Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Juin 2023
Durée :01 heure 30

Examen de rattrapage de MATHS 2

Exercice 1. (**08 pts**)

1. En utilisant une intégration par parties, calculer

$$\int_1^e (x-1)\ln x\,dx.$$

2. On considère la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x}{x^4-1}.$$

a. Vérifier que : $f(x) = \dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{1}{4(x+1)} - \dfrac{x}{2\,(x^2+1)}$.
b. Calculer $\int f(x)\,dx$.
c. Résoudre l'équation différentielle $(x^4-1)y' - xy = 0$.

Exercice 2. (**06 pts**)

Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + 4y' + 4y = 3xe^x \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène correspondante.
2. Vérifier que $y_p(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{9}\right)e^x$ est une solution particulière de (E).
3. Déterminer la solution générale de (E).
4. Trouver la solution de l'équation (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = -3$.

Exercice 3. (**06 pts**)

On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S})\begin{cases} -4x - y - 2z = 3 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x - z = -3. \end{cases}$$

1. Écrire le système linéaire $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle $A \cdot X = b$.
2. Résoudre le système linéaire $(\mathcal{S})$:
   a. En utilisant la méthode de la matrice inverse.
   b. En utilisant la méthode de Gauss.

Bon courage

Corrigé de l'examen de rattrapage Maths II

Exercice n° 1 : (08 pts).

1). En utilisant l'intégration par parties, calculons :

$$\int_1^e (x-1)\ln x \, dx.$$

On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x-1 \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} - x \end{cases}$ 1

D'où : $\int_1^e (x-1)\ln x \, dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$ 0,5

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - e\right) - \left(\frac{e^2}{4} - e - \frac{1}{4} + 1\right)$$ 0,5

$$= \frac{e^2 - 3}{4}.$$ 0,5

2). Considérons la fonction : $f(x) = \frac{x}{x^4 - 1}$

a - Vérifions que : $f(x) = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}$

On a : $\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}$

$$= \frac{(x+1)(x^2+1) + (x-1)(x^2+1) - 2x(x-1)(x+1)}{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{(x^2+1)[x+1+x-1]-2x(x^2-1)}{4(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{4(x^4-1)}$$

$$= \frac{2x(x^2+1-x^2+1)}{4(x^4-1)}$$

1,5

$$= \frac{4x}{4(x^4-1)}$$

$$= \frac{x}{x^4-1}$$

b). Calculons la primitive de $f(x)$.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{4(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{4(x+1)}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

1,5 $= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + c,\ c \in \mathbb{R}$

c). Résolution de l'équation différentielle : $(x^4-1)y' - xy = 0$

On a : $(x^4-1)y' - xy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{x^4-1}\,dx$

0,5 $\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^4-1}\,dx$

0,5 $\Rightarrow \ln|y| = \frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln|x^2+1|}{4} + c,$

$c \in \mathbb{R}.$

$$\Rightarrow |y| = e^{c} \cdot e^{\ln|x-1|^{1/4}} \cdot e^{\ln|x+1|^{1/4}} \cdot e^{\ln|x^2+1|^{-1/4}}, \quad c \in \mathbb{R}$$ 1

$$\Rightarrow y = \pm e^{c} \sqrt[4]{|x-1|}\, \sqrt[4]{|x+1|}\, \frac{1}{\sqrt[4]{|x^2+1|}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^{c} \frac{\sqrt[4]{|x-1||x+1|}}{\sqrt[4]{|x^2+1|}}, \quad c \in \mathbb{R}$$ 0,5

$$\Rightarrow y = \pm e^{c} \frac{\sqrt[4]{|x^2+1|^3\,|x-1||x+1|}}{|x^2+1|}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Finalement les solutions de l'équation différentielle sont :

$$y(x) = k \frac{\sqrt[4]{|x^2+1|^3\,|x-1||x+1|}}{|x^2+1|}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice n° 2 : (06 pts)

Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + 4y' + 4y = 3x e^{x} \qquad (E)$$

1- Résolution de l'équation différentielle homogène :

* L'équation homogène associée a (E) est :

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad (E_h)$$ 0,5

* L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \qquad (E_r)$$ 0,5

(E_r) admet une racine réelle double $r_0 = -2$. 0,5

0,5

Donc la solution générale de (E_h) est : $y_h(x) = (C_1 x + C_2)\, e^{-2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Vérifions que : $y_p(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{9}\right)e^{x}$ est une solution particulière de (E).

On a : $y'_p(x) = \frac{1}{3}e^{x} + \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{9}\right)e^{x} = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right)e^{x}$. 0,5

et $y''_p(x) = \frac{e^{x}}{3} + \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right)e^{x} = \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{9}\right)e^{x}$. 0,5

Donc :
$$y'' + 4y' + 4y = \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{9}\right)e^{x} + \left(\frac{4x}{3} + \frac{4}{9}\right)e^{x} + \left(\frac{4x}{3} - \frac{8}{9}\right)e^{x}$$
$$= \left(\frac{x + 4x + 4x}{3} + \frac{4+4-8}{9}\right)e^{x}$$
1
$$= \frac{9x}{3}e^{x}$$
$$= 3x\,e^{x}.$$

Donc : $y_p(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{9}\right)e^{x}$ est une solution particulière de (E).

3). La solution générale de (E) est :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$$ 0,5
$$= (C_1 x + C_2)e^{-2x} + \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{9}\right)e^{x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4). Trouvons la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = -3$.

On a : $y'(x) = C_1 e^{-2x} - 2(C_1 x + C_2)e^{-2x} + \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right)e^{x}$ 0,5

Par suite :
$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 - \frac{2}{9} = 1 \\ C_1 - 2C_2 + \frac{1}{9} = -3 \end{cases}$$ 0,5

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{2}{3} \\ C_2 = \frac{11}{9} \end{cases}$$ 0,5

Finalement, la solution est :

$$y(x) = \left(-\frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right)e^{-2x} + \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{9}\right)e^{x}.$$

Exercice n° 3 : (6pts).

1) - Ecriture matricielle.

$(S) \Leftrightarrow A \cdot X = b$

avec $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

0,5 0,25 0,25

2) - Résolution du système (S).

a) - En utilisant la méthode de la matrice inverse.

On a : $AX = b \Rightarrow X = A^{-1}b$. 0,5

Calculons A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t(\mathrm{com}\, A).$$ 0,5

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 - 6 + 4 + 6 = 3.$$ 0,5

$$\mathrm{com}\, A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Donc $\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -3 \\ -1 & 10 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t(\text{com} A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 7 & 10 & 6 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

0,5

Ainsi : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{7}{3} & \frac{10}{3} & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1,5

Par suite : $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{7}{3} & \frac{10}{3} & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

0,5

b). En utilisant la méthode de Gauss.

$$(S)\ \begin{cases} -4x - y - 2z = 3 & L_1 \\ x + y + 2z = 0 & L_2 \\ 3x - z = -3 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - y - 2z = 3 & L_1 \\ 0 + 3y + 6z = 3 & L_2 \leftarrow L_1 + 4L_2 \\ 0 - y - \frac{10}{3} z = -1 & L_3 \leftarrow L_1 + \frac{4}{3} L_3 \end{cases}$$

1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - y - 2z = 3 & L_1 \\ 0 + 3y + 6z = 3 & L_2 \\ 0 + 0 - 4z = 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{cases}$$

0,5

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

0,5

Donc, le système (s) admet une unique solution

$$(x, y, z) = (-1, 1, 0).$$