**SECTION 2: PRÉSENTATION DES MODÈLES LINÉAIRE ARIMA**

Il existe deux catégories de modèles pour rendre compte d'une série temporelle. Les premiers considèrent que les données sont une fonction du temps (y = f(t)). Cette catégorie de modèle peut être ajustée par la méthode des moindres carrés, ou d'autres méthodes itératives. L'analyse des modèles par transformée de Fourier est une version sophistiquée de ce type de modèle. Une seconde catégorie de modèles cherche à déterminer chaque valeur de la série en fonction des valeurs qui la précède. C'est le cas des modèles ARIMA ("Cette catégorie de modèles a été popularisée et formalisée par Box et Jenkins (1976).  Un modèle ARIMA est étiqueté comme modèle ARIMA (p,d,q), dans lequel: p est le nombre de termes auto-régressifs d est le nombre de différences q est le nombre de moyennes mobiles.

**2.1**. **DIFFERENCIATION.**

L'estimation des modèles ARIMA suppose que l'on travaille sur une série stationnaire. Ceci signifie que la moyenne de la série est constante dans le temps, ainsi que la variance. La meilleure méthode pour éliminer toute tendance est de différencier, c'est-à-dire de remplacer la série originale par la série des différences adjacentes. Une série temporelle qui a besoin d'être différenciée pour atteindre la stationnarité est considérée comme une version intégrée d'une série stationnaire (d'où le terme *Integrated*). La correction d'une non-stationnarité en termes de variance peut être réalisée par des transformations de type logarithmique (si la variance croît avec le temps) ou à l’inverse exponentielles. Ces transformations doivent être réalisées avant la différenciation. Une différenciation d'ordre 1 suppose que la différence entre deux valeurs successives de y est constante. **Yt – Yt-1 = μ + εt** où μ est la constante du modèle, et représente la différence moyenne en Y. Un tel modèle est un ARIMA (0,1,0). Il peut être représenté comme un accroissement linéaire en fonction du temps.

Si μ est égal à 0, la série est stationnaire

**Détermination de l'ordre de différenciation :** Une série stationnaire fluctue autour d'une valeur moyenne et sa fonction d'autocorrélation décline rapidement vers zéro. Si une série présente des autocorrélations positives pour un grand nombre de décalages (par exemple 10 ou plus), alors elle nécessite d'être différenciée. La différenciation tend à introduire des autocorrélations négatives. Si l'autocorrélation de décalage 1 est égale à 0 ou négative, la série n'a pas besoin d'être différenciée. Si l'autocorrélation de décalage 1 est inférieure a –0.5, la série est sur différenciée. L'ordre optimal de différenciation est souvent celui pour lequel l'écart-type est minimal. Un accroissement de l'écart-type doit donc être considéré comme un symptôme de surdifférenciation. Un troisième symptôme de sur-différenciation est un changement systématique de signe d'une observation à l'autre.

**2-2 Processus Autorégressifs :** Les modèles autorégressifs supposent que Yt est une fonction linéaire des valeurs précédentes. Yt = μ + φ1Yt-1 + φ2Yt-2 + φ3Yt-3.+…………………+ εt

Littérairement, chaque observation est constituée d'une composante aléatoire (choc aléatoire, ε) et d'une combinaison linéaire des observations précédentes. φ1, φ2 et φ3 dans cette équation sont les coefficients d'auto-régression. Un processus autorégressif ne sera stable que si les paramètres sont compris dans un certain intervalle ; par exemple, s'il n'y a qu'un paramètre autorégressif, il doit se trouver dans l'intervalle -1<φ1<+1. Dans les autres cas, les effets passés s'accumuleraient et les valeurs successives des Yt se déplaceraient infiniment vers l'avant, ce qui signifie que la série ne serait pas stationnaire. S'il y a plus d'un paramètre autorégressif, des restrictions similaires (générales) sur les valeurs des paramètres peuvent être posées.

