Chapitre III

Equations différentielles

Equations différentielles ordinaires du 1[er] et du 2ème ordre.

Eléments d'équations aux dérivées partielles.

1. Equations différentielles ordinaires

1.1 Définitions :

- On appelle équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante x, la fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées. On écrit :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Ou bien

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right) = 0$$

Remarque : Si la fonction $y = f(x)$ est fonction d'une seule variable, l'équation différentielle est dite ordinaire. On se limitera à l'étude des équations différentielles ordinaires.

- On appelle ordre de l'équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation. Ainsi, $y' - 2xy + 5 = 0$ est une équation du premier ordre et l'équation $y'' + 4ky' - 2cosx = 0$ est une équation du second ordre.
- On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle toute fonction $y = f(x)$ vérifiant identiquement cette équation.

2. Equations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est une équation de la forme $F(x, y, y') = 0$ ou bien $y' = f(x, y)$

2.1. Equations à variables séparées

Une équation à variables séparées est de forme $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$.

Méthode de résolution

$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$, Si $f_2(y) \neq 0$, on peut écrire : $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ qui peut s'exprimer également sous forme générale : $M(x)dx + N(y)dy = 0$.

La solution de ce type d'équation s'obtient par intégration:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$$

Exemple :

$$y' = -\frac{x}{y}$$

On peut l'écrire : $xdx + ydy = 0$

Son intégrale générale est :$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$

Il faut remarque que C est une constante positive. On peut alors l'écrire $2C = C_1^2$, donc $x^2 + y^2 = C_1^2$ qui représente une famille de cercles concentriques.

2.2. Equations à variables séparables

Elles s'écrivent sous forme de $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$

Méthode de résolution

En divisant les deux membres de $N_1(y)M_2(x)$, l'équation à variable séparable devient une équation à variables séparées. On l'écrit donc :

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

Exemples :

1)

$$(1 + x)ydx + x(1 - y)dy = 0$$

Divisons par yx : $\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0$

En intégrant, on obtient : $Ln|x| + x + Ln|y| - y = C \Rightarrow Ln|xy| + x - y = C$

C'est l'intégrale générale.

2) vitesse de désintégration : $\frac{dm}{dt} = -km$, solution : $m = Ce^{-kt} = m_0e^{-kt}$ avec $m_0$masse de l'élément à l'instant t=0.

2.3 Equations homogènes du premier ordre

Une fonction $f(x, y)$ est dite homogène de degré n par rapport à x et y si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Pour tout λ de $\mathbb{R}$.

Exemple : soit la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda\sqrt{x^2 + y^2} = \lambda f(x, y)$$

On remarque que c'est une équation de degré 1.

La fonction $f(x, y) = xy - y^2$ est homogène de degré 2.

La fonction $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{xy}$ est homogène de degré zéro.

L'équation $y^{'}=f(x,y)$ est dite homogène, si la fonction $f(x,y)$ est homogène de degré zéro.

Méthode de résolution

$$f(\lambda x,\lambda y)=\ f(x,y)=\frac{dy}{dx}$$

En posant $\lambda=\frac{1}{x}$, on peut écrire $\frac{dy}{dx}=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$ qui dépent que du rapport $\frac{y}{x}$.

Faisons le changement de variable : $u=\frac{y}{x}$ ou bien $y=ux$ Donc $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

L'équation $\frac{dy}{dx}=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$ s'écrit alors :

$$u+x\frac{du}{dx}=f(1,u)$$

C'est une équation à variable séparable : $x\frac{du}{dx}=f(1,u)-u$

$$\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x}$$

Par intégration, on trouve : $\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C$

Exemple :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$$

Avec $u=\frac{y}{x}$, on peut écrire : $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}-u=\frac{u^3}{1-u^2}$

Ou bien : $\frac{1-u^2}{u^3}du=\frac{dx}{x}$; $\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x}$

Par intégration : $-\frac{1}{2u^2}-Ln|u|=Ln|x|+Ln|C|$ou bien $-\frac{1}{2u^2}=Ln|uxC|$

Substituons $u=\frac{y}{x}$, on obtient l'intégrale générale : $-\frac{x^2}{2y^2}=Ln|yC|$

Qui s'écrit : $x=y\sqrt{-2Ln|yC|}$

2.4 Equations se ramenant aux équations homogènes

Les équations de la forme $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ où les constantes c et c_1 ne sont pas nulles ne sont pas homogène (si les constantes sont nulles, elles sont homogènes). Elles peuvent se ramener aux équations homogènes à l'aide d'un changement de variable approprié.

