4) = \lambda.0 + \beta.0 = 0$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in E_2$.

Donc, E_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

Donnons une base à $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \ \text{et} \ x - z - t = 0\}$

Cherchons d'abord une famille génératrice à E_2 :
On a :

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z-2t=0 \\ \\ x-z-t=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-x+3z \\ \\ t=x-z \end{array}\right.$$

Soit

$$\begin{aligned}(x,y,z,t)\in E_2 \ \Rightarrow \ (x,y,z,t) &= (x,-x+3z,z,x-z) \\ &= (x,-x,0,x)+(0,3z,z,-z) \\ &= x\,(1,-1,0,1)+(0,3,1,-1)\end{aligned}$$

Alors, $E_2=\langle w_1,w_2\rangle$ où $w_1=(1,-1,0,1)\,, w_2=(0,3,1,-1)$
Vérifions si $\{w_1,w_2\}$ est linéairement indépendante dans $\mathbb{R}^4$:
Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, on suppose que:

$$\alpha\,(1,-1,0,1)+\beta\,(0,3,1,-1)=(0,0,0,0)$$

On a :

$$\alpha\,(1,-1,0,1)+\beta\,(0,3,1,-1)=(0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha=0..............(1) \\ \\ -\alpha+3\beta=0........(2) \\ \\ \beta=0..............(3) \\ \\ \alpha-\beta=0.........(4) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha=0 \\ \\ \beta=0 \end{array}\right.$$

On conclut, $\alpha=\beta=0$, d'où $\{w_1,w_2\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

On a : $\{w_1,w_2\}$ engendre E_2 et libre, alors $\{w_1,w_2\}$ est une base de E_2 et $\dim E_2=4$

Exercise 3.21 *Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1=(2,3,-1)\,, v_2=(1,-1,-2)$ engendrent le même s.e.v que : $w_1=(3,7,0)\,,\ w_2=(5,0,-7)\,.$*

Solution.

Montrons que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1=(2,3,-1)\,,\ v_2=(1,-1,-2)$ engendrent le même s.e.v que : $w_1=(3,7,0)\,,\ w_2=(5,0,-7)\,.$

Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, *on suppose que*: $v_1 = (2,3,-1) = \lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7)$.
On a :

$$\lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7) = (2,3,-1) \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda + 5\beta = 2.........(1) \\ \\ 7\lambda = 3.......(2) \\ \\ -7\beta = -1........(3) \end{cases}$$

De $(2) \Rightarrow \lambda = \frac{3}{7}$ *et* $(3) \Rightarrow \beta = \frac{1}{7}$ *et de* $(1) \Rightarrow 3\left(\frac{3}{7}\right) + 5\left(\frac{1}{7}\right) = 2$, *d'où* $2 = 2$

donc,

$$v_1 = \left(\frac{3}{7}\right)(3,7,0) + \left(\frac{1}{7}\right)(5,0,-7) \quad et \quad v_1 = \left(\frac{3}{7}\right)w_1 + \left(\frac{1}{7}\right)w_2$$

Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, *on suppose que*: $v_2 = (1,-1,-2) = \lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7)$.
Ona :

$$\lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7) = (1,-1,-2) \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda + 5\beta = 1......(1) \\ \\ 7\lambda = -1.........(2) \\ \\ -7\beta = -2.........(3) \end{cases}$$

de $(2) \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{7}$ *et* $(3) \Rightarrow \beta = \frac{2}{7}$, *remplaçons* λ *et* β *dans* (1) *on obtient :*
$(1) \Rightarrow 3\left(\frac{-1}{7}\right) + 5\left(\frac{2}{7}\right) = 1$, *d'où* $1 = 1$.
Alors,,

$$\begin{aligned} v_2 &= \left(\frac{-1}{7}\right)(3,7,0) + \left(\frac{2}{7}\right)(5,0,-7) \\ \\ v_2 &= \left(\frac{-1}{7}\right)w_1 + \left(\frac{2}{7}\right)w_2 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{3}{7}\right)w_1 + \left(\frac{1}{7}\right)w_2 \\ &et \\ v_2 &= \left(\frac{-1}{7}\right)w_1 + \left(\frac{2}{7}\right)w_2 \end{aligned}$$

On conclut, que les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$ *,* $v_2 = (1, -1, -2)$ *engendrent le même s.e.v que :* $w_1 = (3, 7, 0)$ *,* $w_2 = (5, 0, -7)$ *.*

Exercise 3.22 *Soit* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *tel que* $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (0, 2, 1), v_3 = (-1, 0, 3)$ *.*

1) Montrer que B *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

2) Décomposer le vecteur $v = (16, -4, 4)$ *dans cette base.*

Solution.

