Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Juin 2023
Durée :01 heure 30

Examen de rattrapage de MATHS 1

Exercice 1. (**04 pts**)
Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2$:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{(n+1)}{2n}.$$

Exercice 2. (**08 pts**)

I. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application définie par : $f(x)=\frac{1}{2(1+x^2)}+1$.

1. Calculer $f^{-1}\left(\left\{\frac{5}{4}\right\}\right)$ et $f^{-1}(\{2\})$.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Donner les intervalles I et J pour que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective ; puis déterminer l'application réciproque f^{-1} de f.

II. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x,y\in\mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f'(x)=f'(y).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence 0.

Exercice 3. (**08 pts**)

I. Soient $a\in\mathbb{R}$ et g la fonction définie par

$$g(x)=\begin{cases} a^2x & \text{si } x\leq 1,\\ a\sin\frac{\pi x}{2} & \text{si } x>1.\end{cases}$$

1. Déterminer a pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. On considère que $a=1$.
a) Énoncer le Théorème des valeurs intermédiaires.
b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution sur $]-1,1[$.

II. 1. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x>0,\exists c\in]x,x+1[, e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}=\frac{1}{c^2}e^{\frac{1}{c}}.$$

2. En déduire

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right).$$

Bon courage.

Corrigé de l'examen de rattrapage
de Maths 1.

Exercice n° 1 : 04 pt

- Montrons par récurrence que :

$$\underbrace{\forall n \geq 2, \quad \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}}_{P(n)} \qquad 1$$

* Pour $n = 2$, on a : $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$ et $\frac{2+1}{2\times 2} = \frac{3}{4}$

Donc $P(2)$ est vraie.

* Soit $n \geq 2$. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

1

et montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

On a : $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$$= \frac{n+1}{2n} \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \quad \text{(car } P(n) \text{ est vraie)}$$

1,5

$$= \frac{(n+1)\left((n+1)^2 - 1\right)}{2n(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^2 + \cancel{1} + 2n - \cancel{1}}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{n}(n+2)}{2\cancel{n}(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie.

* D'où, $\forall n \geq 2$, $P(n)$ est vraie. 0,5

Exercice n° 2 : 08 pts

I). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2(x^2+1)} + 1$$

1). Calculons $f^{-1}\left(\left\{\frac{5}{4}\right\}\right)$ et $f^{-1}(\{2\})$.

$$\begin{aligned}
f^{-1}\left(\left\{\frac{5}{4}\right\}\right) &= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \in \left\{\frac{5}{4}\right\}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{5}{4}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{2(x^2+1)} + 1 = \frac{5}{4}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{4}\right\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 1 = 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = 1\} \\
&= \{-1, 1\}.
\end{aligned}$$

0,5

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\{2\}) &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \in \{2\}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 2\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{2(x^2+1)} + 1 = 2\right\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2(x^2+1) = 1\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = -\frac{1}{2}\right\} = \emptyset
\end{aligned}$$

0,5

② - Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

i). Injectivité de f : D'après la question précédente, on a

$$f(1) = \frac{5}{4} = f(-1) \text{ mais } -1 \neq 1$$ 0,5

Donc f n'est pas injective.

ii). Surjectivité de f : f n'est pas surjective car 0,5

$y = 2$ n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente

iii). Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ou bien car elle n'est pas surjective). 0,5

③ Donnons les intervalles I et J pour que $f : I \to J$ soit bijective, et déterminons l'application réciproque f^{-1}.

1,5 $$f'(x) = -\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

Il est facile de voir que

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow]1, \tfrac{3}{2}]$$

est une bijection.