Méthode de résolution

Soit $ab_1\neq a_1b$ dans l'équation $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$;

Posons : $\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$

Par substitutions : $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}$

Il faut choisir h et k de telle sorte que $\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$;

Ainsi : $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$

Si $(c, c_1) \neq (0,0)$ et $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0;\ ab_1 = a_1b\ (\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}, Donc\ il\ existe\ un\ \lambda\ tel\ que\ \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$

Nous utilisons le changement de variable suivant ;

$$z = ax + by$$

Qui ramène $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ à une équation à variables séparables.

En effet, $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$

D'où : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}$

Donc l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ s'écrit : $\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z+c}{\lambda z+c_1}$ (équation à variables séparables).

Exemple :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$$

Remarquons que $(c = -3, c_1 = -1) \neq (0,0)$

Pour la ramener à une équation homogène, faisons le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases}$$

Alors $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1+y_1+h+k-3}{x_1-y_1+h-k-1}$

La résolvant du système : $\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases}$ donne $\begin{cases} h = 2 \\ k = 1 \end{cases}$

On obtient ainsi l'équation homogène : $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$

Elle peut être résolue en faisant la substitution : $\frac{y_1}{x_1} = u$

On a alors : $\frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1\frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u}$

$$x_1\frac{du}{dx_1} = \frac{1 + u}{1 - u} - u = \frac{1 + u^2}{1 - u}$$

Séparons les variables : $\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx_1}{x_1}$

En intégrant : $arctg(u)-\frac{1}{2}Ln(1+u^2)=Ln|x_1|+Ln|C|$

$$arctg(u)=Ln\left|Cx_1\sqrt{1+u^2}\right| \Rightarrow Cx_1\sqrt{1+u^2}=e^{arctg\,(u)}$$

En remplacons $\frac{y_1}{x_1}=u$; $C\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{arctg\,\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}$

En passant aux variables x et y : $C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{arctg\,\left(\frac{y-1}{x-2}\right)}$

$$arctg\left(\frac{y-1}{x-2}\right)-\frac{1}{2}Ln\left(1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right)=Ln|c(x-2)|$$

2.5 Equations linéaires du premier ordre

On appelle équation du premier ordre toute équation s'écrivant sou la forme

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

Où P et Q sont deux fonctions continues.

Méthode de résolution

La solution de ce type d'équation est de forme $y=u(x)v(x)$. Alors $\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ s'écrit alors : $u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+Puv=Q$

Ou $u\left(\frac{dv}{dx}+Pv\right)+v\frac{du}{dx}=Q$

Choisissons v de sorte que $\frac{dv}{dx}+Pv=0$ et séparons les variables dans l'équation différentielle en v. On trouve $\frac{dv}{v}=-Pdx$.

Avec l'intégration : $v(x)=C_1e^{-\int Pdx}$

Comme les fonctions u et v sont arbitraires on peut prendre $C_1=1$, donc $v(x)=e^{-\int Pdx}$

Par substitution (avec $\frac{dv}{dx}+Pv=0$) on aura $v\frac{du}{dx}=Q \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{Q}{v}$

D'où $u=\int\frac{Q}{v}dx+C$ ce qui donne $y=v(x)\left(\int\frac{Q}{v}dx+C\right)=\left(e^{-\int Pdx}\right)\left(\int\frac{Q}{v}dx+C\right)$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y'-\frac{2}{x+1}y=x$$

Posons $y=uv$

$$u'v+uv'-\frac{2}{x+1}uv=x$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{2}{x+1}v\right)=x$$

Trouvons une équation de v qui vérifie $v' - \frac{2}{x+1}v = 0$.

$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{x+1}dx$$

$$Ln|v| = 2Ln|x+1| + Ln|C|$$

$$v(x) = C(x+1)^2$$

Donc $u'v + u\left(v' - \frac{2}{x+1}v\right) = x$ s'écrit $u'C(x+1)^2 = x$

$$du = \frac{x}{C(x+1)^2}dx = \left(\frac{1}{C(x+1)} - \frac{1}{C(x+1)^2}\right)dx$$

$$u = \frac{1}{C}Ln|x+1| + \frac{1}{C(x+1)} + C_1$$

Ainsi la solution

$$y = \left(\frac{1}{C}Ln|x+1| + \frac{1}{C(x+1)} + C_1\right) \times \left(C(x+1)^2\right) = (x+1)^2 Ln|x+1| + (x+1) + C(x+1)^2$$

2.6 Equation de Bernoulli

Toute équation s'écrivant sous la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

est dite équation de Bernoulli. P et Q sont des fonctions continues et $n \neq 0; n \neq 1$.

