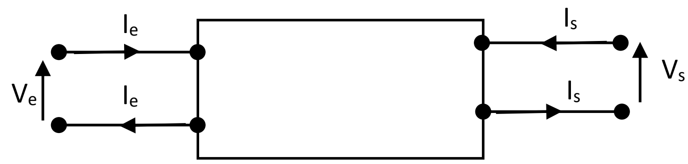
CHAPITRE 2

Quadripôles et filtres électriques

1. Définition d'un quadripôle :

Un quadripole est un circuit électrique constitué des éléments passifs et actifs. Il comporte deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie.



Tel que : (I_e , V_e) grandeurs d'entrée

(I_s , V_s) grandeurs de sortie

2. Représentation matricielle d'un quadripôle

2.1 Matrice impédance

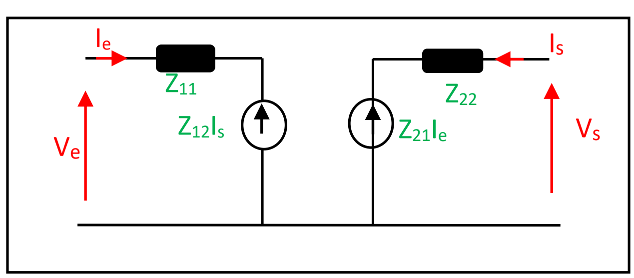
$$\begin{cases} V_e = Z_{11}I_e + Z_{12}I_s \\ V_s = Z_{21}I_e + Z_{22}I_s \end{cases}$$

$\begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix}$ Les éléments de matrices Z_{ij} se déduise en circuit ouvert appliqué au quadripôle :

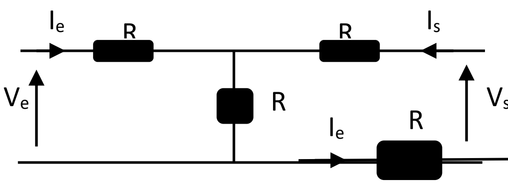
- Sortie en circuit ouvert ***I_s=0***
- Impédance d'entrée $Z_{11} = \frac{V_e}{I_e}$
- Impédance de transfert directe $Z_{21} = \frac{V_s}{I_e}$
- Entrée en circuit ouvert ***I_e=0***
- Impédance de sortie $Z_{22} = \frac{V_s}{I_s}$
- Impédance de transfert inverse $Z_{12} = \frac{V_e}{I_s}$

. Le schéma équivalent

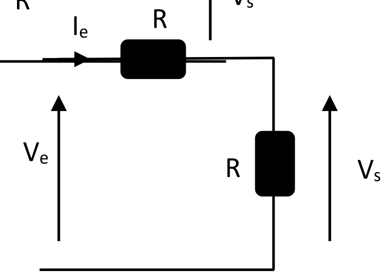
$$\begin{cases} V_e = Z_{11}I_e + Z_{12}I_s \\ V_s = Z_{21}I_e + Z_{22}I_s \end{cases}$$



Exemple Trouver les paramètres Z du quadripôle (en forme étoile T) suivant :



- Sortie ouverte I_s=0 le circuit devient :



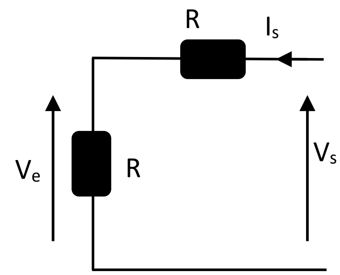
$V_e = (R + R) * I_e$

$Z_{11} = \frac{V_e}{I_e} = 2R$

$V_s = R * I_e$

$Z_{21} = \frac{V_s}{I_e} = R$

- Entrée ouverte I_e=0 le circuit devient :