1) Montrons que : $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *tel que* $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (0, 2, 1), v_3 = (-1, 0, 3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*. Il suffit de Montrer que* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^3$*.*

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*, on suppose que:*

$$\alpha (1, 2, 0) + \beta (0, 2, 1) + \gamma (-1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

$$\textit{On a :} \qquad \alpha (1, 2, 0) + \beta (0, 2, 1) + \gamma (-1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \text{.........} (1) \\ \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \text{.......} (2) \\ \\ \beta + 3\gamma = 0 \text{........} (3) \end{cases}$$

de $(1) \Rightarrow \gamma = \alpha$ *et* $(2) \Rightarrow \beta = -\alpha$

$(3) \Rightarrow -\alpha + 3\alpha = 0$*, d'où* $\alpha = 0$

On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0$*, d'où* B *est libre.*

On a $cardB = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ *et* B *est libre dans* $\mathbb{R}^3$*, alors* B *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

2) Décomposons le vecteur $v = (16, -4, 4)$ *dans cette base* B*.*

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$v = (16, -4, 4) = \alpha (1, 2, 0) + \beta (0, 2, 1) + \gamma (-1, 0, 3) .$$

On a :

$$\begin{aligned} (16, -4, 4) &= \alpha (1, 2, 0) + \beta (0, 2, 1) + \gamma (-1, 0, 3) \\ \\ &= (\alpha - \gamma, 2\alpha + 2\beta, \beta + 3\gamma) \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 16.......(1) \\ \\ 2\alpha + 2\beta = -4.......(2) \\ \\ \beta + 3\gamma = 4.......(3) \end{cases}$$

de $(1) \Rightarrow \gamma = \alpha - 16$ *et* $(2) \Rightarrow \beta = -2 - \alpha$

$(3) \Rightarrow -2 - \alpha + 3(\alpha - 16) = 4$, *d'où* $2\alpha = 54$ *donc,* $\alpha = 27$, $\gamma = 27 - 16 = 11$ *et* $\beta = -2 - 27 = -29$

On conclut, $\alpha = 27, \beta = -29, \gamma = 11$, *alors la décomposition de vecteur* $v = (16, -4, 4)$ *dans la base* B *est :*

$$v = (16, -4, 4) = 27(1, 2, 0) - 29(0, 2, 1) + 11(-1, 0, 3).$$

Exercise 3.23 *Etudier la liberté des familles suivantes :*

$$\begin{aligned} 1)\quad A &= \{(1, 2, -1), (-1, 1, 2), (-1, 0, 3)\} \\ \\ 2)\quad B &= \{(2, 0, -2), (3, 2, 1), (1, 2, 3)\} \\ \\ 3)\quad C &= \{(1, -2, 1, 5), (1, 1, 1, 1), (-1, 0, 3, 0)\} \end{aligned}$$

Solution.

1) Etudions la liberté des famille : $A = \{(1, 2, -1), (-1, 1, 2), (-1, 0, 3)\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*:

$$\alpha(1, 2, -1) + \beta(-1, 1, 2) + \gamma(-1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

$$\text{On a :} \qquad \alpha(1, 2, -1) + \beta(-1, 1, 2) + \gamma(-1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - \gamma = 0.......(1) \\ \\ 2\alpha + \beta = 0.......(2) \\ \\ -\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0.......(3) \end{cases}$$

On a : $(2) \Rightarrow \beta = -2\alpha$ *et de* (1) *on aura* $\gamma = \alpha - \beta = \alpha + 2\alpha$ *d'où* $\gamma = 3\alpha$, *remplaçons* β *et* γ *dans l'équation* (3) *on obtient :* $(3) \Rightarrow -\alpha - 4\alpha + 9\alpha = 0$, *d'où* $\alpha = 0$

On conclut, $\alpha=\beta=\gamma=0$, *d'où* A *est famille libre.*
2) Etudions la liberté des famille : $B=\{(2,0,-2),(3,2,1),(1,2,3)\}$
Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, *on suppose que:*

$$\alpha(2,0,-2)+\beta(3,2,1)+\gamma(1,2,3)=(0,0,0)$$

$$\text{On a : } \quad \alpha(2,0,-2)+\beta(3,2,1)+\gamma(1,2,3)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+3\beta+\gamma=0 \ldots\ldots\ldots (1) \\ \\ 2\beta+2\gamma=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ \\ -2\alpha+\beta+3\gamma=0 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

On a : $(2)\Rightarrow\gamma=-\beta$ *et de* (1) *on aura* $2\alpha+3\beta-\beta=0$ *d'où* $\alpha=-\beta$, *remplaçons* α *et* γ *dans l'équation* (3) *on obtient :* $(3)\Rightarrow 2\beta+\beta-3\beta=0$, *d'où* $0.\beta=0$, *on déduit que* β *il est quelconque. Prenons par exemple* $\beta=1$ *on aura* $\alpha=-1$ *et* $\gamma=-1$ *c'est à dire*