Méthode de résolution

Cette équation se ramène à une équation différentielle linéaire par la transformation suivante.

On divise les deux membres par y^n.

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}P(x) = Q(x)$$

Posons $z = y^{1-n}$, alors $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

Donc : $\frac{dz}{dx} + (1-n)Pz = (1-n)Q$ qui est une équation linéaire.

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle suivante : $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$

Après division par y^3 l'équation devient $y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3$

Posons ensuite $z = y^{-2}$; on a alors $\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

Donc $\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3$; c'est une équation linéaire.

Posons ensuite $z = uv; \frac{dz}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$

Alors $\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3$ s'écrit : $u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - 2xuv = -2x^3$

Ou $u\left(\frac{dv}{dx} - 2xv\right) + v\frac{du}{dx} = -2x^3$

$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0$ donne $\frac{dv}{v} = 2xdx$ l'intégration $Ln|v| = x^2$;$v = e^{x^2}$

Par la suite : $v\frac{du}{dx} = -2x^3$ s'écrit $e^{x^2}\frac{du}{dx} = -2x^3$; $du = -2x^3e^{-x^2}dx$

$$u = -2\int x^3e^{-x^2}\,dx + c$$

L'intégration par partie : $u = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c$

$$z = uv = \left(x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c\right)e^{x^2} = x^2 + 1 + ce^{x^2}$$

On a donc l'intégrale générale de l' équation : $z = y^{-2} = x^2 + 1 + ce^{x^2}$

Ou $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1+ce^{x^2}}}$

2.6 Equations aux différentielles totales

Ce type d'équations est de forme :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ (*)$$

$$\text{Avec } \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad (**)$$

et les fonctions M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial y}$ sont continues sur un certain domaine.

Méthode de résolution

La différentielle totale d'une fonction $u(x,y)$ s'écrit :

$$du = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy$$

Supposons que le membre de gauche de l'équation (*) soit la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x,y)$: donc $Mdx + Ndy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

Alors $M = \frac{\partial u}{\partial x}$; $N = \frac{\partial u}{\partial y}$

Sachant que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ alors si les dérivées sont contunues :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ce résultat implique que cette condition est **nécessaire** pour que le premier membre de l' équation (*) soit la différentielle totale d'une certaine fonction u.

De même, on peut montrer que cette condition est **suffisante** : si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ alors $Mdx + Ndy$ est la différentielle totale d'une certaine fonction u.

Comme $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ alors $u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y)$ (attention y est supposée constante)

x_0 étant l'abscisse d'un point arbitraire dans le domaine d'existence de la solution.

$\varphi(y)$ doit être choisie de sorte que $N = \frac{\partial u}{\partial y}$. Donc,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

Comme $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, on peut écrire $\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$

Ou bien$[N(x, y)]_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x, y) \Rightarrow N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y)$

Par conséquent : $N(x_0, y) = \varphi'(y)\ alors\ \varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + c_1$

Au final : $u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + c_1$

L'intégrale générale de l'équation $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ est

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = C$$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$$

Posons $M(x, y) = x^2 + y$ et $N(x, y) = x - 2y$

On voit que $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$

Donc il existe une fonction u telle que $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) donc \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int (x^2 + y)dx$

$$u = \frac{1}{3}x^3 + xy + \varphi(y)$$

D'autre part $N = \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$ donc $x + \varphi'(y) = x - 2y$

Alors $\varphi'(y) = -2y$ donc $\varphi(y) = -y^2 + c$

d'où $u = \frac{1}{3}x^3 + xy + -y^2 + c$

Ainsi la solution $\frac{1}{3}x^3 + xy + -y^2 = c$

2.7 Facteur intégrant

Dans le cas où le premier terme de l'équation $\mathrm{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$ n'est pas une différentielle totale, il est parfois possible de trouver une fonction $\mu(x,y)$ telle que si l'on la multiplie par l'équation $\mathrm{M(x,y)dx + N(x,y)dy}$, la fonction $\mu\mathrm{M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy}$ soit une différentielle totale. Dans ce cas, **la fonction $\mu(x,y)$ dite facteur intégrant.**

Recherche du facteur intégrant

L'équation $\mu\mathrm{M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0}$ est une équation aux différentielles totales :

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \Rightarrow \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow$$

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

En multipliant les deux membres par $\frac{1}{\mu}$, on aura

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = M\frac{\partial L n\mu}{\partial y} - N\frac{\partial L n\mu}{\partial x}$$

- Si $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ dépend uniquement de y : $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = f(y)$, alors $\mu = e^{\int f(y)dy}$
- Si $\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}}{N}$ dépend uniquement de x : $\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}}{N} = g(x)$, alors $\mu = e^{\int g(x)dx}$