$V_s = (R + R) * I_s$

$Z_{22} = \frac{V_s}{I_s} = 2R$

$V_e = R * I_s$

$Z_{12} = \frac{V_e}{I_s} = R$

2.2 Matrice admittance

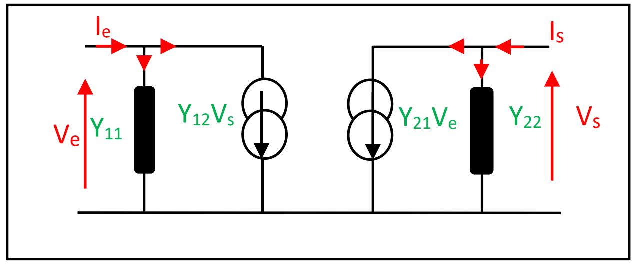
$$\begin{cases} I_e = Y_{11}V_e + Y_{12}V_s \\ I_s = Y_{21}V_e + Y_{22}V_s \end{cases}$$

$\begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix}$ Les éléments de matrices Y_{ij} se déduise en court-circuit appliqué au quadripôle :

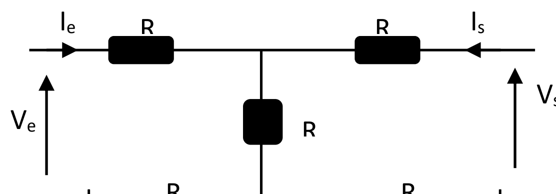
- Sortie en court-circuit ***V_s=0***
  - Admittance d'entrée $Y_{11} = \frac{I_e}{V_e}$
  - Admittance de transfert directe $Y_{21} = \frac{I_s}{V_e}$
- Entrée en court-circuit ***V_e=0***
  - Admittance de sortie $Y_{22} = \frac{I_s}{V_s}$
  - Admittance de transfert inverse $Y_{12} = \frac{I_e}{V_s}$

. Le schéma équivalent

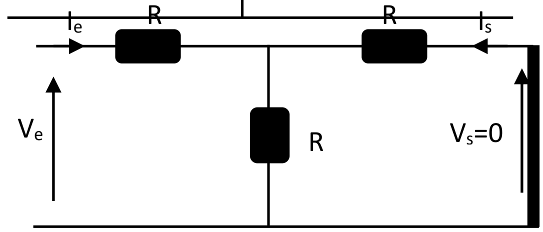
$$\begin{cases} I_e = Y_{11}V_e + Y_{12}V_s \\ I_s = Y_{21}V_e + Y_{22}V_s \end{cases}$$



Exemple Trouver les paramètres Z du quadripôle (en forme étoile T) suivant :



- Sortie en court-circuit V_s=0 le circuit devient :



$V_e = R_{eq} * I_e$; $R_{eq} = R + (R \parallel R) = \frac{3}{2}R$

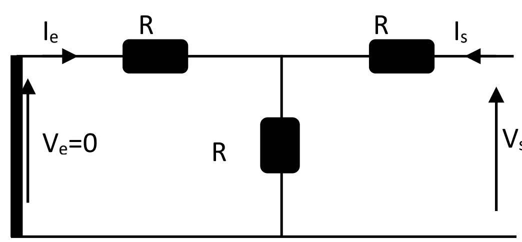
$Y_{11} = \frac{I_e}{V_e} = \frac{2}{3R}$

$V_e = \frac{3}{2}R * I_e$; nous avons un diviseur de courant ; $I_s = -\frac{R}{R+R}I_e$; $I_e = -2I_s$

$V_e = -3R * I_s$

$Y_{21} = \frac{I_s}{V_e} = -\frac{1}{3R}$

- Entrée en court-circuit V_e=0 le circuit devient :



$V_s = R_{eq} * I_s$; $R_{eq} = R + (R \parallel R) = \frac{3}{2}R$

$Y_{22} = \frac{I_s}{V_s} = \frac{2}{3R}$

$V_s = \frac{3}{2}R * I_s$; nous avons un diviseur de courant ; $I_e = -\frac{R}{R+R}I_s$; $I_s = -2I_e$

$V_s = -3R * I_e$

$Y_{12} = \frac{I_e}{V_s} = -\frac{1}{3R}$

2.3 Matrice Hybride

$$\begin{cases} V_e = h_{11}I_e + h_{12}V_s \\ I_s = h_{21}I_e + h_{22}V_s \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ V_s \end{bmatrix}$$

Les éléments de matrices h_{ij} se déduisent :

