Cours de probabilités et statistique

Table des matières

Objectifs

Ce module est destine aux étudiants de première année. tout ce qui est requis pour aborder ce module c est les mathématiques be base. Le but final visé par ce mode serai une liste d objectifs a atteindre, a savoir ;

-Introduire les notions fondamentales en probabilités et en séries statistiques a une et a deux variables.

-Compréhension des concepts de base : Les étudiants doivent acquérir une compréhension approfondie des concepts fondamentaux de probabilité et de statistique, tels que les probabilités, les variables aléatoires, les distributions, les mesures de tendance centrale, les mesures de dispersion, etc.

-Application des concepts : Les étudiants doivent être en mesure d'appliquer les concepts de probabilité et de statistique a des problèmes concrets. Cela peut

inclure l'analyse de données, l'estimation des paramétrés, les tests d’hypothèses, la modélisation probabiliste, etc.

-Résolution de problèmes : Les étudiants doivent développer des compétences en résolution de problèmes lies a la probabilité et a la statistique. Cela implique

la capacité de formuler des problèmes, de sélectionner les méthodes et les techniques appropriées, d’interpréter les résultats et de communiquer efficacement

les conclusions.

-Analyse et interpretation des données :

Les étudiants doivent être capables d'analyser des ensembles de données, de les organiser de manière appropriée, d'identifier les tendances, les schémas et les relations, et d’interpréter les résultats de maniere significative.

Introduction

La plupart des décisions sont souvent prises en se basant sur l'analyse d'éléments incertains, tels que :

Quelle est la possibilité que les ventes diminuent si les prix augmentent ?

Quel est le degré de probabilité qu'une nouvelle méthode économique stimule la croissance ?

Quelle est la chance que le projet soit efficace ?

Quelles sont les perspectives qu'un nouvel investissement soit rentable ?

La probabilité est une mesure numérique de la probabilité d'un événement. Ainsi, les probabilités peuvent être utilisées pour mesurer le degré d'incertitude associé aux quatre événements mentionnés ci-dessus.

La valeur de la probabilité oscille toujours entre 0 et 1. Une probabilité proche de zéro implique qu'un événement a peu de chances de se produire. Si elle est égale à zéro, l'événement est considéré comme incertain. Une probabilité proche de 1 signifie qu'un événement est très susceptible de se produire. Si elle est égale à 1, l'événement est considéré comme certain. Si la probabilité est égale à 0,5, on considère que l'événement a autant de chances de se produire que de ne pas se produire (dans ce cas, nous sommes indécis).

Le but de cette partie du cours est de présenter aux étudiants une introduction conceptuelle aux probabilités et à leurs applications. Cette partie est composée de quatre chapitres qui permettent aux étudiants d'apprendre, de comprendre et de s'exercer à des problèmes qui correspondent à leur domaine d'études. Ces quatre chapitres traitent de l'expérience et des événements, de la théorie des probabilités, du calcul des probabilités et du théorème de Bayes.

CALCUL DES PROBABILITÉS

I

1. COMPLÉMENT D'UN EVENEMENT

Fondamental : Le complément d'un événement

Le complément d'un événement est l'événement qui se produit lorsque l'événement initial ne se produit pas. En d'autres termes, si A est un événement, alors le complément de A, noté $(\bar{A})$, est l'événement qui se produit lorsque A ne se produit pas. Ainsi, la probabilité de l'événement est : $p(\bar{A})=1-p(A)$.

Exemple

Soit un sac contenant 10 balles, 6 rouges et 4 bleues. On tire une balle au hasard du sac.

L'événement A est "tirer une balle rouge".

L'événement B est "tirer une balle bleue".

Le complément de l'événement A est "tirer une balle qui n'est pas rouge". Cela signifie que l'on tire une balle bleue. La probabilité de l'événement A est de 6/10, alors que la probabilité de son complément est de 4/10.

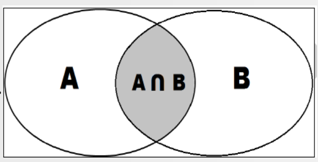
Le complément de l'événement B est "tirer une balle qui n'est pas bleue". Cela signifie que l'on tire une balle rouge. La probabilité de l'événement B est de 4/10, alors que la probabilité de son complément est de 6/10.

Il est important de noter que la probabilité de l'événement A et de son complément (l'événement "tirer une balle qui n'est pas rouge") doivent toujours totaliser 1. De même, la probabilité de l'événement B et de son complément (l'événement "tirer une balle qui n'est pas bleue") doivent également totaliser 1.

2. UNION DE DEUX ÉVÉNEMENTS INCLUSIFS

Fondamental

L'union de A et B est l'événement qui contient tous les résultats appartenant à A ou B ou les deux. L'union est notée A∪B.