Exemple :

Résoudre l'équation $(y + xy^2)dx - xdy = 0$

$$M = y + xy^2 \ et \ N = -x$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2x$; $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$; donc le terme $(y + xy^2)dx - xdy$ n'est pas une différentielle totale

On remarque que $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = -\frac{2}{y}$; alors $\mu = e^{\int f(y)dy} = \frac{1}{y^2}$

Donc le $\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2}dy$ est une différentielle totale

L'intégrale générale de cette équation est $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0$

Ou $y = -\frac{2x}{x^2+2C}$

2.8 Equation de Clairaut

Toute équation s'écrivant sous la forme suivante est dite équation de clairaut

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Méthode de résolution

Posons $p = \frac{dy}{dx}$, l'équation de Clairaut s'écrit donc $y = xp + \psi(p)$

Dérivons par rapport à x : $p = x\frac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$

Ou $[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0; son\ intégrale\ done\ la\ solution\ générale \\ ou \\ x + \psi^{'}(p) = 0; intégrale\ donne\ la\ solution\ particulière \end{cases} \Rightarrow$

$$p = c\ d^{'}\text{où}\ y = xc + \psi(c)$$

Géométriquement, elle représente une famille de droites.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y = xy^{'} + 2(y^{'})^2$$

Posons $y^{'} = p$; donc $y = xp + 2p^2$

Dérivons par rapport à x : $p = p + xp^{'} + 4pp'$

Donc $(x + 4p)p^{'} = 0 \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0 \\ ou \\ x + 4p = O \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = c \\ ou \\ p = -\frac{x}{4} \end{cases}$

Ainsi la solution générale est

$y = xc + 2c^2$

Par contre la solution singulière est :

$y^{'} = -\frac{x}{4}$ donne $y = -\frac{x^2}{8}$

2.9 Equation de Lagrange

On appelle équation de Lagrange toute équation s'écrivant sous la forme :

$$y = x\varphi(y^{'}) + \psi(y^{'})$$

Où φ et ψ sont des fonctions de $y^{'}$.

Remarques :

- Cette équation linéaire par rapport à x et y.
- L'équation de Clairaut est un cas particulier de l'équation de Lagrange $(\varphi(y^{'}) \equiv y'$

Méthode de résolution

Posons $y^{'} = p$,: $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ puis dérivons par rapport à x:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi^{'}(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

Ou

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

Solution singulière : $p = p_0 = cte$;donc y est une fonction linéaire de x.

En effet, $\frac{dp}{dx} = 0$ et $p_0 = \varphi(p_0)$

Pour trouver y : $y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$

Solution générale :

Ecrivons $p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$ sous la forme : $\frac{dx}{dp}\big(p - \varphi(p)\big) = x\varphi'(p) + \psi'(p)$

Ou encore : $\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$

Considérons x comme fonction de p : x(p) :

La solution est $x = \omega(p, C)$; $p = \omega^{-1}(x, c)$.

En éliminant p, on obtient l'intégrale générale $y = \phi(x, C)$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y = x(y')^2 + (y')^2$$

Avec $y' = p$, $y = xp^2 + p^2$

Dérivons par rapport à x : $p = p^2 + [2xp + 2p]\frac{dp}{dx}$

Solution singulière :

$p = p^2$ pour $p_0 = 0 \; et \; p_1 = 1$

$y = 0$ et $y = x + 1$

Intégrale générale

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{2}{1-p} = \frac{2}{1-p}$$

Admet comme solution $x = -1 + \frac{c^2}{(p-1)^2}$ donne $p = 1 + \frac{c}{\sqrt{1+x}}$

$$p = y' \Rightarrow y = (x+1)\left(1 + \frac{c}{\sqrt{1+x}}\right)^2 = \left(c + \sqrt{x+1}\right)^2$$

3 Equations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

3.1 Définition : Les équations s'écrivant sous la forme

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\mathrm{I})$$

Où a, b, et c sont des constantes réelles sont dites équations linéaires homogène du second ordre à coefficients constants.

Méthode de résolution

On chercher les solutions particulières de sous la forme $y = e^{rx}$ où r est une constante. Par substitution, l'équation (I) s'écrit

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Comme $e^{rx} \neq 0$ alors $ar^2 + br + c = 0$.