$$(-1)(2,0,-2)+1(3,2,1)+(-1)(1,2,3)=(0,0,0)$$

On conclut, que la famille B *est liée.*

Exercise 3.24 *Etudier la liberté des familles suivantes :*

$$1)\quad A = \{e^x,\ xe^x,\ e^{-x},\ xe^{-x}\}$$

$$2)\quad B = \{2x^2-3,\ -x+1,\ -x^4-3x^2-2x+1\}$$

$$3)\quad C = \{x^2+1,\ x^3,\ x^3+x^2+2\}$$

Solution.
3) Etudions la liberté de la famille : $A=\{e^x,\ xe^x,\ e^{-x},\ xe^{-x}\}$.
Soient $\alpha,\beta,\gamma,\lambda\in\mathbb{R}$, *on suppose que:* $\alpha e^x+\beta xe^x+\gamma e^{-x}+\lambda xe^{-x}=0$
Pour $x\neq 0$, *on divise par* xe^x *et en faisant tendre* x *vers* $+\infty$ *on obtient :*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha e^x+\beta xe^x+\gamma e^{-x}+\lambda xe^{-x}}{xe^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha\frac{1}{x}+\beta+\gamma\frac{e^{-2x}}{x}+\lambda e^{-2x}\right)=\beta=0$$

donc $\beta=0$.

Pour $x \neq 0$, on divise par xe^{-x} et en faisant tendre x vers $-\infty$ on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha e^{x}+\gamma e^{-x}+\lambda xe^{-x}}{xe^{-x}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\alpha\frac{e^{2x}}{x}+\gamma\frac{1}{x}+\lambda\right)=\lambda=0$$

donc, $\lambda = 0$.

Prenons maintenant $x = 0$ et $x = 1$, on obtient :

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=0.............(1)\\ \\ \alpha e+\dfrac{1}{e}\gamma=0.........(2)\end{cases}$$

On a : (1) $\Rightarrow \gamma = -\alpha$, remplaçons γ dans l'équation (2) on obtient : (2) $\Rightarrow$ $\alpha\left(e-\dfrac{1}{e}\right)=0$, d'où $\alpha = 0$ car $\left(e-\dfrac{1}{e}\right)\neq 0$. On conclut, $\alpha=\beta=\gamma=\lambda=0$, d'où $A=\{e^{x},\ xe^{x},\ e^{-x},\ xe^{-x}\}$ est famille libre.

2) Etudions la liberté de la famille : $B=\{2x^2-3,\ \ -x+1,\ \ -x^4-3x^2-2x+1\}$

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, on suppose que:

$$\alpha\left(2x^2-3\right)+\beta\left(-x+1\right)+\gamma\left(-x^4-3x^2-2x+1\right)=0$$

On a :

$$\begin{aligned}&\alpha\left(2x^2-3\right)+\beta\left(-x+1\right)+\gamma\left(-x^4-3x^2-2x+1\right)=0\\ \Rightarrow\ &-\gamma x^4+\left(2\alpha-3\gamma\right)x^2+\left(-\beta-2\gamma\right)x+\left(\beta-3\alpha+\gamma\right)=0\\ \Rightarrow\ &\begin{cases}-\gamma=0\\ \\ 2\alpha-3\gamma=0\\ \\ -\beta-2\gamma=0\\ \\ \beta-3\alpha+\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=0\\ \\ \alpha=0\\ \\ \beta=0\end{cases}\end{aligned}$$

On a : $\alpha=\beta=\gamma=0$, d'où $B=\{2x^2-3,\ \ -x+1,\ \ -x^4-3x^2-2x+1\}$ est famille libre.

3) Etudions la liberté de la famille : $C=\{x^2+1,\ x^3,\ x^3+x^2+2\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*: $\alpha\left(x^2+1\right)+\beta x^3+\gamma\left(x^3+x^2+2\right)=0$

$$\begin{aligned}
\textit{On a :} \qquad & \alpha\left(x^2+1\right)+\beta x^3+\gamma\left(x^3+x^2+2\right)=0 \\
\Rightarrow \quad & (\beta+\gamma)\, x^3+(\alpha+\gamma)\, x^2+(\alpha+2\gamma)=0 \\
\Rightarrow \quad & \left\{\begin{array}{l}
\beta+\gamma=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\
\\
\alpha+\gamma=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \qquad \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0 \\
\\
\alpha+2\gamma=0 \ldots\ldots\ldots (3)
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc, $C=\left\{x^2+1,\ x^3,\ x^3+x^2+2\right\}$ *est une famille libre.*

Exercise 3.25 *Dire si les ensembles de vecteurs suivants sont des espaces vectoriels, et justifier la réponse :*

$$\begin{aligned}
&1) \quad F_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x+3y=0\right\} \\
&2) \quad F_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=0\right\} \\
&3) \quad F_3 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x+2y-4z=0\right\} \\
&4) \quad F_4 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0 \text{ et } y-3z=0\right\} \\
&5) \quad F_5 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x-y-z=0 \text{ et } x-2y-z=0\right\} \\
&6) \quad F_6 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y=0\right\} \\
&7) \quad F_7 = \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : 2x-y+z=x+y+z-t=3x+2z=1\right\}
\end{aligned}$$

Solution.

1) $F_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x+3y=0\right\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

F_1 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si :*

$$F_1 \neq \emptyset \quad \text{ et } \quad \forall X, Y \in F_1, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X+\beta.Y)\in F_1.$$

On a : $F_1 \neq \emptyset$, *car* $(0,0)\in F_1$.