La probabilité de l'union de deux événements A et B inclusifs est la suivante :

$p(A\cup B)=p(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Ou encore,

$$P(A \cap B) = p(A) + P(B) - p(A \cup B)$$

Exemple

Soit un groupe de 50 étudiants, 30 étudient les mathématiques et 25 étudient la physique. 15 étudiants étudient à la fois les mathématiques et la physique.

L'événement A est "étudier les mathématiques".

L'événement B est "étudier la physique".

L'union de ces deux événements (A ou B) est l'événement "étudier les mathématiques ou la physique ou les deux". Cela signifie que l'on regroupe tous les étudiants qui étudient l'un ou l'autre ou les deux matières. Pour calculer la probabilité de cette union, on doit prendre en compte les étudiants qui étudient les mathématiques, ceux qui étudient la physique, mais aussi ceux qui étudient les deux matières.

La probabilité de l'événement A est de 30/50, la probabilité de l'événement B est de 25/50, et la probabilité de l'intersection (étudier à la fois les mathématiques et la physique) est de 15/50. Pour calculer la probabilité de l'union, on doit donc soustraire la probabilité de l'intersection (car elle a été comptée deux fois) :

P(A ou B)=P(A)+P(B)-P(A et B)

P(A ou B)=30/50+25/50-15/50

P(A ou B)=40/50

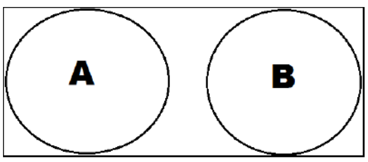
P(A ou B)=0,8

Ainsi, la probabilité qu'un étudiant étudie les mathématiques ou la physique (ou les deux) est de 0,8.

3. UNION DE DEUX ÉVÉNEMENTS MUTUELLEMENT EXCLUSIFS

Définition : mutuellement exclusifs

Deux événements A et B sont mutuellement exclusifs si, lorsqu'un événement se produit, l'autre ne peut pas se produire. Ainsi, une condition pour que A et B soient mutuellement exclusifs est que leur intersection soit vide. C'est-à-dire que $P(A \cap B)=0$



Fondamental

La probabilité de l'union de deux événements A et B mutuellement exclusifs est la suivante : $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

Exemple

Soit un groupe de 50 étudiants, 30 étudient les mathématiques et 25 étudient la physique. Aucun étudiant n'étudie les deux matières.

L'événement A est "étudier les mathématiques".

L'événement B est "étudier la physique".

Puisque aucun étudiant n'étudie les deux matières, les événements A et B sont mutuellement exclusifs. L'union de ces deux événements (A ou B) est l'événement "étudier les mathématiques ou la physique". Cela signifie que l'on regroupe tous les étudiants qui étudient soit les mathématiques, soit la physique, mais pas les deux.

La probabilité de l'événement A est de 30/50, la probabilité de l'événement B est de 25/50. Puisque les événements sont mutuellement exclusifs, la probabilité de leur union est simplement la somme de leurs probabilités :

P(A ou B) =P(A)+P(B)-P(A∩B)

P(A ou B)=30/50+25/50-0

P(A ou B)=55/50

Cependant, cette réponse est impossible, car la probabilité doit être comprise entre 0 et 1.

Soit un groupe de 100 personnes, 60 personnes ont un chien et 40 personnes ont un chat. Aucune personne n'a à la fois un chien et un chat.

L'événement A est "avoir un chien".

L'événement B est "avoir un chat".

Puisque aucune personne n'a à la fois un chien et un chat, les événements A et B sont mutuellement exclusifs. L'union de ces deux événements (A ou B) est l'événement "avoir un chien ou un chat". Cela signifie que l'on regroupe toutes les personnes qui ont soit un chien, soit un chat, mais pas les deux.

La probabilité de l'événement A est de 60/100, la probabilité de l'événement B est de 40/100. Puisque les événements sont mutuellement exclusifs, la probabilité de leur union est simplement la somme de leurs probabilités :

P(A ou B)=P(A)+P(B)

P(A ou B)=60/100+40/100

P(A ou B)=1

4. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Définition : Conditionnelle

Il arrive souvent que la probabilité d'un événement soit affectée par la survenue d'un événement lié. Par exemple, si l'on considère un événement A avec une probabilité P(A), l'information de la survenue d'un événement B lié à A peut nous permettre de calculer une nouvelle probabilité de l'événement A. Cette nouvelle probabilité, appelée probabilité conditionnelle, est notée P(A/B). Cette probabilité est calculée de la manière suivante

,P(A/B)=((P(A∩B))/(P(B)))

De même, on peut écrire :

P(B/A)=((P(B∩A))/(P(A)))

Ces formules permettent de constater que

P(A∩B)=P(A/B)P(B)=P(B/A)P(A)

Exemple

Supposons que dans une classe de 30 élèves, 15 sont des filles et 15 sont des garçons. Parmi les filles, 6 ont les cheveux blonds et parmi les garçons, 4 ont les cheveux blonds.