- Sortie en court-circuit ***V_s=0***

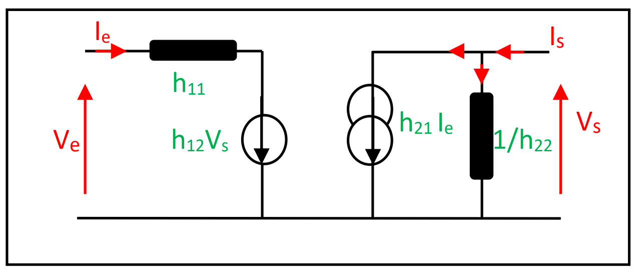
- Impédance d'entrée $h_{11} = \frac{V_e}{I_e}$
- L'amplification en courant $h_{21} = \frac{I_s}{I_e}$

- Entrée en circuit ouvert ***I_e=0***

- Admittance de sortie $h_{22} = \frac{I_s}{V_s}$
- Rapport de transfert inverse $h_{12} = \frac{V_e}{V_s}$

. Le schéma équivalent

$$\begin{cases} V_e = h_{11}I_e + h_{12}V_s \\ I_s = h_{21}I_e + h_{22}V_s \end{cases}$$



2.4 Matrice transfert

$$\begin{cases} V_s = T_{11}V_e - T_{12}I_e \\ I_s = T_{21}V_e - T_{22}I_e \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ -I_e \end{bmatrix}$$

2.5 Matrice chaîne

$$\begin{cases} V_e = a_{11}V_s - a_{12}I_s \\ I_e = a_{21}V_s - a_{22}I_s \end{cases}$$

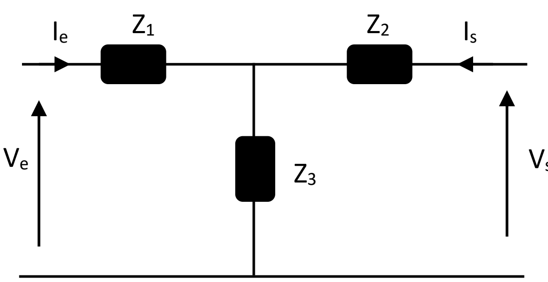
$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ -I_s \end{bmatrix}$$

Remarque : Les quadripôles, en général, sont disposés en forme étoile(T) ou forme triangle (π)

Montage en étoile(T)

$$\begin{cases} V_e = Z_{11}I_e + Z_{12}I_s \\ V_s = Z_{21}I_e + Z_{22}I_s \end{cases}$$

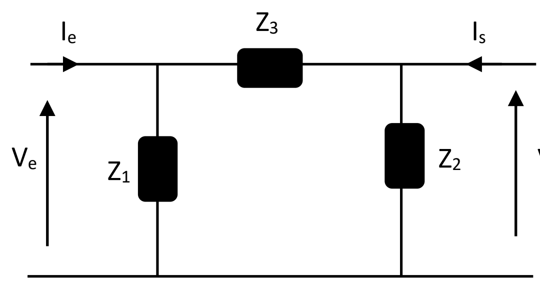
$$Z_{11} = Z_1 + Z_3$$



$$Z_{22} = Z_2 + Z_3$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_3$$

Montage en triangle (π)



$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} \;\; ; \;\; Y_2 = \frac{1}{Z_2} \;\; ; Y_3 = \frac{1}{Z_3}$$

$$\begin{cases} I_e = Y_{11}V_e + Y_{12}V_s \\ I_s = Y_{21}V_e + Y_{22}V_s \end{cases}$$