Soient $X, Y \in F_1$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_1 \Rightarrow X=(x_1,x_2) \ \text{ et } 2x_1+3x_2=0 \ldots\ldots (1)$$

$$Y \in F_1 \Rightarrow Y=(y_1,y_2) \ \text{ et } 2y_1+3y_2=0 \ldots\ldots (2)$$

$$On\ a : \lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1, x_2) + \beta.(y_1, y_2)$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\beta y_1, \beta y_2)$$

$$= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} 2(\lambda x_1 + \beta y_1) + 3(\lambda x_2 + \beta y_2) &= \lambda(\underbrace{2x_1 + 3x_2}_{(1)}) + \beta(\underbrace{2y_1 + 3y_2}_{(2)}) \\ &= \lambda.0 + \beta.0 = 0 \end{aligned}$$

On a : $\lambda.X + \beta.Y \in F_1$.

Alors, F_1 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

2) $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

F_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si :*

$$F_2 \neq \emptyset \quad et \quad \forall X, Y \in F_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_2.$$

On a : $F_2 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0) \in F_2$.

Remarquons que : $X = (3, 0) \in F_2$ *et* $Y = (0, 5) \in F_2$

Mais on a : $X + Y = (3, 0) + (0, 5) = (3, 5) \notin F_2$.

Alors, $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ *n'est pas un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

3) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y - 4z = 0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

F_3 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$F_3 \neq \emptyset \quad et \quad \forall X, Y \in F_3, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_3.$$

On a : $F_3 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0, 0) \in F_3$, *puisque* $3.0 + 2.0 - 4.0 = 0$

Soient $X, Y \in F_3$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_2 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3) \ \ et\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0......(1)$$

$$Y \in F_2 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3) \ \ et\ 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 = 0......(2)$$

On a :

$$\lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1, x_2, x_3) + \beta.(y_1, y_2, y_3)$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)$$

$$= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2, \lambda x_3 + \beta y_3)$$

De plus on a :

$$3(\lambda x_1+\beta y_1)+2(\lambda x_2+\beta y_2)-4(\lambda x_3+\beta y_3)$$

$$=\lambda\underbrace{(3x_1+2x_2-4x_3)}_{(1)}+\beta\underbrace{(3y_1+2y_2-4y_3)}_{(2)}$$

$$=\lambda.0+\beta.0=0$$

D'où $\lambda.X+\beta.Y\in F_3$ *.*

Donc, F_3 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

4) $F_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0 \text{ et } y-3z=0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

F_4 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$F_4\neq\emptyset \quad et \quad \forall X,Y\in F_4,\forall\lambda,\beta\in\mathbb{R}:(\lambda.X+\beta.Y)\in F_4.$$

On a : $F_4\neq\emptyset$, *car* $(0,0,0,0)\in F_4$, *puisque* $0+0=0$ *et* $0-3.0=0$

Soient $X,Y\in F_4$ *et* $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$.

$$X\in F_4\Rightarrow X=(x_1,x_2,x_3) \text{ et } x_1+x_2=0,\ x_2-3x_3=0......(1)$$

$$Y\in F_4\Rightarrow Y=(y_1,y_2,y_3) \text{ et } y_1+y_2=0,\ y_2-3y_3=0......(2)$$

$$\text{On a : }\lambda.X+\beta.Y=\lambda.(x_1,x_2,x_3)+\beta.(y_1,y_2,y_3)$$

$$=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)+(\beta y_1,\beta y_2,\beta y_3)$$

$$=\left(\underbrace{\lambda x_1+\beta y_1}_{z_1},\underbrace{\lambda x_2+\beta y_2}_{z_2},\underbrace{\lambda x_3+\beta y_3}_{z_3}\right)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= \lambda x_1+\beta y_1+\lambda x_2+\beta y_2 \\ &= \lambda(x_1+x_2)+\beta(y_1+y_2)=\lambda.0+\beta.0=0 \\ z_2-3z_3 &= \lambda x_2+\beta y_2-3(\lambda x_3+\beta y_3) \\ &= \lambda(x_2-3x_3)+\beta(y_2-3y_3)=\lambda.0+\beta.0=0 \end{aligned}$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in F_4$.

Donc, F_4 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

5) $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

F_5 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$F_5 \neq \emptyset \quad et \quad \forall X, Y \in F_5, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_5.$$

On a : $F_5 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0, 0, 0) \in F_5$, *puisque* $2.0 - 0 - 0 = 0$ *et* $0 - 2.0 - 0 = 0$

Soient $X, Y \in F_5$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_5 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3) \ \text{ et } 2x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$Y \in F_5 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3) \ \text{ et } 2y_1 - y_2 - y_3 = 0,\ y_1 - 2y_2 - y_3 = 0 \ldots\ldots. (2)$$

On a :

$$\lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1, x_2, x_3) + \beta.(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)$$

$$= \left(\underbrace{\lambda x_1 + \beta y_1}_{z_1}, \underbrace{\lambda x_2 + \beta y_2}_{z_2}, \underbrace{\lambda x_3 + \beta y_3}_{z_3}\right).$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} 2z_1 - z_2 - z_3 &= 2(\lambda x_1 + \beta y_1) - (\lambda x_2 + \beta y_2) - (\lambda x_3 + \beta y_3) \\ &= \lambda(2x_1 - x_2 - x_3) + \beta(2y_1 - y_2 - y_3) = \lambda.0 + \beta.0 = 0. \\ z_1 - 2z_2 - z_3 &= (\lambda x_1 + \beta y_1) - 2(\lambda x_2 + \beta y_2) - (\lambda x_3 + \beta y_3) \\ &= \lambda(x_1 - 2x_2 - x_3) + \beta(y_1 - 2y_2 - y_3) = \lambda.0 + \beta.0 = 0. \end{aligned}$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in F_5$.