Si nous choisissons un élève au hasard dans la classe, quelle est la probabilité que cet élève soit une fille avec des cheveux blonds ?

La probabilité d'avoir une fille est de 15/30=0,5. La probabilité d'avoir une fille avec des cheveux blonds est de 6/30=0,2.

Maintenant, supposons que nous sachions déjà que l'élève choisi est une fille. Quelle est la probabilité que cette fille ait les cheveux blonds ?

La probabilité conditionnelle de l'événement "avoir des cheveux blonds" sachant que l'on a choisi une fille est notée P(blonds | fille), et se calcule comme suit :

P(blonds | fille) = P(fille et blonds) /P(fille)

P(fille et blonds) est la probabilité d'avoir une fille avec des cheveux blonds, qui est de 6/30=0,2.

P(fille) est la probabilité d'avoir une fille, qui est de 15/30=0,5.

Donc, P(blonds | fille) =0,2/0,5=0,4.

La probabilité conditionnelle que l'élève choisi soit une fille avec des cheveux blonds est donc de 0,4.

5. ÉVÉNEMENTS INDEPENDANTS

Définition

Deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un ne dépendant pas de la réalisation de l'autre. De ce fait, si l'on note deux événement A et B indépendants, la probabilité que l'événement A soit réalisé sachant que celui de B a été déjà réalisé donne le même résultat que si l'on calculait juste la probabilité que l'événement A soit réalisé. Autrement dit,

P(A/B)=P(A).

On constate que si deux événements A et B sont indépendants si :

P(A∩B)=P(A)P(B)

Exemple

Supposons qu'un joueur de basket-ball a une probabilité de 0,6 de réussir un lancer franc. Si le joueur effectue deux lancers francs indépendants, quelle est la probabilité qu'il réussisse les deux ?

La probabilité que le joueur réussisse le premier lancer franc est de 0,6. La probabilité que le joueur réussisse le deuxième lancer franc est également de 0,6. Puisque les deux lancers francs sont indépendants, la probabilité que le joueur réussisse les deux lancers francs est simplement le produit des probabilités de chaque lancer :

P(les deux lancers sont réussis) =P(premier lancer réussi) × P(deuxième lancer réussi)

P(les deux lancers sont réussis) =0,6x0,6

P(les deux lancers sont réussis) =0,36

Ainsi, la probabilité que le joueur réussisse les deux lancers francs est de 0,36.

6. THÉORÈME DE BAYES

Fondamental

Le théorème de Bayes provient de celui de la probabilité conditionnelle. Soit une partition de Ω en événement {A_1,A_2,...,A_{n}} de probabilités strictement positives, P(A_{i})>0 pour 1≤i≤n, et mutuellement exclusifs deux à deux. On suppose que les probabilités des événements inclus dans chacun des A_{i} sont connues et on va donc décomposer un événement quelconque B sur ce système.

On aboutit ainsi à la formule de la probabilité totale : $p(A_i/B)=\frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}=\frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\cdot P(A_i)}$

Exemple

Un exemple d'application courant du théorème de Bayes est la détection de maladies. Supposons que nous avons un test de dépistage de la maladie X qui a une sensibilité de 95% et une spécificité de 90%. Cela signifie que le test donne un résultat positif pour 95% des personnes atteintes de la maladie X et un résultat négatif pour 90% des personnes qui ne sont pas atteintes de la maladie X.

Maintenant, supposons que la prévalence de la maladie X dans la population est de 1%. Nous voulons savoir quelle est la probabilité qu'une personne ayant un résultat positif au test soit effectivement atteinte de la maladie X.

En utilisant le théorème de Bayes, nous pouvons calculer cette probabilité comme suit :

-P(X)=0,01 (probabilité pré-test de la maladie X dans la population)

-P(Pos|X)=0,95 (sensibilité du test, probabilité d'un résultat positif sachant que la personne est atteinte de la maladie X)

-P(Neg|X)=0,90 (spécificité du test, probabilité d'un résultat négatif sachant que la personne n'est pas atteinte de la maladie X)

Nous pouvons maintenant utiliser la formule de Bayes pour calculer la probabilité post-test de la maladie X sachant que la personne a un résultat positif :

-P(X|Pos)=P(Pos|X)×P(X)/[P(Pos|X)×P(X)+P(Pos|X)×P(X)]

-P(X|Pos)=0,95×0,01/[0,95×0,01+0,10×0,99]

-P(X|Pos)=0,086 ou environ 8,6%

Ainsi, la probabilité qu'une personne ayant un résultat positif au test soit effectivement atteinte de la maladie X est d'environ 8,6%. Cela montre que, même avec un test de dépistage très sensible et spécifique, il y a encore une probabilité non négligeable de faux positifs.

