Cours de probabilités et statistique

Table des matières

Objectifs

Ce module est destine aux étudiants de première année. tout ce qui est requis pour aborder ce module c est les mathématiques be base. Le but final visé par ce mode serai une liste d objectifs a atteindre, a savoir ;

-Introduire les notions fondamentales en probabilités et en séries statistiques a une et a deux variables.

-Compréhension des concepts de base : Les étudiants doivent acquérir une compréhension approfondie des concepts fondamentaux de probabilité et de statistique, tels que les probabilités, les variables aléatoires, les distributions, les mesures de tendance centrale, les mesures de dispersion, etc.

-Application des concepts : Les étudiants doivent être en mesure d'appliquer les concepts de probabilité et de statistique a des problèmes concrets. Cela peut

inclure l'analyse de données, l'estimation des paramétrés, les tests d'hypothèses, la modélisation probabiliste, etc.

-Résolution de problèmes : Les étudiants doivent développer des compétences en résolution de problèmes lies a la probabilité et a la statistique. Cela implique

la capacité de formuler des problèmes, de sélectionner les méthodes et les techniques appropriées, d'interpréter les résultats et de communiquer efficacement

les conclusions.

-Analyse et interpretation des données :

Les étudiants doivent être capables d'analyser des ensembles de données, de les organiser de manière appropriée, d'identifier les tendances, les schémas et les relations, et d'interpréter les résultats de maniere significative.

Introduction

La plupart des décisions sont souvent prises en se basant sur l'analyse d'éléments incertains, tels que :

Quelle est la possibilité que les ventes diminuent si les prix augmentent ?

Quel est le degré de probabilité qu'une nouvelle méthode économique stimule la croissance ?

Quelle est la chance que le projet soit efficace ?

Quelles sont les perspectives qu'un nouvel investissement soit rentable ?

La probabilité est une mesure numérique de la probabilité d'un événement. Ainsi, les probabilités peuvent être utilisées pour mesurer le degré d'incertitude associé aux quatre événements mentionnés ci-dessus.

La valeur de la probabilité oscille toujours entre 0 et 1. Une probabilité proche de zéro implique qu'un événement a peu de chances de se produire. Si elle est égale à zéro, l'événement est considéré comme incertain. Une probabilité proche de 1 signifie qu'un événement est très susceptible de se produire. Si elle est égale à 1, l'événement est considéré comme certain. Si la probabilité est égale à 0,5, on considère que l'événement a autant de chances de se produire que de ne pas se produire (dans ce cas, nous sommes indécis).

Le but de cette partie du cours est de présenter aux étudiants une introduction conceptuelle aux probabilités et à leurs applications. Cette partie est composée de quatre chapitres qui permettent aux étudiants d'apprendre, de comprendre et de s'exercer à des problèmes qui correspondent à leur domaine d'études. Ces quatre chapitres traitent de l'expérience et des événements, de la théorie des probabilités, du calcul des probabilités et du théorème de Bayes.

Expériences et évenements

I

La probabilité est une théorie mathématique qui vise à mesurer ou déterminer de manière quantitative la chance qu'un événement ou une expérience aboutisse à un résultat donné. Cette théorie utilise souvent les résultats de l'analyse combinatoire, y compris les dénombrements tels que les permutations, les arrangements et les combinaisons. La théorie de probabilité est la pierre angulaire de tous les travaux en probabilités. Cependant, avant de se plonger dans l'analyse combinatoire, il est important de comprendre les bases de la probabilité.

1. Expérience et univers

Définition : Expérience

En utilisant la terminologie de la probabilité, une **expérience** est un **processus qui produit** un ensemble de **résultats prédéfinis et aléatoires.**

Remarque

Si l'expérience n'est pas répétée, **un seul des résultats** possibles se produira. qui sera **appelé issue.**

Voici quelques exemples d'expériences et de leurs résultats possibles :

Exemple

- Lancer une pièce de monnaie : Les résultats possibles sont "pile" ou "face".

- Lancer un dé à six faces : Les résultats possibles sont les nombres de 1 à 6.

- Tirer une carte d'un jeu de 52 cartes : Les résultats possibles sont les différentes cartes du jeu (as, roi, dame, etc.).

- Mesurer la hauteur d'un groupe d'étudiants : Les résultats possibles sont toutes les hauteurs mesurées.

