Chapitre II

Intégrales Impropres

Définitions et Propriétés

Critères de Convergence

Convergence absolue et semi-convergente

1. Introduction.

Les intégrales que nous avons traités dans le chapitre 1 sont définies sur des intervalles fermés et bornés de $\mathbb{R}$, dont la fonction doit être au moins continue par morceaux. Cependant, la plupart des intégrales ne sont pas des aires de domaines bornés du plan et la fonction f à intégrer est discontinue pour des valeurs isolées de la variable x comprises dans les limites d'intégration. Pour cela la notion d'intégrale de Riemann, doit être étendue à l'aide des limites. Cette appellation est dite intégrale impropre ou généralisée.

2. Définitions et propriétés

Définition 1: Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

On dit que f est localement intégrable si elle est intégrable sur tout sous-intervalle fermé, borné de I .

Exemples :

1) Toute fonction continue sur I de $\mathbb{R}$ est localement intégrable.

2) Les fonctions en escalier sont localement intégrables.

3) Toute fonction monotone est localement intégrable.

Définition 2 :

Soit $f : I=[a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable.

Posons : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$; Si

$$\lim_{x \to b} F(x) = l \ (finie)$$

on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **est convergente.**

On appelle la limite l l'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$. Et on écrit :

$$\int_a^b f(t)dt = l \ .$$

Dans le cas contraire ($\lim_{x \to b} F(x) \neq l$) on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **est divergente.**

Exemples :

1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2} dt$

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{(t+1)^2}dt=\left[\frac{-1}{t+1}\right]_1^x=\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{1}{2}$$

Alors $\int_1^{+\infty}\frac{1}{(t+1)^2}dt$ est convergente

2) $\int_0^{+\infty}te^{-t}dt$; $F(x)=\int_0^x te^{-t}dt$; intégrons par parties : $\begin{cases} u=t \\ v'=e^{-t}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=1 \\ v=-e^{-t}\end{cases}$

$$F(x)=[-te^{-t}-e^{-t}]_0^x=1-xe^{-x}-e^{-x}$$

$\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$ alors $\int_0^{+\infty}te^{-t}dt$ est convergente

3) $\int_0^1\frac{1}{1-t}dt$

$$F(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-ln|1-x|$$

4) $\lim_{x\to1}F(x)=+\infty$ alors $\int_0^1\frac{1}{1-t}dt$ est divergente

Remarque :

Dans le cas $I=]a,b]$ Posons : $F(x)=\int_x^b f(t)dt$

Si $\lim_{x\to a}F(x)=l$ (finie), on dit que $\int_a^b f(t)dt$ **est divergente**.

Si $\lim_{x\to a}F(x)\neq l$) on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **est divergente**.

Exemples :

1) $\int_0^1\ln(t)\,dt$; $F(x)=\int_x^1\ln(t)\,dt$ par partie , $F(x)=-1-xln(x)+x$

$\lim_{x\to0}F(x)=-1$; Alors $\int_0^1\ln(t)\,dt$ est convergente

2) $\int_{-\infty}^0\frac{dt}{t^2+2t+2}$; $F(x)=\int_x^0\frac{dt}{t^2+2t+2}=\int_x^0\frac{dt}{(t+1)^2+1}=(\arctan(t+1))_x^0=\frac{\pi}{4}-\arctan(x+1)$

$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$ convergente

Définition 3 :

Soit f: $]a,b[\to\mathbb{R}$ localement intégrable.

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente s'il existe $c\in]a,b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$soient convergentes. Et $\int_a^b f(t)dt=l_1+l_2$

Avec : $\lim_{x\to a}F(x)=l_1$ et $\lim_{x\to b}F(x)=l_2$

Exemples :

1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\int_{-\infty}^{c}\frac{dt}{1+t^2}+\int_{c}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$, on prend c=0

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{1+t^2}=\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{c}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\lim_{x\to+\infty}\int_{0}^{x}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\pi$$

2) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{t(t-1)}=\int_{-\infty}^{c}\frac{dt}{t(t-1)}+\int_{c}^{0}\frac{dt}{t(t-1)}$ on prend c=-2

$$\int_{-\infty}^{c}\frac{dt}{t(t-1)}=\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{0}\frac{dt}{t(t-1)}=\lim_{x\to-\infty}\left[\int_{x}^{-2}\frac{dt}{t}+\int_{x}^{-2}\frac{dt}{(t-1)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(ln2+ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)=ln2$$

$$\int_{c}^{0}\frac{dt}{t(t-1)}=\lim_{x\to0}\int_{-2}^{x}\frac{dt}{t(t-1)}=\lim_{x\to0}\left[\int_{-2}^{x}\frac{dt}{t}+\int_{-2}^{x}\frac{dt}{(t-1)}\right]=\lim_{x\to0}\left(-\ln(\frac{2}{3})+ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)=-\infty$$