**Exemple d’un processus AR (1)**

Chaque valeur de la série est la combinaison linéaire des valeurs précédentes. Si la valeur de la série $Y\_{t}$ à l’instant "t" dépend de la valeur précédente et d’une perturbation aléatoire alors le processus est dit autorégressif d’ordre 1 : AR (1) : $y\_{t}=ϕ\_{1}y\_{t-1}+ε\_{t}$

Calculer son espérance et sa variance :

$E(y\_{t})=E\left(ϕ\_{1}y\_{t-1}\right)+E\left(ε\_{t}\right)$

$E(y\_{t})=ϕ\_{1}E\left(y\_{t-1}\right)+E\left(ε\_{t}\right)$

$E(y\_{t})-ϕ\_{1}E\left(y\_{t-1}\right)=E\left(ε\_{t}\right)$

$E(y\_{t})[1-ϕ\_{1}]=E\left(ε\_{t}\right)$

$E(y\_{t})=\frac{E\left(ε\_{t}\right)}{1-ϕ\_{1}} avec \left|ϕ\_{1}\right|<1$

$V(y\_{t})=E\left(y\_{t}-E\left(y\_{t}\right)\right)^{2}=E\left(ϕ\_{1}y\_{t-1}ε\_{t}\right) ^{2}⇒E(y\_{t})^{2}=E[ϕ\_{1}^{2}y\_{t-1}^{2}+2ϕ\_{1}y\_{t-1}ε\_{t}+ε\_{t}^{2}]$

$ ⇒E(y\_{t})^{2}=ϕ\_{1}^{2}E(y\_{t-1}-1)^{2}-2ϕ\_{1}E\left(y\_{t}+ ε\_{t}\right)+E\left(ε\_{t}\right)$

$ ⇒E(y\_{t})^{2}=ϕ\_{1}^{2}E(y\_{t})^{2}+δ\_{ε}^{2}$

$ ⇒E(y\_{t})^{2}=\frac{δ\_{ε}^{2}}{1-ϕ\_{1}^{2}} avec \left|ϕ\right|<1$

Une propriété caractéristique des AR(p) est que la PAC d'un AR(p) est nulle au-delà de *p* (pour *h > p*).

**Identification des termes AR :** Après que la série ait été stationnarisée, l'étape suivante consiste à identifier les termes AR et MA nécessaires pour corriger les autocorrélations résiduelles. Cette analyse est basée sur l'examen des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle. Si le corrélogramme partiel n’a que ses q premiers retards différents de zéro et que les termes du corrélogrammes simple diminuent lentement, cela caractérise un AR(P).

 **Exemple d’un modèle AR (1)**

**L’**identification de la structure d'une série temporelle débute par l'observation de sa stationnarité : on applique des différenciations jusqu'à ce que la fonction d'autocorrélation de la série différenciée ne présente plus que quelques pics significatifs. Dans le cas de la série produit intérieur brut, une seule différenciation la variable devienne stationnaire. Les résultats d’estimations sont donnés dans le tableau suivant

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Dépendent Variable : D(GDPR)** |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob.   |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| C | 450.1410 | 192.0583 | 2.343772 | 0.0243 |
| AR(1) | 0.442599 | 0.100334 | 4.411246 | 0.0001 |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| R-squared | 0.395091 |     Mean dependent var | 442.1981 |
| Adjusted R-squared | 0.153813 |     S.D. dependent var | 657.5956 |
| S.E. of regression | 104.9117 |     Akaike info criterion | 15.72198 |
| Sum squared resid |  270808 |     Schwarz criterion | 15.84610 |
| Log likelihood | -327.1616 |     Hannan-Quinn criter. | 15.76748 |
| F-statistic | 14.726336 |     Durbin-Watson stat | 2.036439 |
| Prob(F-statistic) | 0.014523 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**2.3 Moyenne mobile  MA(q) :** Les modèles à moyenne mobile suggèrent que la série présente des fluctuations autour d'une valeur moyenne. On considère alors que la meilleure estimation est représentée par la moyenne pondérée d'un certain nombre de valeurs antérieures (ce qui est le principe des procédures de moyennes mobiles utilisées pour le lissage des données). Ceci revient en fait à considérer que l’estimation est égale à la moyenne vraie, auquel on ajoute une somme pondérée des erreurs ayant entaché les valeurs précédentes.