Dans tous ces exemples, l'expérience produit un ensemble de résultats possibles, et un seul des résultats se produira lorsque l'expérience sera réalisée.

Définition : Univers et événement élémentaire

En probabilité, le **résultat d'une expérience aléatoire** est appelé un **événement élémentaire**. L'ensemble de **tous les résultats possibles** d'une expérience est appelé **l'univers** (ou l'événement fondamental) et est noté **Ω**. Un élément ω de Ω représente donc un événement élémentaire.

Voici comment déterminer les événements élémentaires et l'univers pour les expériences suivantes :

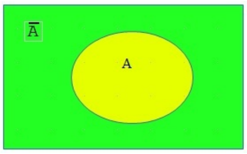
Exemple

1. On veut sélectionner trois éléments parmi les suivants : A, B, C, D, E, F.
   Les événements élémentaires sont :- {A, B, C} - {A, B, D}- {A, B, E}- {A, B, F}- {A, C, D}- {A, C, E} - {A, C, F}- {A, D, E}- {A, D, F}- {A, E, F}- {B, C, D}- {B, C, E}- {B, C, F}- {B, D, E}- {B, D, F}- {B, E, F}- {C, D, E}- {C, D, F}- {C, E, F}- {D, E, F} .
   L'univers est l'ensemble de tous les résultats possibles, soit Ω = { {A, B, C} , {A, B, D},{A, B, E}, {A, B, F}, {A, C, D}, {A, C, E}, {A, C, F}, {A, D, E}, {A, D, F}, {A, E, F}, {B, C, D}, {B, C, E}, {B, C, F}, {B, D, E}, {B, D, F},{B, E, F}, {C, D, E}, {C, D, F}, {C, E, F}, {D, E, F} }.
2. On lance deux fois deux pièces de monnaie. Les événements élémentaires sont :- {Pile, Pile, Pile, Pile}- {Pile, Pile, Pile, Face}
   - {Pile, Pile, Face, Pile}- {Pile, Pile, Face, Face}
   - {Pile, Face, Pile, Pile}- {Pile, Face, Pile, Face}
   - {Pile, Face, Face, Pile}- {Pile, Face, Face, Face}
   - {Face, Pile, Pile, Pile}- {Face, Pile, Pile, Face}
   - {Face, Pile, Face, Pile}- {Face, Pile, Face, Face}
   - {Face, Face, Pile, Pile}- {Face, Face, Pile, Face}
   - {Face, Face, Face, Pile}- {Face, Face, Face, Face}
   L'univers est l'ensemble de tous les résultats possibles, soit :
   Ω = { {Pile, Pile, Pile, Pile},{Pile, Pile, Pile, Face}, {Pile, Pile, Face, Pile},{Pile, Pile, Face, Face}, {Pile, Face, Pile, Pile}, {Pile, Face, Pile, Face}
   , {Pile, Face, Face, Pile}, {Pile, Face, Face, Face}, {Face, Pile, Pile, Pile}, {Face, Pile, Pile, Face}, {Face, Pile, Face, Pile}, {Face, Pile, Face, Face}
   , {Face, Face, Pile, Pile}, {Face, Face, Pile, Face}, {Face, Face, Face, Pile}, {Face, Face, Face, Face} }.
3. Lors de la nomination du président et du secrétaire général du conseil d'administration d'une entreprise, cinq personnes, dont deux femmes et trois hommes, se sont présentées. Il est dit que dans les deux postes, les personnes ne doivent pas avoir les mêmes sexes. C'est-à-dire que si le premier poste est occupé par un homme, le deuxième poste serait occupé par une femme, et vice versa.
   Les événements élémentaires sont :

- {homme pour le poste de président, femme pour le poste de secrétaire général}
- {femme pour le poste de président, homme pour le poste de secrétaire général}

  L'univers est l'ensemble de tous les résultats possibles, soit :
  Ω = {{homme pour le poste de président, femme pour le poste de secrétaire général}, {femme pour le poste de président, homme pour le poste de secrétaire général}}

Définition : Événement contraire



Le **contraire de l'événement A** est l'événement $\bar{A}$ formé par toutes les **issues de l'univers Ω** qui ne **sont pas dans A.**

Exemple

Prenons l'exemple du lancer d'un dé à 6 faces : Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}

Posons A : "« le numéro obtenu est pair »". On a A={2 ;4 ;6}

Alors $\bar{A}$ est l'événement "« Le numéro obtenu est impair »". $\bar{A}=\{1;3;5\}$

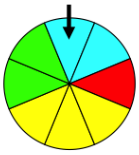
2. Exercice :

A un examen se présentent 5 personnes dont 3 femmes et 2 hommes, on veut les classer selon leurs résultats obtenus.