Donc, F_5 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

6) $F_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

F_6 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si :*

$$F_6 \neq \emptyset \qquad et \quad \forall X, Y \in F_6, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_6.$$

On a : $F_6 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0) \in F_6$.

Remarquons que : $X = (1, -1) \in F_6$ *car* $(1)^2 + (-1) = 0$
et $Y = (-1, -1) \in F_6$ *car* $(-1)^2 + (-1) = 0$
Mais on a : $X + Y = (1, -1) + (-1, -1) = (0, -2) \notin F_2$ *car* $(0)^2 + (-2) \neq 0.$
Alors $F_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$ *n'est pas un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

7) $F_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = x + y + z - t = 3x + 2z = 1\}$
est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
F_7 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *si et seulement si :*

$$F_7 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_7, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_7.$$

On a : $(0, 0, 0, 0) \notin F_7$.
Alors $F_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = x + y + z - t = 3x + 2z = 1\}$ *n'est pas un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

3.7 Applications Linéaires

Définition 3.15 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application linéaire si et seulement si*

1. $\forall x, y \in E : f(x + y) = f(x) + f(y)$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E : \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$

Ceci est équivalent à dire

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \ \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On note par $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Terminologie et notations

Si $E = F$, l'application linéaire $f : E \to F$ est dite **endomorphisme**.
Si f est bijective et linéaire de $E \to F$, elle est dite **isomorphisme**.
Si f est un endomorphisme bijectif alors c'est un **automorphisme**.

Remarque 3.2 *Si f est une application linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.*

Exemple 3.26 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) = (x + y, x - z, y + 2z) \end{array}$$

f est-il application linéaire ? c'est à dire :

$$(\forall \lambda, \mu \in \Bbbk,\ \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y))?$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^3$, vérifions $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

$$x \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow y = (y_1, y_2, y_3)$$

On a :

$$\begin{aligned}
&f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3)) \\
=\ & f((\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)) \\
=\ & (\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_1 + \mu y_1 - \lambda x_3 - \mu y_3, \lambda x_2 + \mu y_2 + 2\lambda x_3 + 2\mu y_3) \\
=\ & \lambda(x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_2 + 2x_3) + \mu(y_1 + y_2, y_1 - y_3, y_2 + 2y_3) \\
=\ & \lambda f((x_1, x_2, x_3)) + \mu f((y_1, y_2, y_3)) = \lambda f(x) + \mu f(y).
\end{aligned}$$

Alors, f est une application linéaire.

Exemple 3.27 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = (x+y, 2y-x, x-y+1) \end{array}$$

g n'est pas linéaire car $g(0,0) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$.

Exemple 3.28 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & h(x,y) = |x-y| \end{array}$$

h n'est pas linéaire car $h(X+Y) \neq h(X) + h(Y)$.

Proposition 3.11 *(Une autre caractérisation des applications linéaires)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\Bbbk$ et $f \in L(E,F)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, x_2, ..., x_N) \in E^n, (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Bbbk^n$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Remarque 3.3 *Une application linéaire $f \in L(E,F)$ est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de E.*

Exemple 3.29 *Déterminer l'application linéaire f :*

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z), \end{array}$$

telle que :

$$\begin{cases} f(e_1) = & f((1,0,0)) = & (1,-1) \\ f(e_2) = & f((0,1,0)) = & (2,3) \\ f(e_3) = & f((0,0,1)) = & (-1,2) \end{cases}$$

($\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Soit (x,y,z) un élément de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f((x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)) = f(x,0,0)+f(0,y,0)+f(0,0,z) \\ &= xf(1,0,0)+yf(0,1,0)+zf(0,0,1) = x(1,-1)+y(2,3)+z(-1,2) \\ &= (x,-x)+(2y,3y)+(-z,2z) = (x+2y-z, -x+3y+2z) \end{aligned}$$

Donc, l'application linéaire f est définie comme suit :

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, -x+3y+2z). \end{array}$$

3.7.1 Noyau, Image d'une application linéaire

Définition 3.16 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. On appelle image de f et on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble défini par

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x), x \in E\}.$$

2. On appelle noyau de f et on $\ker f$ l'ensemble défini par

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}.$$

Propriétés de $\operatorname{Im} f$ **et** $\ker f$

Proposition 3.12 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\Bbbk$ et $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. Pour tout s. e. v. E_1 de E l'image directe $f(E_1)$ est un s. e. v. de F ; en particulier $\operatorname{Im} f$ *est un s. e. v. de F.*