$\forall x \in I = [0, +\infty[$, $\forall y \in J =]1, \frac{3}{2}]$, on a :

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{1}{2(x^2+1)} + 1 = y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(x^2+1)} = y - 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = \frac{1}{2(y-1)}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2(y-1)} - 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{2(y-1)} - 1}$$

1

mais $x \in [0, +\infty[$, alors $x = +\sqrt{\frac{1}{2(y-1)} - 1}$

Donc : $f^{-1} :]1, \frac{3}{2}] \longrightarrow [0, +\infty[$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{2(y-1)} - 1}$$

Remarque : On peut considérer la bijection

$$f :]-\infty, 0] \longrightarrow]1, \frac{3}{2}]$$

et dans ce cas $f^{-1} :]1, \frac{3}{2}] \longrightarrow]-\infty, 0]$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{1}{2(y-1)} - 1}.$$

II. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f'(x) = f'(y).$$

(1). Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

a). Réflexivité de $\mathcal{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f'(x) = f'(x)$.

donc $x \mathcal{R} x$, d'où la réflexivité de $\mathcal{R}$. 0,5

b). Symétrie de $\mathcal{R}$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $x \mathcal{R} y$, on a :

$x \mathcal{R} y \Rightarrow f'(x) = f'(y) \Rightarrow f'(y) = f'(x) \Rightarrow y \mathcal{R} x$. 0,5

Donc : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$,

d'où la symétrie de $\mathcal{R}$.

c). Transitivité de $\mathcal{R}$.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. On a :

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = f'(y) \\ \text{et} \\ f'(y) = f'(z) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = f'(z)$$

0,5

$$\Rightarrow x \mathcal{R} z.$$

D'où la transitivité de $\mathcal{R}$.

0,5

Conclusion : de a), b) et c), $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

② . Déterminons $\bar{0}$.

$$\bar{0} = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \mathcal{R} 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \,/\, f'(x) = f'(0) \} =$$

1

$$= \{ x \in \mathbb{R} \,/\, -\frac{x}{(x^2+1)^2} = 0 \}$$

$$= \{0\}.$$

Exercice n° 3 :

I. Soient $a \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} a^2 x & \text{si } x \leq 1 \\ a \sin \frac{\pi x}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1). Continuité de g sur $\mathbb{R}$.

* Continuité de g sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

g est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ car la fonction $x \mapsto a^2 x$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]-\infty, 1[$, et la fonction $x \mapsto a \sin \frac{\pi x}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]1, +\infty[$. (1)

* Continuité de g en 1.

On a : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} a \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) = a.$ (0,5)

et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} a^2 x = a^2.$ (0,5)

et $g(1) = a^2$.

(0,5)

g est continue en 1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = g(1)$

$$\Leftrightarrow a = a^2$$

$$\Leftrightarrow a(1-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1. \quad (0,5)$$

Donc : g est continue en 1 si et seulement si $a \in \{0, 1\}$.

Conclusion : g est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a \in \{0, 1\}$.

(2). Considérons que $a = 1$.

a). Énonçons le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$\begin{cases} \odot\ g \text{ est continue sur } [a, b] \\ \odot\ g(a) \times g(b) < 0 \end{cases}$ (1)

alors $\exists\, c \in]a, b[: g(c) = 0$.

b). Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]-1, 1[$.

On a : g est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $[-1, 1]$. (1)

$g(-1) = -1$ et $g(1) = 1$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\, c \in]-1, 1[: g(c) = 0$.

II. - 1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrons que :

$$\forall x > 0,\ \exists\, c \in]x, x+1[,\ e^{1/x} - e^{1/x+1} = \frac{1}{c^2} e^{1/c}.$$

On considère la fonction $f(t) = e^{1/t}$.

Soit $x > 0$. On a f est définie et continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. (0,5)

D'après le théorème des accroissements finis :

$\exists\, c \in]x, x+1[: f(x+1) - f(x) = (x+1-x) f'(c)$

ou encore $\exists\, c \in]x, x+1[: e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{c^2} e^{1/c}$.

alors : $\exists\, c \in]x, x+1[: e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$. (1)

(2). En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$

On pose $h(x) = x^2 \left(e^{1/x} - e^{1/x+1} \right) = \frac{x^2}{c^2} e^{1/c} = \left(\frac{x}{c}\right)^2 e^{1/c}$. (0,5)

Or $0 < x < c < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} < \frac{x}{c} < 1 \\ \text{et} \\ e^{\frac{1}{x+1}} < e^{1/c} < e^{1/x} \end{cases}$$ (0,5)

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{c}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1/c} = e^0 = 1$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1^2 \cdot 1 = 1$. (0,5)