Un processus MA (1) est défini par l’équation suivante :$X\_{t}=θ\_{0}+θ\_{1}ε\_{t-1}+V\_{t}$

D’une manière générale un processus MA d’ordre q s’écrit comme suit :

$$X\_{t}=θ\_{0}+θ\_{1}ε\_{t-1}+θ\_{2}ε\_{t-2}+…+θ\_{q}ε\_{t-q}+V\_{t}$$

Littérairement, chaque observation est composée d'une composante d'erreur aléatoire (choc aléatoire, ε) et d'une combinaison linéaire des erreurs aléatoires passées. θ1, θ2 et θ3…… θq sont les coefficients de moyenne mobile du modèle.

**Identification des termes MA :** La fonction d'autocorrélation joue pour les processus de moyenne mobile le même rôle que la fonction d'autocorrélation partielle pour les processus autorégressifs. Si l'autocorrélation simple n’a que ses « q » premiers retards différents de 0 et que les termes du correlogramme partiel diminuent lentement, nous pouvons pronostiquer un MA(q).

**Exemple d’un modèle MA (1)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Dependent Variable: CACVS** |  |  |
| **Method: Least Squares** |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistique | Prob.   |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| C | 3029.379 | 161.0650 | **18.80842** | **0.0000** |
| MA(1) | 0.722975 | 0.091548 | **7.897191** | **0.0000** |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| R-squared | **0.455822** | Mean dependent var | 3036.717 |
| Adjusted R-squared | 0.446439 | S.D. dependent var | 975.7776 |
| S.E. of regression | 725.9947 | **Akaike info criterion** | 16.04573 |
| Sum squared resid | 30569961 | **Schwarz criterion** | 16.11554 |
| Log likelihood | -479.3718 | **Hannan-Quinn criter.** | 16.07303 |
| F-statistic | 48.58272 | Durbin-Watson stat | 1.551066 |

Le coefficient MA (1) : le coefficient moyenne mobile d’ordre 1 est significativement différent de zéro dans la mesure où le t de Student **7.89** est supérieur à la valeur critique 1.96 au seuil statistique de 5%.

## **2.4 Modèles ARMA (p,q)**  : ces processus constituent une extension des processus AR et MA. Ce sont en fait des processus mixtes dans le sens où ils introduisent simultanément des composantes AR et MA sous la forme fonctionnelle. Le modèle ARMA (p.q) s’écrit de la manière suivante :

##  $X\_{t}=ϕ\_{0}+ϕ\_{1}X\_{t-1}+…+ϕ\_{p}X\_{t-p}+θ\_{1}ε\_{t-1}+θ\_{2}ε\_{t-2}+…+θ\_{q}ε\_{t-q}+V\_{t}$

ARMA (1,1) : $X\_{t}=ϕ\_{0}+ϕ\_{1}X\_{t-1}+θ\_{1}ε\_{t-1}+V\_{t}$

ARMA (0,2) : $X\_{t}=θ\_{0}+θ\_{1}ε\_{t-1}+θ\_{2}ε\_{t-2}+V\_{t}$

ARMA (1,0) : $X\_{t}=ϕ\_{0}+ϕ\_{1}X\_{t-1}+ε\_{t}$

Le processus est stationnaire si et seulement si P n'a pas de racine (complexe) de module supérieur à 1

**Exemple d’estimation d’un modèle ARMA (1, 1)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dependent Variable: Chiffre d’affaires corrigés des variations saisonnières  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistique | Prob.   |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| C | 3047.982 | 244.1212 | **12.48552** | 0.0000 |
| AR(1) | 0.472687 | 0.151873 | **3.112381** | 0.0029 |
| MA(1) | 0.443239 | 0.155382 | **2.852582** | 0.0061 |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| R-squared | **0.519738** |     Mean dependent var | 3054.186 |
| Adjusted R-squared | 0.502586 |     S.D. dependent var | 974.6440 |
| S.E. of regression | 687.3929 | **Akaike info criterion** | 15.95320 |
| Sum squared resid | 26460503 | **Schwarz criterion** | 16.05884 |
| Log likelihood | -467.6193 |     Hannan-Quinn criter. | 15.99443 |
| F-statistic | 30.30153 |     Durbin-Watson stat | 1.953774 |

Les t de Student associées aux coefficients autorégressifs et moyenne mobile étant supérieur en valeur absolue. Les coefficients sont d’un point de vue statistique significatif.