2. Pour tout s. e. v. F_1 de F l'image réciproque $f^{-1}(F_1)$ est un s. e. v. de E ; en particulier $\ker f$ *est un s. e. v. de E.*

Preuve. 1. a) On a $0_E \in E_1$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(E_1)$. Par suite $f(E_1) \neq \emptyset$.

b) Soients $y_1, y_2 \in f(E_1)$, donc $\exists x_1, x_2 \in E_1, y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= f(x_1) + f(x_2) \\ &= f(x_1 + x_2) \in f(E_1). \end{aligned}$$

c) Soients $y \in f(E_1), \lambda \in \Bbbk$, donc $\exists x \in E_1, y = f(x)$.

$$\begin{aligned} \lambda y &= \lambda f(x) \\ &= f(\lambda x) \in f(E_1). \end{aligned}$$

Ce qui montre que que $f(E_1)$ est un s. e. v. de F.

2. a) On a $f^{-1}(F_1) \neq \emptyset$ car $f(0_E) = 0_F \in F_1$. Donc $0_E \in f^{-1}(F_1)$.

b) Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1)$

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1) &\Longrightarrow f(x_1) \in F_1 \text{ et } f(x_2) \in F_1 \\ &\Longrightarrow f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in F_1 \\ &\Longrightarrow x_1 + x_2 \in f^{-1}(F_1) \end{aligned}$$

c) Soient $x \in f^{-1}(F_1)$ et $\lambda \in \Bbbk$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F_1) \text{ et } \lambda \in \Bbbk &\Longrightarrow f(x) \in F_1 \text{ et } \lambda \in \Bbbk \\ &\Longrightarrow \lambda f(x) = f(\lambda x) \in F_1 \\ &\Longrightarrow \lambda x \in f^{-1}(F_1). \end{aligned}$$

Ce qui montre que que $f^{-1}(F_1)$ est un s. e. v. de E. ■

Proposition 3.13 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. *f est injective si et seulement si* $\ker f = \{0_E\}$
2. *f est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$.

Preuve. 1. On suppose que f est injective et soit $x \in \ker f$

$$\begin{aligned} x \in \ker f &\Longrightarrow f(x) = 0_F = f(0_E) \\ &\Longrightarrow x = 0_E \\ &\Longrightarrow \ker f = \{0_E\}. \end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose $\ker f = \{0_E\}$. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_F \\ &\Longrightarrow f(x_1 - x_2) = 0_F \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 = 0_E \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \\ &\Longrightarrow f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

2. Nous avons f est surjective $\Longleftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x) \in f(E)$, c'est à dire $F \subset f(E)$. On sait que $f(E) \subset F$, d'où $f(E) = F$. $\operatorname{Im} f = F$. ∎

Exemple 3.30 *Soit f est une application linéaire définie comme suit :*

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (y, x - z, z) \end{aligned}$$

Déterminer $\operatorname{Im} f$ *et* $\ker f$.

On a :

$$\begin{aligned}\ker f &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(0,0,0)\right\}\\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (y,x-z,z)=(0,0,0)\right\}\\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=0 \text{ et } x-z=0 \text{ et } z=0\right\}=\left\{(0,0,0)\right\}.\end{aligned}$$

d'où f *est injective.*

On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \left\{f(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{(y,x-z,z) : (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\\ &= \left\{x(0,1,0)+y(1,0,0)+z(0,-1,1) : (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}.\end{aligned}$$

Ce qui montre que les vecteurs $(0,1,0),(1,0,0)$ *et* $(0,-1,1)$ *engendrent* $\operatorname{Im} f$ *.*

Vérifions que $\left\{(0,1,0),(1,0,0),(0,-1,1)\right\}$ *est linéairement indépendant :*

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, *on suppose que*: $\alpha(0,1,0)+\beta(1,0,0)+\gamma(0,-1,1)=(0,0,0)$

$$\text{On a : } \alpha(0,1,0)+\beta(1,0,0)+\gamma(0,-1,1)=(0,0,0) \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\beta=0........(1)\\ \alpha-\gamma=0....(2)\\ \gamma=0........(3)\end{cases}$$

de $(1),(2)$ *et* (3) *on a :* $\alpha=\beta=\gamma=0$, *d'où* $\left\{(0,1,0),(1,0,0),(0,-1,1)\right\}$ *est libre.*

on conclut que $\left\{(0,1,0),(1,0,0),(0,-1,1)\right\}$ *est libre et engendre* $\operatorname{Im} f$ *, alors* $\left\{(0,1,0),(1,0,0),(0,-1,1)\right\}$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$. *De plus on a :*

$$\left.\begin{array}{r}\operatorname{Im} f\subset\mathbb{R}^3\\ \text{et}\\ \dim\ \operatorname{Im} f=3=\dim\mathbb{R}^3\end{array}\right\}\Longrightarrow \operatorname{Im} f=\mathbb{R}^3.$$

D'où f *est une application surjective.*

3.7.2 Composition de deux applications linéaires

Soient E, F, G trois $\Bbbk-$ev et $f : E \to F, g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire. En effet ;