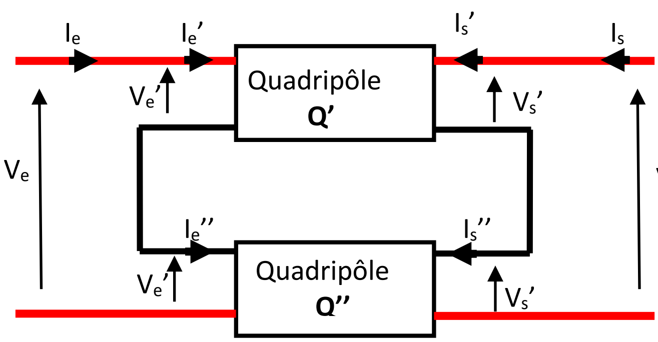
$$Y_{11} = Y_1 + Y_3$$

$$Y_{22} = Y_2 + Y_3$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -Y_3$$

3. Association de quadripôle

3.1. Groupement en série

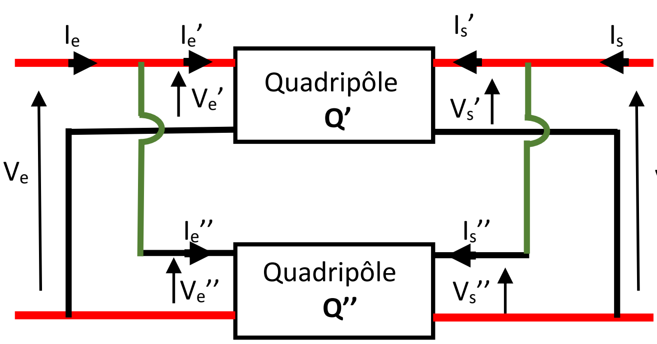


$$V_e = V_e' + V_e''; \; V_s = V_s' + V_s''$$

$$I_e = I_e' = I_e'' \;\; ; \;\; I_s = I_s' = I_s''$$

$$[Z] = [Z'] + [Z'']$$

3.2. Groupement en parallèle

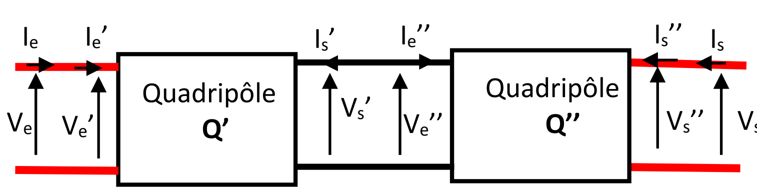


$$I_e = I_e' + I_e''; \; I_s = I_s' + I_s''$$

$$V_e = V_e' = V_e'' \;\; ; \;\; V_s = V_s' = V_s''$$

$$[Y] = [Y'] + [Y'']$$

3.3. Groupement en cascade



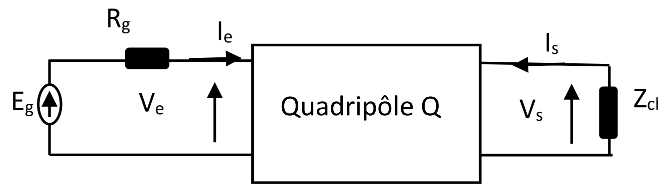
$$I_e = I_e' \; ; \; I_s' = -I_e'' \; ; I_s'' = I_s$$

$V_e = V_e'$; $V_s' = V_e''$; $V_s'' = V_s$

$[T] = [T''] \times [T']$

4. Quadripôle en charge alimenté par une source en tension

$$\begin{cases} V_e = Z_{11} I_e + Z_{12} I_s & (1) \\ V_s = Z_{21} I_e + Z_{22} I_s & (2) \end{cases}$$



Et d'après la loi des mailles nous avons

$$\begin{cases} E_g = V_e + R_g I_e & (3) \\ V_s = -Z_{ch} I_s & (4) \end{cases}$$

4.1. Impédance d'entrée

L'impédance d'entrée est l'impédance vue par la source qui alimente le quadripôle Q.

$Z_e = \frac{V_e}{I_e}$

A partir de l'équation 4 et 2 on peut écrire : $I_s (Z_{ch} + Z_{22}) = -Z_{21} I_e$

Donc : $I_s = -\frac{Z_{21}}{Z_{ch}+Z_{22}} I_e$

En remplace l'équation de I_s dans l'équation 1, on trouve : $V_e = Z_{11} I_e - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{ch}+Z_{22}} I_e$

$Z_e = \frac{V_e}{I_e} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{ch}+Z_{22}}$

4.2. Impédance de sortie

L'impédance de sortie est l'impédance vue par la charge du quadripôle Q. Donc, on court-circuite la source de tension d'alimentation E_g=0.