$\int_{c}^{0}\frac{dt}{t(t-1)}$ $divergente$ alors $\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{t(t-1)}$ divergente

Remarque :

1) la nature de l'intégrale de f sur $]a,b[$ ne dépend pas de choix de réel c .

2) Attention : $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\neq\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{+x}f(t)dt$

Exemple : $\int_{-x}^{x}tdt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-x}^{x}=0$ mais $\int_{-\infty}^{+\infty}tdt$ est divergente

Propriétés :

Soient f,g: $[a,b[\ \to\mathbb{R}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. On a

1) Si $\begin{cases}\int_a^b f(t)dt\ convergente\\ \int_a^b g(t)dt\ convergente\end{cases}$ Alors $\begin{cases}\int_a^b (f(t)+g(t))dt\ convergente\\ \int_a^b \alpha f(t)dt\ convergente\end{cases}$

2) Si $\int_a^b f(t)dt\ divergente\ \ (ou\ \int_a^b g(t)dt\ divergente)\ Alors\begin{cases}\int_a^b (f(t)+g(t))dt\ divergente\\ \int_a^b \alpha f(t)dt\ divergente\end{cases}$

3) Si $\begin{cases}\int_a^b f(t)dt\ divergente\\ \int_a^b g(t)dt\ divergente\end{cases}$ Alors on ne peut rien conclure.

Exemple :

Soient : $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t+1}$ sont divergentes

$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t+1}=\lim_{x\to+\infty} lnx(x+1)=+\infty$ alors $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t+1}$ divergente

$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}-\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t+1}=\lim_{x\to+\infty} ln2+ln\frac{x}{x+1}=\ln(2)$ alors $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}-\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t+1}$ convergente

Intégrale de Riemann

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}\ ;\ \int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}\ ;\ \int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$$

On a $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}=\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$

Pour $\alpha=1$: $\begin{cases}\int_0^1\frac{dt}{t}=\lim_{x\to0}\int_x^1\frac{dt}{t}=\lim\limits_{x\to0}[-ln|x|]=+\infty\\ \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}=\lim\limits_{x\to\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}=\lim\limits_{x\to\infty}[ln|x|]=+\infty\end{cases}$

Pour $\alpha<1$: $\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}=\lim\limits_{x\to0}\int_x^1\frac{dt}{t^\alpha}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1-\alpha}[1-x^{1-\alpha}]=\frac{1}{1-\alpha}$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}[x^{1-\alpha}-1]=+\infty$$

Pour $\alpha>1$: $\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}=\lim\limits_{x\to0}\int_x^1\frac{dt}{t^\alpha}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1-\alpha}[1-x^{1-\alpha}]=+\infty$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}[x^{1-\alpha}-1]=\frac{1}{1-\alpha}$$

Conclusion : $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ convergente si $\alpha>1$; divergente si $\alpha\le1$

$\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}$ convergente si $\alpha<1$; divergente si $\alpha\ge1$

$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente

Intégrale de Bertrand :

$$\int_\alpha^{+\infty}\frac{dt}{tln^\beta(t)},\alpha>1$$

$F(x)=\int_\alpha^x\frac{dt}{tln^\beta(t)}$ par changement de variable $u=\ln(t)$

Pour $\beta=1$, $F(x)=\ln(\ln(x))-\ln(\ln(\alpha))$, $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=+\infty$

Pour $\beta\ne1$, $F(x)=\frac{1}{1-\beta}\left[\ln(t)^{1-\beta}\right]_\alpha^x=\frac{1}{1-\beta}\left[\ln(x)^{1-\beta}-\ln(\alpha)^{1-\beta}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\begin{cases}+\infty\, si\ \beta<1\\ \dfrac{\ln(\alpha)^{1-\beta}}{1-\beta} Si\ \beta>1\end{cases}$$

Alors $\int_\alpha^{+\infty}\frac{dt}{tln^\beta(t)}$ est convergente si $\beta>1$, divergente si $\beta\le1$