Soient $\alpha, \beta \in \Bbbk$ et $x, y \in E$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha x + \beta y) &= g(f(\alpha x + \beta y)) = g(\alpha f(x) + \beta f(y)) \\ &= \alpha g(f(x)) + \beta g(f(x)) = \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

Proposition 3.14 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\Bbbk$ et $f : E \to F$ une application linéaire. Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est aussi un isomorphisme de F vers E.*

Preuve. Si f est bijective, alors f^{-1} est aussi bijective. Montrons que f^{-1} est linéaire. En effet, soient $\alpha, \beta \in \Bbbk$ et $x', y' \in F$

$$\begin{aligned}f^{-1}(\alpha x' + \beta y') &= f^{-1}(\alpha f(f^{-1}(x')) + \beta f(f^{-1}(y'))) \\ &= f^{-1}(f[\alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y')]) = \alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y').\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Définition 3.17 *Deux $\Bbbk-$ev E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de $\Bbbk-$ev de E sur F ou bien de F sur E.*

Proposition 3.15 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\Bbbk$ de dimensions finies. Pour que E et F soient isomorphes il faut et il suffit que* $\dim E = \dim F$.

3.7.3 Rang d'une application linéaire

Définition 3.18 *Soient E et F deux $\Bbbk-$ev de dimensions finies et $f \in L(E, F)$. On appelle rang de f et on note rg(f) l'entier naturel rg(f) $= \dim(\operatorname{Im} f)$.*

Remarque 3.4 *1. Si B est une base de E, alors pour tout $f \in L(E, F)$, on a*

$$rg(f) = \dim f(\langle B \rangle) = \dim \langle f(B) \rangle = rg(f(B)).$$

2. Pour tout $f \in L(E, F)$, on a

$$rg(f) \le \min(\dim E, \dim F).$$

Théorème 3.31 *(Théorème du rang)*

Soient E et F deux $\Bbbk-$ev de dimensions finies et $f \in L(E,F)$. Alors, on a

$$rg(f) = \dim E - \dim \ker f.$$

Proposition 3.16 *Soient E et F deux $\Bbbk-$ev de dimensions finies et $f \in L(E,F)$. Alors*

1. *f est injective si seulement si* $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim E$
2. *f est surjective si seulement si* $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim F$.

Corollaire 3.32 *Sur $\mathbb{R}$, on considère les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ et $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors*

1. *$n < p \Longrightarrow f$ n'est pas surjective.*
2. *$n > p \Longrightarrow f$ n'est pas injective.*
3. *$n = p$, on ne peut rien dire mais*

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

Preuve. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f.$$

1. Supposons par l'absurde que $n < p$ et f est surjective, alors $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^p = p$. Ce qui implique, $n = p + \dim \ker f$ et $n < p$, contradiction. Donc, f n'est pas surjective.

2. On suppose de même que f est injective et $n > p$. donc $\dim \ker f = 0$. Ce qui implique, $n = 0 + \dim \operatorname{Im} f$ et $\dim \operatorname{Im} f \leq p \Longrightarrow n \leq p$, contradiction. Donc, f n'est pas injective.

3. Si $n = p$, on obtient $n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$ et on ne peut rien dire.

Si de plus, par exemple, f est injective, alors $\dim \ker f = 0$. Ce qui nous donne, $n = \dim \operatorname{Im} f$ et comme $n = p$, on déduit que f est surjective. Par suite, f est bijective.

Raisonnement analogue si f est surjective. ■

3.8 Exercices

Exercise 3.33 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+3y, 2x-z) \end{array}$$

1) Vérifier que f est une application linéaire.

2) Déterminer $\ker f$ *le noyau de f, puis donner* $\dim\ker f$.

3) f est-elle injective ?

4) Donner $\dim\operatorname{Im} f$, *puis donner une base à* $\operatorname{Im} f$.

5) f est-elle surjective ?

Solution.

1) Vérifions que f est une application linéaire.

Soient $X = (x, y, z), Y = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(\lambda X + \mu Y) &= f(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) \\
&= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\
&= (\lambda x + \mu x' + 3\lambda y + 3\mu y', 2\lambda x + 2\mu x' - \lambda z - \mu z') \\
&= \lambda(x + 3y, 2x - z) + \mu(x' + 3y', 2x' - z') \\
&= \lambda f((x,y,z)) + \mu f((x',y',z')) = \lambda f(X) + \mu f(Y).
\end{aligned}$$

Donc, f est une application linéaire.

2) Déterminons $\ker f$ *le noyau de f, puis nous donnons* $\dim\ker f$.

On a :

$$\begin{aligned}
\ker f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 3y, 2x - z) = (0,0,0)\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{-1}{3}x \text{ et } z = 2x\right\} \\
&= \left\{x\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right) : x \in \mathbb{R}\right\},
\end{aligned}$$

d'où le vecteur $\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right)$ *engendre* $\ker f$ *de plus le vecteur* $\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right)$ *est libre car il n'est pas nul en déduit que* $\left\{\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right)\right\}$ *de* $\ker f$, *donc* $\dim\ker f = 1$.