Calculant son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \; et \; r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ est : $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

Exemple : La solution de $y'' + 2y' - 3y = 0$ est $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$

- Si $\Delta = 0$; l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double $r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$;

La solution générale est $y = (c_1 x + c_2) e^{r_1 x}$

Exemple : La solution de $y'' + 2y' + y = 0$ est $y = (c_1 x + c_2) e^{-x}$

Si $\Delta < 0$: l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet des racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha - i\beta \; et \; r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha + i\beta$$

La solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ est

$$y = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x)$$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante $y'' + 2y3 + 5y = 0$:

$$y = e^{-x}(c_1 cos2x + c_2 sin2x)$$

3.2 Equations linéaires non homogènes du second ordre à coefficients constants (avec second membre)

Définition : Les équations s'écrivant sous la forme

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad \text{(I)}$$

Où a, b, et c sont des constantes réelles et $g(x) \neq 0$ sont dites équations linéaires non homogène du second ordre à coefficients constants

Méthode de résolution

Il faut résoudre d'abord $ay'' + by' + cy = 0$; puis chercher une solution particulière y_p, soit par superposition, soit par la variation de la constante. La solution générale s'écrit :

$$y_g = y_h + y_p$$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 5y' + 6y = 2\cos x$$

La solution de $y'' + 5y' + 6y = 0$ est $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

La solution particulière est de la forme : $y_p = A\cos x + B\sin x$

Par substitution de y_p dans $y'' + 5y' + 6y = 2\cos x$, on trouve $A = B = \frac{1}{5}$

Alors $y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$

4 Eléments d'équations aux dérivées partielles

Soit $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction de n variables indépendantes. Une équation qui fait intervenir une relation entre une fonction inconnue u, les variables, $x_1, x_2, \dots, x_n$ et ses dérivées partielles est dite équation différentielle aux dérivées partielles **(e. d. p.)**.

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_k^{m_k}}\right) = g(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$$

Où $1 \le k \le n$ et $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$

L'ordre d'une e.d.p. est l'ordre de la dérivée partielle la plus élevée qu'elle contient.

Une e.d.p. est dite **linéaire** quand elle l'est par rapport à u et à toutes ses dérivées partielles.

Une e.d.p. est dite **homogène** si $g(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$.

Une e.d.p. est dite **quasi-linéaire** si elle est linéaire par rapport à la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.

4.2 E.d.p. du 1er ordre

On appelle e.d.p. du 1er ordre toute équation ayant la forme suivante

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\,(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + G(x_1, x_2, \dots, x_n)u = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

C'est une équation quasi-linéaire, elle devient homogène pour F =0 et elle est linéaire si A_i ne dépend pas de u.

Considérons l'e.d.p. dépendant de deux variables indépendantes suivante :

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

La solution s'obtient par intégration du système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)}$$

Exemple : Résoudre l'e.d.p : $xy^2\frac{\partial u}{\partial x} + x^2 y\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 + y^2)u$

Soit le système $\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2 y} = \frac{du}{(x^2+y^2)u}$

D'une part on a : $\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} \Rightarrow ydy = xdx \Rightarrow y^2 - x^2 = c_1$

D'autre part : $x^2 \frac{dy}{x^2y} + y^2 \frac{dx}{xy^2} = x^2 \frac{du}{(x^2+y^2)u} + y^2 \frac{du}{(x^2+y^2)u} \Rightarrow x\frac{dy}{xy} + y\frac{dx}{xy} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{d(xy)}{xy} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{u}{xy} = c_2$

Ainsi la solution est : $\frac{u}{xy} = \phi(y^2 - x^2) \Rightarrow u = xy\phi(y^2 - x^2)$

4.3.1 Quelques types d'e.d.p. du 1er ordre

- Equation de transport : $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$ où $(t,x) \in]\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$
- Equation de Burgers $a(u)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$ où $(t,x) \in]\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

4.3 E.d.p. du second ordre

On appelle e.d.p. du second ordre toute équation de la forme

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right) = 0$$

Ou $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$

On se limitera aux équations du second ordre linéaire et quasi-linéaire à deux variables indépendantes :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + g(x,u)u = f(x,y)$$

Ou $a\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = R(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})$

4.3.1 Classification des e.d.p. du 2ème ordre

Le type des e.d.p du 2ème ordre dépend de leur discriminant Δ= $b^2 - ac$

- **Si $\Delta > 0$** : L'équation est du type hyperbolique . exp $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- **Si $\Delta = 0$:** L'équation est du type parabolique
- **Si $\Delta < 0$** : L'équation est du type elliptique . exp $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

4.3.2 Principales équations de la physique

Equation de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (c = \pm 1)$ est elliptique

Equation de Poisson : $\nabla^2 u = \delta(x,y)$

Equation de la chaleur (équation de diffusion) : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}$; le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ est le terme de diffusion.

Equation des ondes : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ est le terme de propagation.