3. Convergence des intégrales des fonctions positives :

Soient f, g :$[a,b[\to \mathbb{R}_+$ (f, g≥ 0) localement intégrables

Théorème : cristère de comparaison

Si $f(t) \leq g(t) sur [a,b[$ alors on a

$\int_a^b g(t)dt$ convergente alors $\int_a^b f(t)dt$ convergente

$\int_a^b f(t)dt$ divergente alors $\int_a^b g(t)dt$ divergente

Exemples

1) $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$

On a sur $[1,+\infty[$: $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{x\to+\infty}(e^{-1} - e^{-x}) = e^{-1}$

$\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ convergente alors $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente

2) $\int_1^{+\infty} \frac{sin^2(t)}{t^2} dt$

On a pour $t \epsilon [1,+\infty[$, $\frac{sin^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ intégrale de Riemann convergente $(\alpha > 1)$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{sin^2(t)}{t^2} dt$ convergent

Théorème : critère d'équivalence

Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ on dit que les deux fonctions f et g sont équivalente

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature

Exemples :

1) $\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t(t^2+1)}$, $f(t) = \frac{t+1}{t(t^2+1)}$

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(t)}{t^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{t+1}{t(t+1)} t^2 = 1$ alors f et $g(t) = \frac{1}{t^2}$ sont équivalentes au voisinage de $(+\infty)$

On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ de Riemann convergente $(\alpha > 1)$

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t(t^2+1)}$ est convergente

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin(t)} dt$ on $\lim_{x\to 0} \frac{t}{sin(t)} = 1$, alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin(t)} dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt$ sont de même nature

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt$ de Riemann divergente $(\alpha = 1)$ alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin(t)} dt$ est divergente

Remarque : Pour chercher l'équivalence des fonctions on peut utiliser les développements limités.

Exemples :

1) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$

On a au voisinage de zéro : $\ln(1-t^2) = -t^2 - \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^6 + O(t^6)$

$$\frac{\ln(1-t^2)}{t^2} = -1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^4 + O(t^4)$$

Alors $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$ est convergente comme somme des intégrales convergentes

2) $\int_0^1 \frac{dt}{e^t - cos(t)}$

On a au voisinage de zéro : $e^t = 1 + t + O(t)$et $cos(t) = 1 + O(t)$

$e^t - cos(t) = t + O(t)$ C'est-à-dire $e^t - cos(t) \sim t$

$\int_0^1 \frac{dt}{t}$ est divergente alors $\int_0^1 \frac{dt}{e^t - cos(t)}$ est divergente

Théorème : critère de Cauchy

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$

$\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[: \left(x > 0 \; et \; x' > c \Rightarrow \left| \int_x^{x'} f(t)ft \right| < \varepsilon \right)$$

Théorème : critère d'Abel

Soient f et g deux fonctions localemnt intégrables sur $[a, b[$

Si $\begin{cases} f \; monotone \; et \; \lim_{x \to b} f(t) = 0 \\ \exists \; M > 0 \; tel \; que \; \forall x \; \in \; [a, b[: \left| \int_a^b g(t)dt \right| \; \leq M \end{cases}$ alors $\int_a^b f(t)g(t)dt \;\; est \; convergente$

Exemples

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

On a $f(t) = \frac{1}{t}$ décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} f(t) = 0$

Et $\left| \int_1^x sin(t)dt \right| = |\cos(1) - \cos(x)| \leq |\cos(1) + \cos(x)| \leq 2$

2) $\left| \int_1^{+\infty} sin(t)dt \right| \leq 2$; alors d'après Abdel l'intégrable $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente

4. Convergence absolue et semi convergence :

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$.

Définitions :

- On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si et seulment si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente

- On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est semi convergente si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\int_a^b |f(t)|dt$ n'est pas convergente

Théorème : $\int_a^b |f(t)|dt$ convergente alors $\int_a^b f(t)dt$ convergente

Exemple :

$$\int_1^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2} dt$$

On a

$\left|\frac{cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente (Riemann) et $\int_1^{+\infty} \left|\frac{cos(t)}{t^2}\right| dt$ est absolument convergente alors $\int_1^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2} dt$ est convergente

Intégrales de référence :

En plus des intégrales de Riemann et de Bertrand, nous avons aussi :

Intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Intégrale de Dirichlet : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente t vaut $\frac{\pi}{2}$

Intégrale de Fresnel : $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ sont convergente et valent $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$