Donnez la liste des possibilités de classement, c´est à dire les événements élémentaires, puis donner l´univers relatif.

3. Exercice : Exemples intéressants d'expériences aléatoires

Roue de couleurs

On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde la couleur du secteur marqué par la flèche.  *(cf. p.13)* *(cf. p.13)*

Question 1

[solution n°1 p.14*]*

Quel est l'univers associé à cette expérience ?

Combien possède t-il d'issues ?

Question 2

[solution n°2 p.14*]*

Citer deux événements non élémentaires.

Citer un événement élémentaire.

Citer un événement impossible.

On écrira chacune des réponses sous forme d'une description par une phrase puis sous forme d'un ensemble.

Jeu de Pile ou Face

On lance deux fois une pièce de monnaie et on note à chaque fois la face "« Pile »" ou "« Face »" obtenue

Question 3

[*solution* n°3 p.14]

Quel est l'univers associé à cette expérience ?

Combien possède t-il d'issues ?

Question 4

[*solution* n°4 p.14]

Citer deux événements non élémentaires.

Citer un événement élémentaire.

Citer un événement impossible.

On écrira chacune des réponses sous forme d'une description par une phrase puis sous forme d'un ensemble.

Jeu avec deux dés

On lance deux fois un dé à 6 faces bien équilibré et on note le numéro de chaque face obtenue.

Question 5

[*solution* n°5 p.15]

Quel est l'univers associé à cette expérience ?

Combien possède t-il d'issues ?

Question 6

[*solution* n°6 p.15]

On considère les événements

A : "« La somme des deux faces est 5 »"

B : "« La somme des deux faces est égale au produit des deux faces »"

Écrire chacun de ces événements sous forme d'ensembles.

Combien A et B possèdent-ils d'issues ?

4. Permutations, arrangement et combinaisons

Définition

Une permutation de n objets est une façon de les ranger ou de les ordonner sans répétition. Le nombre de permutations possible est de $n!$

Exemple

Si nous avons trois hommes (Paul, Jamil et Samy) et que nous voulons les placer aux postes de président, vice-président et secrétaire général d'une entreprise, l'ordre dans lequel les postes sont distribués constitue une permutation. Dans cet exemple, il est impossible qu'une personne occupe deux postes à elle seule, ce qui signifie qu'il y a $3!$ (ou 3 factorielle) = $3\times2\times1=6$ permutations possibles : PJS, PSJ, JPS, JSP, SPJ et SJP.

De manière générale, pour n objets, il existe n! permutations. La notation n! représente le produit de tous les entiers positifs de 1 à n. Par exemple, $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$.

Définition : Arrangement

On appelle arrangement de n objets pris parmi N, chacun des groupements ordonnés de n objets choisis sans répétition parmi les N.

Fondamental : Important !

De façon plus générale, on démontre que le nombre d'arrangements de n objets pris parmi N, nombre noté A_n^N, est :

$$A_n^N = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Si N=n, l'arrangement devient une permutation.

Exemple

- Prenons un exemple qui consiste à choisir, parmi les trois personnes d'une association (P, J et S), deux personnes au poste de président et de secrétaire général. Les arrangements de deux personnes prises parmi les trois sont : PJ, PS, JP, JS, SP, SJ ; soit 6 arrangements. On peut retrouver ce résultat en raisonnant comme pour les permutations. Pour le premier poste, il y a 3 choix possibles et, pour chacun de ces 3 choix, il y a 2 choix pour le deuxième poste, soit au total 3 × 2 = 6.
- Un autre exemple d'arrangement de n objets pris parmi N est le choix de deux cartes à jouer parmi un jeu de 52 cartes. Le nombre d'arrangements possibles est donné par la formule,

$$A_2^{52} = \frac{52!}{(50)!} = \frac{52 \times 51 \times 50!}{(50)!} = 52 \times 51 = 2652$$

Définition : Combinaison

On appelle combinaison de n objets pris parmi N, chacun des groupements de n objets sans considération de l'ordre dans lequel ils sont rangés ou choisis.