Supposons que vous êtes le propriétaire d'un magasin de vêtements et que vous vendez des chemises de trois marques différentes : A, B et C. Vous savez que 40% des clients achètent des chemises de la marque A, 30% achètent des chemises de la marque B et 30% achètent des chemises de la marque C. Vous avez également remarqué que 60% des clients qui achètent des chemises de la marque A achètent également des pantalons, tandis que seulement 20% des clients qui achètent des chemises de la marque B et 10% des clients qui achètent des chemises de la marque C achètent des pantalons.

Maintenant, si vous voulez savoir quelle est la probabilité qu'un client achète un pantalon dans votre magasin, vous pouvez utiliser le théorème des probabilités totales. La probabilité qu'un client achète un pantalon est la somme pondérée des probabilités qu'un client achète un pantalon pour chaque marque de chemise :

P(Acheter un pantalon) = P(A) x P(Acheter un pantalon / A) + P(B) x P(Acheter un pantalon / B) + P(C) x P (Acheter un pantalon / C).

P(Acheter un pantalon) = 0,4 x 0,6 + 0,3 x 0,2 + 0,3 x 0,1

P(Acheter un pantalon) = 0,24 + 0,06 + 0,03

P(Acheter un pantalon) = 0,33

Ainsi, la probabilité qu'un client achète un pantalon dans votre magasin est de 33%.

Maîtriser les notions de cours

II

1. Exercice

[solution n°1 p.14]

On dispose de dix jetons numérotés

de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour

former un « paquet ». Combien de « paquets »

contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi

former ?

Veuillez choisir une réponse.

- ☐ 330
- ☐ 110
- ☐ 180
- ☐ 900

2. Exercice

[solution n°2 p.14]

Dans une série statistique de N données qui prennent p valeurs différentes, l'écart-type :

Veuillez choisir une réponse.

- ○ comporte deux solutions opposées
- ○ est toujours inférieur à la variance
- ○ peut être négatif

3. Exercice

[solution n°3 p.14*]*

Un quartier résidentiel comprend 99 unités d'habitation ayant une valeur locative

moyenne de 10000 Da. Deux nouvelles unités d'habitation sont construites dans le quartier

: l'une a une valeur locative de 7000 Da et l'autre, une villa luxueuse, a une valeur

locative de 114000 Da.

– Quelle est la nouvelle moyenne de valeur locative pour le quartier ?

4. Exercice

[solution n°4 p.15*]*

Dans une série statistique de N données qui prennent p valeurs différentes, l'écart-type mesure :

Veuillez choisir une réponse.

- la dispersion de la série de p valeurs autour de la moyenne
- la distribution des p valeurs
- l'intervalle entre la valeur la plus basse et celle la plus élevée

5

.

Conseil : Lien utile

** (cf. p.13) (cf. p.) https://www.youtube.com/watch?v=FNunfXkPq14&list=PLJOPLcr85yakekhpCsq32BbC1KGSAtjOD&index=2 [mp4]*

Ressources annexes

>

>

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 11

On dispose de dix jetons numérotés
de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour
former un « paquet ». Combien de « paquets »
contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi
former ?
Veuillez choisir une réponse.

- ☐ 330
- ☑ 110
- ☐ 180
- ☐ 900

> **Solution** n°2

Exercice p. 11

Dans une série statistique de N données qui prennent p valeurs différentes, l'écart-type :
Veuillez choisir une réponse.

- ○ comporte deux solutions opposées
- ◉ est toujours inférieur à la variance
- ○ peut être négatif

> **Solution** n°3

Exercice p. 12

Un quartier résidentiel comprend 99 unités d'habitation ayant une valeur locative
moyenne de 10000 Da. Deux nouvelles unités d'habitation sont construites dans le quartier
: l'une a une valeur locative de 7000 Da et l'autre, une villa luxueuse, a une valeur
locative de 114000 Da.
– Quelle est la nouvelle moyenne de valeur locative pour le quartier ?

110000

> **Solution** n°4

Exercice p. 12

Dans une série statistique de N données qui prennent p valeurs différentes, l'écart-type mesure :

Veuillez choisir une réponse.

- (•) la dispersion de la série de p valeurs autour de la moyenne
- ( ) la distribution des p valeurs
- ( ) l'intervalle entre la valeur la plus basse et celle la plus élevée