3) f n'est pas injective car on a : $\ker f \neq (0,0,0)$.

4) Donnons $\dim\operatorname{Im} f$

On a : $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, *on déduit que :* $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Nous donnons une base à $\operatorname{Im} f$, *on a :*

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2 \\ et \\ \dim \ \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2,$$

donc $B = \{(1,0), (0,1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *est base de* $\operatorname{Im} f$.

5) f *est surjective car :* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Exercise 3.34 *Soit l'application*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x+2z, y+z, 3x+2z) \end{array}$$

1) Montrer que f *est linéaire.*

2) Déterminer $\mathbb{k}er$ f *et* $\operatorname{Im} f$ *en précisant leurs dimensions.*

3) f *est-elle bijective ? Justifier.*

Solution.

On a

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x+2z, y+z, 3x+2z).$$

1) Montrons que f *est linéaire*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $X = (x_1, y_1, z_1), Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_2 + 2(\alpha z_1 + \beta z_2), \alpha y_1 + \beta y_2 + (\alpha z_1 + \beta z_2), 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha z_1 + \beta z_2))$$

$$= (\alpha(x_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + 2z_2), \alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2), \alpha(3x_1 + 2z_1) + \beta(3x_2 + 2z_2))$$

$$= \alpha(x_1 + 2z_1, y_1 + z_1, 3x_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + 2z_2, y_2 + z_2, 3x_2 + 2z_2)$$

$$= \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2) = \alpha f(X) + \beta f(Y).$$

Donc f *est linéaire.*

2)

$$\begin{aligned} Kerf &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+2z, y+z, 3x+2z)=(0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2z=0 \ et \ y+z=0 \ et \ 3x+2z=0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0 \ et \ \ y=0 \ et \ z=0\right\} = \left\{(0,0,0)\right\}. \end{aligned}$$

$Kerf = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Longrightarrow \dim Kerf = 0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \left\{f(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(x+2z, y+z, 3x+2z) / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{x(1,0,3)+y(0,1,0)+z(2,1,2) / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\langle \underbrace{(1,0,3)}_{u_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{u_2}, \underbrace{(2,1,2)}_{u_3} \right\rangle. \end{aligned}$$

Donc $\{u_1,u_2,u_3\}$ *engendre* $\operatorname{Im} f$. *Montrons que cette famille est libre*

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}/\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned} \alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \alpha(1,0,3)+\beta(0,1,0)+\gamma(2,1,2)=(0,0,0) \\ &\Longrightarrow (\alpha+2\gamma, \beta+\gamma, 3\alpha+2\gamma)=(0,0,0) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+2\gamma=0 & ....(1) \\ \beta+\gamma=0 & ....(2) \\ 3\alpha+2\gamma=0 & ....(3) \end{cases} \end{aligned}$$

(3)-(1) donne $2\alpha=0$ *et donc* $\alpha=0$. *On remplace* α *dans (1), on aura* $\gamma=0$. *On remplace* γ *dans (2), on aura* $\beta=0$. *Donc* $\{u_1,u_2,u_3\}$ *est libre.*

Finalement $\{u_1,u_2,u_3\}$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$ *et par suite* $\dim\operatorname{Im} f=3$.

3) $Kerf=\{0_{\mathbb{R}^3}\}\Longrightarrow f$ *est injective*

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im} f\subset\mathbb{R}^3 \\ \dim\operatorname{Im} f=3=\dim\mathbb{R}^3 \end{array}\right\}\Longrightarrow \operatorname{Im} f=\underbrace{\mathbb{R}^3}_{espace\ d'arrivée}\Longrightarrow f \ est\ surjective.$$

Finalement f *est bijective.*

Bibliographie

[1] J. RIVAUD, Algèbre : Classes préparatoires et Université Tome 1, Exercices avec solutions, Vuibert.

[2] N. FADDEEV, I. SOMINSKI, Recueil d'exercices d'algèbre supérieure, Edition de Moscou

[3] M. BALABNE, M. DUFLO, M. FRISH, D. GUEGAN, Géométrie – 2e année du 1er cycle classes préparatoires, Vuibert Université.

[4] K. ALLAB, *Eléments d'analyse : Fonction d'une variable réelle.* Office des publications universitaires, (1986).

[5] B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, F. BOSCHET, *Exercices d'analyse 1er Cycle, 1er Année de Mathématiques Supérieurs*, Librairie Armand Colin (1977).

[6] D. DEGRAVE, C. DEGRAVE, H. MULLER, *Précis de mathématiques, Analyse- première année*, Bréal, Rosny 2003.

[7] J. P. ESCOFIER, *Toute l'analyse de la Licence : Cours et exercices corrigés*, Dunod 2014.

[8] M. MEHBALI, *Mathématiques : (Fonction d'une variable réelle)*, Office des publications universitaires, 1 Place centrale de Ben-Aknoun (Alger).

[9] J. M. MONIER, *ANALYSE MPSI / Cours, méthodes et exercices corrigés*, 5e édition. Dunod, Paris, 2006.