EXO1. corrigé

par définition, on a :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

a) $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1 - P(A\cup B)$

$\Longrightarrow P(A\cup B) = 1 - P(\bar{A}\cap\bar{B})$

$= 1 - 0{,}55$

$= 0{,}45$

b) A et B sont incompatibles $\Longrightarrow A\cap B = \emptyset$

$\Longrightarrow P(A\cap B) = 0$

Donc $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= 0{,}1 + 0{,}4 - 0 = 0{,}5$

c) A et B sont indépendants $\Longrightarrow P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\times P(B)$

$= 0{,}1 + 0{,}4 - 0{,}1\times 0{,}4 = 0{,}46$

d) $P(A|B) = 0{,}125 \Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0{,}125$

$\Longrightarrow P(A\cap B) = 0{,}125\times P(B)$

$P(A\cap B) = 0{,}125\times P(B)$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - 0{,}125\times P(B)$

$= 0{,}45$

e) $P(B|A) = 0{,}125 \Rightarrow P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = 0{,}125$

$\Longrightarrow P(B\cap A) = 0{,}125\times P(A)$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - 0{,}125\times P(A) = 0{,}4875.$

f) $P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 0{,}92$

$\Longrightarrow P(A\cap B) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= 0{,}1 + 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}42$

g) $A \subset B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = 0,1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0,1 + 0,4 - 0,1 = 0,4$

exo 2. 1°) (i) $\dfrac{A^3_5}{A^3_9} = \left(\dfrac{5}{9}\right)^3$ (arrangement avec répétition)

ii) $\dfrac{A^0_5 A^3_4}{A^3_9} + 3\,\dfrac{A^1_5 A^2_4}{A^3_9} + 3\,\dfrac{A^2_5 A^1_4}{A^3_9}$ (arrangement avec répétition)

les 3 jetons sont jaunes

1 jeton vert et 2 jetons jaunes

2 jetons vert et 1 jeton jaune.

3 cas
$\boxed{V \mid J \mid J}$
$\boxed{J \mid V \mid J}$
$\boxed{J \mid J \mid V}$

iii) $\dfrac{A^2_5 A^1_4}{A^3_9}$ (arrangement avec répétition).

2°) i) $\dfrac{C^3_5}{C^3_9}$

ii) $\dfrac{C^0_5 C^3_4 + C^1_5 C^2_4 + C^2_5 C^1_4}{C^3_9}$.

exo 3 :

a) Univers de l'expérience aléatoire :

$\Omega = \{(F,F), (F,P), (P,F), (P,P)\}$

un résultat des 2 jets est un arrangement avec répétition de 2 éléments parmi 2.

$\mathrm{card}(\Omega) = A_2^2 = 2^2 = 4$.

b) description par phrase :

$\bar{A_1}$: "La pièce tombe sur pile au 1er jet"

$A_1 \cap A_2$: "La pièce tombe sur face au 1er et au 2ème jet"

$A_1 \cup A_2$: "l'un au moins des deux jet donne face"

c) probabilités :

- $P(A_1) = \dfrac{|A_1|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{2}$

- $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{|A_1 \cap A_2|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{4}$

→ $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}$
$= \dfrac{3}{4}$

→ $P(A_1 / A_2) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

d) A_1 et A_2 sont-ils indépendants :

A_1 et A_2 sont indépendants si $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

on a $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{4}$, ~~P(A_1)~~ $P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

donc A_1 et A_2 sont indépendants.

e) $\underline{\text{Si}}$ on considère l'évènement

E : « la pièce tombe sur face exactement une fois »

$E = \{(F, P), (P, F)\}$.

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Exo4 : On considère les événements suivants : M "être malade" et V "être vacciné"

$P(M) = \frac{2}{3}$, $P(V/M) = \frac{1}{4}$, $P(\bar{V}/\bar{M}) = \frac{1}{3}$

ⓐ $P(V/\bar{M}) = 1 - P(\bar{V}/\bar{M}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ⓑ $P(V) = P(V/M)P(M) + P(V/\bar{M})P(\bar{M})$

$= P(V/M)P(M) + P(V/\bar{M})(1 - P(M))$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18}$

3) $P(M/\bar{V}) = \dfrac{P(M \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \dfrac{P(\bar{V}/M)P(M)}{P(\bar{V})} = \dfrac{(1 - P(V/M))P(M)}{1 - P(V)}$

$= \dfrac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{11}{18}} = \frac{9}{11}$

ⓓ $P(M/V) = \dfrac{P(V/M)P(M)}{P(V)} = \dfrac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{3}{7}$.

ⓒ Étant donné que $P(M/V) < P(M/\bar{V})$, la probabilité qu'un individu vacciné tombe malade est plus petite que celle s'il n'était pas vacciné. Par conséquent, le vaccin est efficace.