$Z_s = \frac{V_s}{I_s}$

$E_g = V_e + R_g I_e = 0 \;\; \Rightarrow V_e = -R_g I_e = Z_{11} I_e + Z_{12} I_s$

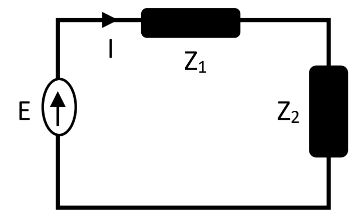
Donc : $I_e = -\frac{Z_{12}}{R_g+Z_{11}} I_s$

on remplace l'équation de I_e dans l'équation 2, on trouve : $V_s = Z_{22} I_s - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{ch}+Z_{22}} I_s$

$$Z_s = \frac{V_s}{I_s} = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{R_g + Z_{11}}$$

5. ***Adaptation***

L'adaptation d'impédance est une technique utilisée permettant de maximiser le transfert d'une puissance électrique entre un émetteur (source) et un récepteur (charge) ou bien d'optimiser la transmission des signaux de télécommunications.



Exemple

Soit le circuit suivant :

$Z_1 = R_1 + jX_1 \quad ; Z_2 = R_2 + jX_2$

En utilisant la loi des mailles $I = \frac{E}{Z_1+Z_2} = \frac{E}{(R_1+R_2)+j(X_1+X_2)}$

La puissance utile est défini : $Pu = R_2 I^2$

Le courant $|I| = \frac{E}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2}}$ donc $Pu = \frac{R_2 E^2}{(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2}$

Nous pouvons déduire que Pu est maximum si :

$(X_1 + X_2) = 0 \;\; donc\; X_1 = -X_2 \qquad et \qquad R_1 = R_2$

$on \;\; conclue \; que \;\; Pu = \frac{E^2}{4R_2}$

6. ***Fonction de transfert***

La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire est le rapport de l'amplitude du signal de sortie à l'amplitude du signal d'entrée :

$$H = \frac{A_s}{A_e}$$

- ❖ Le gain de la fonction de transfert G est le module de la fonction de transfert $G = |H|$

6.1. Gain en tension

C'est le rapport de la tension de sortie par la tension d'entrée

$$G_V = \frac{V_s}{V_e}$$

6.2. Gain en courant

C'est le rapport du courant de sortie par le courant d'entrée

$$G_I = \frac{I_s}{I_e}$$

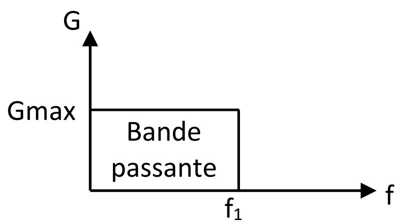
- ❖ La phase φ d'une fonction de transfert est l'argument de cette fonction de transfert. Elle correspond au déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée

$$\varphi = \arg(H) = \varphi_s - \varphi_e$$

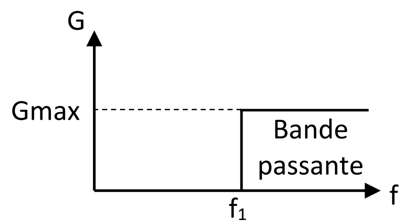
7. *Filtre passif (linéaire)*

7.1. Définition

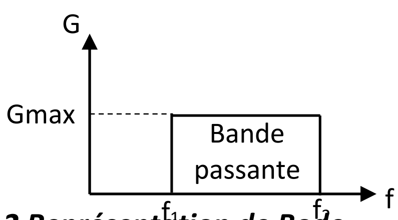
Un filtre électrique est un quadripôle constitué d'un circuit électronique qui atténue certaine composantes d'un signal et en laisse passer d'autre.



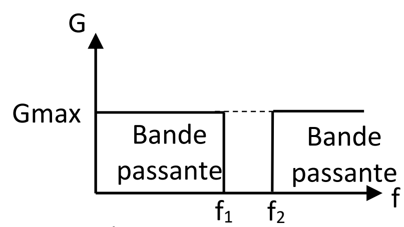
a) Filtre passe bas



b) Filtre passe haut



c) Filtre passe bande



d) Filtre coupe bandes

7.2 Représentation de Bode

a) Fonction de transfert d'un filtre

Le module de la fonction H(ω) d'un filtre dépend de la pulsation ω. ce module noté G est appelé gain du filtre.