Exemple

parmi les trois (P, J, S) au poste de président et de secrétaire général, on est en fait davantage intéressé par les combinaisons de postes distribués, plutôt que par l'ordre dans lequel les personnes sont affectées. Par conséquent, les combinaisons de deux personnes prises parmi les trois sont : PJ (qui signifie aussi JP), PS (qui signifie aussi SP), et JS (qui signifie aussi SJ); soit 3 combinaisons.

Fondamental : Formule de la combinaison

De façon plus générale, le nombre de combinaisons de n objets (sans tenir compte de l'ordre de ces objets) pris dans un ensemble de N objets est noté C_n^N et est donné par la formule : $C_n^N = \frac{N!}{n! \times (N-n)!} = \frac{A_n^N}{n!}$

Exemple

Supposons que nous avons un groupe de 8 personnes, et que nous voulons former un comité de 4 personnes à partir de ce groupe. Nous pouvons utiliser la formule pour le nombre de combinaisons de 4 personnes prises parmi 8 : $C_4^8 = \frac{8!}{4! \times (8-4)!} = \frac{A_4^8}{4!} = 70$ Il y a donc 70 façons de former un comité de 4 personnes à partir d'un groupe de 8 personnes.

Cet exemple montre comment les combinaisons peuvent être utilisées pour calculer efficacement le nombre de façons de choisir un sous-ensemble d'éléments à partir d'un ensemble de taille donnée. Cela peut être utile dans de nombreux domaines, tels que la sélection d'échantillons pour des études de recherche ou la constitution de commissions pour des organisations.

5. Exercice : Dénombrements - listes, arrangements, combinaisons, et variations

Triangle

On trace dans un plan $n \geq 3$ droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes).

Question 1

[*solution* n°7 p.15]

Combien de triangles a-t-on ainsi tracé?

Podium!

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

Question 2

[*solution* n°8 p.15]

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles?

Anagrammes

Un anagramme correspond à une permutation des lettres

Question 3

[*solution* n°9 p.15]

Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.

Indice :

...certaines permutations donnent le même résultat.

Maîtriser les notions de cours

II

1. Exercice

[solution n°10 p.16]

On dispose de dix jetons numérotés

de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour

former un « paquet ». Combien de « paquets »

contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi

former ?

Veuillez choisir une réponse.

- ☐ 330
- ☐ 110
- ☐ 180
- ☐ 900

2. Exercice

[solution n°11 p.16]

Dans une série statistique de N données qui prennent p valeurs différentes, l'écart-type :

Veuillez choisir une réponse.

- ○ comporte deux solutions opposées
- ○ est toujours inférieur à la variance
- ○ peut être négatif

3. Exercice

[solution n°12 p.17]

Un quartier résidentiel comprend 99 unités d'habitation ayant une valeur locative

moyenne de 10000 Da. Deux nouvelles unités d'habitation sont construites dans le quartier

: l'une a une valeur locative de 7000 Da et l'autre, une villa luxueuse, a une valeur

locative de 114000 Da.

– Quelle est la nouvelle moyenne de valeur locative pour le quartier ?

4. Exercice

[solution n°13 p.17]

Dans une série statistique de N données qui prennent p valeurs différentes, l'écart-type mesure :

Veuillez choisir une réponse.

- la dispersion de la série de p valeurs autour de la moyenne
- la distribution des p valeurs
- l'intervalle entre la valeur la plus basse et celle la plus élevée

5

.

Conseil : Lien utile

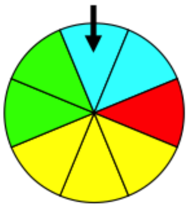
** (cf. p.13) (cf. p.) https://www.youtube.com/watch?v=FNunfXkPq14&list=PLJOPLcr85yakekhpCsq32BbC1KGSAtjOD&index=2 [mp4]*

Ressources annexes

>

>

> roue



Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 7

Ω={ bleu ; vert ; jaune ; rouge }

> **Solution** n°2

Exercice p. 7

Deux événements non élémentaires

A : "« Obtenir la couleur bleue ou la couleur rouge »"

A= { bleu ; rouge }

B : "« ne pas obtenir la couleur verte »"

B= { bleu ; jaune : rouge }

Un événement élémentaire

C : "« obtenir la couleur verte »"

c={vert}

Un événement impossible

D : "« obtenir la couleur orange »"

D=Ø

> **Solution** n°3

Exercice p. 7

Ω={ (P,P) ; (P,F) ; (F,P) ; (F,F) }

L'expérience possède 4 issues possibles.