Filtre passe bas : $\begin{cases} \omega \to 0 \quad ; \quad G(0) \neq 0 \\ \omega \to \infty \quad ; \quad G(\infty) \to 0 \end{cases}$

Filtre passe haut : $\begin{cases} \omega \to 0 \quad ; \quad G(0) \to 0 \\ \omega \to \infty \quad ; \quad G(\infty) \neq 0 \end{cases}$

Filtre passe haut : $\begin{cases} \omega \to 0 \quad ; \quad G(0) \to 0 \\ \omega \to \infty \quad ; \quad G(\infty) \to 0 \end{cases} \quad G(\omega_1) = Gmax$

b) Gain en décibel

le décibel (dB) est une unité sans dimension caractérisant le rapport de deux puissances moyennes P_1 et P_2. L'écart X(dB) entre P_1 et P_2 est :

$X_{dB} = 10\log(\frac{P_2}{P_1})$

❖ Dans un circuit électrique $P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$

Donc $\frac{P_2}{P_1} = (\frac{X_2}{X_1})^2 \Rightarrow X_{dB} = 10\log(\frac{X_2}{X_1})^2 = 20log(\frac{X_2}{X_1})$

Nous déduisons que l'écart en décibels (dB) entre 2 grandeurs électriques est $X_{dB} = 20log(\frac{X_2}{X_1})$

Nous pouvons écrire que le gain de tension en décibel est $G_{dB} = 20log(\frac{V_s}{V_e})$

7.3 Diagramme de Bode d'un filtre

a) Définition

On appelle diagramme de Bode d'un filtre l'ensemble des deux graphes :

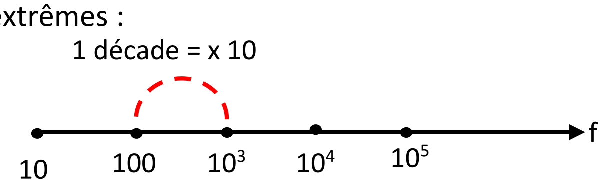
- ***Courbe de réponse en gain*** :Le gain en décibels de la fonction de transfert H(ω) tracé en fonction du logarithme décimal de fréquence $G_{dB} = 20\log(|H(\omega)|) = f(\log(\omega))$

- ***Courbe de réponse en phase*** : La phase (l'argument) en décibels de la fonction de transfert H(ω) tracé en fonction du logarithme décimal de fréquence $\varphi = arg(H(\omega)) = g(\log(\omega))$

L'intérêt de l'échelle logarithmique est de faire intervenir un grand domaine de variation de ω

$$10 < \omega < 10^6 \left(\frac{rad}{s}\right) \Rightarrow 1 < \log(\omega) < 6$$

Une décade est un intervalle de fréquence correspondant à un rapport de 10 entre les deux fréquences extrêmes :



7.4 pulsation de coupure d'un filtre

Une pulsation de coupure ω_c d'un filtre est $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB}(\omega_c) = G_{dBmax} - 3$

La bande passante d'un filtre est l'intervalle de pulsation :$\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \leq G(\omega) \leq G_{max}$

En décibel $G_{dBmax} - 3 \leq G_{dB}(\omega) \leq G_{dBmax}$

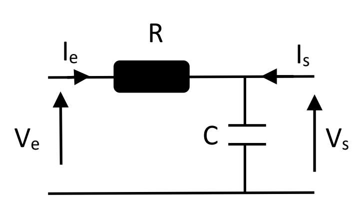
7.5. Diagramme asymptotique diagramme réel

Il s'agit de représenter les asymptotes des graphes $G_{dB} = f(\log(\omega))$ et $\varphi = g(\log(\omega))$ lorsque :$\begin{cases} \omega \to 0 \\ \omega \to \infty \end{cases}$

Nous déduisant le diagramme réel en faisant intervenir la pulsation de coupure

Exemple

Filtre passif d'ordre 1 (RC)



$$V_s = \frac{Z_c}{R+Z_c} V_e = \frac{1}{1+jRC\omega} V_e$$

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1+jRC\omega}$$

$$G = |H| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arg(H) = -\arctan(RC\omega)$$

- Pulsation de coupure : $G_{max} = 1 \Rightarrow G_{\omega c} = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega_c)^2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$

Nous pouvons écrire G et φ en fonction de ω_c :

$$G = |H| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_c})^2}} \; ; \; \varphi = \arg(H) = -\arctan(\frac{\omega}{\omega_c})$$

- La bande passante du filtre passe bas est :

$$\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \leq G(\omega) \leq G_{max} \;\; qui\ est\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq G(\omega) \leq 1 \quad pour\ \omega \in [0, \omega_c]$$

- Diagramme de Bode

On pose $x = \frac{\omega}{\omega_c}$

$$\begin{cases} G_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -10\log(1+x^2) \\ \varphi = -\arctan(x) \end{cases}$$

- Asymptotes de la réponse en gain

$$\begin{cases} x \to 0^+ \quad \Rightarrow G_{dB} \longrightarrow 0 \;\; ; asymptote\ horizontale \\ x \to \infty \quad \Rightarrow G_{dB} \longrightarrow -20\log(x); asymptote\ oblique\ de\ pente - 20log_{dB} par\ décade \end{cases}$$

- Asymptotes de la réponse en phase

$$\begin{cases} x \to 0^+ \quad \Rightarrow \varphi \longrightarrow 0 \;\; ; asymptote\ horizontale \\ x \to \infty \quad \Rightarrow \varphi \longrightarrow -\frac{\pi}{2} \;\; ; asymptote\ horizontale \end{cases}$$

Nous avons $G_{dB}(\omega_c) = -3dB \;\; ; \;\; \varphi(\omega_c) = -\frac{\pi}{4}$

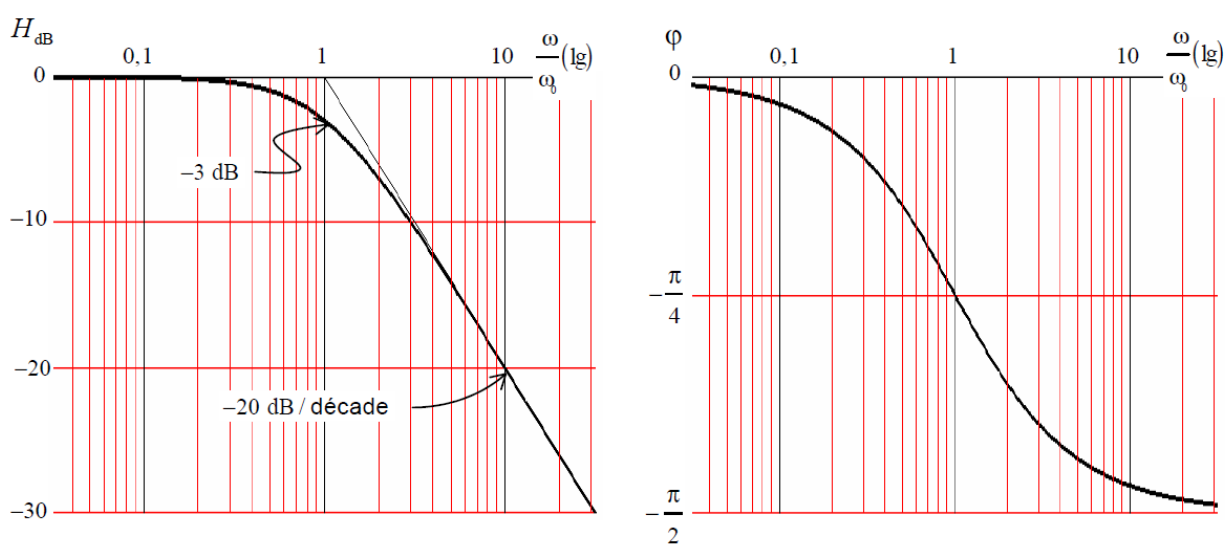


Diagramme de Bode d'un filtre passe bas d'ordre 1