> **Solution** n°4

Exercice p. 8

Deux événements non élémentaires

A : "« Obtenir exactement une fois Pile »"

A= { (P,F) ; (F ;P) }

B : "« obtenir au moins une fois Pile »"

B={ (P,F) ; (F ;P) ; (P ;P) }

Un événement élémentaire

C : "« ne pas obtenir Pile »"

c={ (F,F) }

Un événement impossible

D : "« obtenir trois fois Pile »"

D=Ø

> **Solution** n°5

Exercice p. 8

Ω={ (1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; ... ; (1,6) ... ; (2,1) ; ... ; (2,6) ; ... (6,1) ; ... ; (6,6)}

L'expérience possède $6\times6=36$ issues possibles.

> **Solution** n°6

Exercice p. 8

A={ (1,4) ; (2,3) ; (3,2) ; (4,1) }

A possède 4 issues.

B={(2,2)}

B est un événement élémentaire.

> **Solution** n°7

Exercice p. 10

Un triangle est déterminé par 3 droites (ses côtés). Il y a autant de triangles que de possibilités de choisir 3 droites parmi n, c'est-à-dire C_3^n

> **Solution** n°8

Exercice p. 10

1. Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18. Le nombre de podiums possibles est donc égal à 20×19×18=6840.
2. Le premier concurrent est Emile. Pour les autres places, il y a 19 puis 18 choix possibles; Le nombre de podiums ainsi constitués est de 19×18.
3. Il y a trois choix possibles pour la place d'Emile. Une fois ce choix fixé, il y a 19 choix possibles pour la première des deux autres places, puis 18 choix possibles pour la seconde des deux autres places. Le nombre de podiums vérifiant ces conditions est donc de 3×19×18.
4. L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi 20, c'est-à-dire $C_3^{20}=1140$.

> **Solution** n°9

Exercice p. 10

Un anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot! On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombres de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

- **MATHS** : $5!$
- **RIRE** : $\frac{4!}{2!}$
- **ANANAS :** $\frac{6!}{2!\times3!}$

Pour compter les anagrammes d'ANANAS, on peut aussi :

- choisir la position des 3 lettres A : il y a C_3^6 choix possibles;
- choisir la position des 2 lettres N: il y a C_2^3 choix possibles (il reste 3 places une fois qu'on a placé les A
- le **S** est alors placé.

Le nombre d'anagrammes d'ANANAS est donc $(C_2^3)\times(C_3^6=\frac{6!}{3!\times2!})$.

> **Solution** n°10

Exercice p. 11

On dispose de dix jetons numérotés

de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour

former un « paquet ». Combien de « paquets »

contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi

former ?

Veuillez choisir une réponse.

- [ ] 330
- [x] 110
- [ ] 180
- [ ] 900

> **Solution** n°11

Exercice p. 11

Dans une série statistique de N données qui prennent p valeurs différentes, l'écart-type :

Veuillez choisir une réponse.

- ○ comporte deux solutions opposées

- ◉ est toujours inférieur à la variance
- ○ peut être négatif

> **Solution** n°12

Exercice p. 12

Un quartier résidentiel comprend 99 unités d'habitation ayant une valeur locative
moyenne de 10000 Da. Deux nouvelles unités d'habitation sont construites dans le quartier
: l'une a une valeur locative de 7000 Da et l'autre, une villa luxueuse, a une valeur
locative de 114000 Da.
– Quelle est la nouvelle moyenne de valeur locative pour le quartier ?
110000

> **Solution** n°13

Exercice p. 12

Dans une série statistique de N données qui prennent p valeurs différentes, l'écart-type mesure :
Veuillez choisir une réponse.

- ◉ la dispersion de la série de p valeurs autour de la moyenne
- ○ la distribution des p valeurs
- ○ l'intervalle entre la valeur la plus basse et celle la plus élevée