

Série N°2 : Equations différentielles

Exercice 1

Donner la solution des équations différentielles suivantes :

- 1) $x^2 dx - \cos y dy = 0$
- 2) $x^2 dx + \frac{y}{y+1} dy = 0$
- 3) $\frac{x}{x+1} dx + y^2 dy = 0$ pour $x > -1$
- 4) $\sin(x) \cos(x) dx + ye^y dy = 0$
- 5) $\frac{\ln x}{x} dx + \frac{y^2}{y+1} dy = 0$
- 6) $2x(1+y)dx - ydy = 0$

Exercice 2

Intégrer les équations différentielles suivantes :

- 1) $y' = \frac{x-y}{x+y}$
- 2) $y' = \frac{x+y-3}{x+y-1}$
- 3) $y' = -\frac{x^2(y-2)}{(x+2)y^2}$
- 4) $y' = -\frac{x^2}{y^2}$

Exercice 3

Séparer, si possible, les variables dans les équations suivantes :

- 1) $y'(x) = \frac{x+e^x}{x^2 y^2}$
- 2) $y'(x) = \frac{x e^x}{x^2 + y^2}$
- 3) $y'(x) = \frac{y+e^y}{x^2 y^2}$
- 4) $y'(x) = \frac{y e^y}{x^2 + y^2}$

Exercice 4

Déterminer si les équations différentielles suivantes sont homogènes.

- 1) $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$
- 2) $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$
- 3) $(x+y)dx + \cos(y)dy = 0$
- 4) $x^2 dx + ydy = 0$
- 5) $dx + \frac{x+y}{x-y} dy = 0$

Exercice 5

Résoudre les équations différentielles ordinaires homogènes suivantes:

- 1) $y'(x) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$
- 2) $y'(x) = \frac{y^3}{x(x^2 + y^2)}$
- 3) $y'(x) = \frac{x}{x+2y}$

Exercice 6

Déterminer, en posant que le membre droit des équations est de la forme $-M(x,y)/N(x,y)$, si les équations différentielles ordinaires suivantes sont exactes:

- 1) $y'(x) = \frac{x^2}{y}$
- 2) $y'(x) = \frac{x^2 + y}{y^2 - x}$

$$3) y'(x) = \frac{x+y}{x-y}$$

$$4) y'(x) = \frac{y^2+x}{-x^2+y}$$

Exercice 7

Résoudre les équations différentielles exactes suivantes :

$$1) \frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0 \quad 2) \frac{y}{x} dx + \ln x dy = 0, x > 0 \quad 3) \left(1 - \frac{x}{y}\right) dx + \left(1 - \frac{x^2}{2y^2}\right) dy = 0$$

Exercice 8

Trouver un facteur intégrant pour les équations différentielles suivantes :

$$1) (x+y)dx + x^2 dy = 0 ; x > 0 \quad 2) \frac{1}{y} dx + (1+xy)dy = 0$$

Exercice 9

Trouver un facteur intégrant pour chacune des équations différentielles ordinaires suivantes :

$$1) y'(t) = e^t y(t) + e^{t^2} \quad 2) t y'(t) = t^2 y(t) + \ln t ; t > 0 \quad 3) (\ln t)^{-1} y'(t) = t^{-1} y(t) - e^t ; t > 0$$

Exercice 10

Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

$$1) y'(t) = t y(t) + t^3 \quad 2) t y'(t) = t y(t) + t^2 \text{ pour } t > 0 \quad 3) t^2 y'(t) = t y(t) + t^{-1} \text{ pour } t > 0$$

Exercice 11

Résoudre les équations de Bernoulli suivantes :

$$1) y'(t) + y(t) = y^3(t) \quad 2) e^t y'(t) + e^t y(t) = y^2(t) \quad 3) y'(t) + \frac{1}{t} y(t) = \ln(t) y^2(t) (t > 0)$$

Exercice 12

Transformer les équations différentielles non linéaires suivantes en équations linéaires.

$$1) e^{y(t)} y'(t) + t e^{y(t)} = e^t ; \quad 2) \frac{1}{y(t)} y'(t) + t^2 \ln y(t) = \ln t (t > 0)$$

Exercice 13

Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

$$(1) y'' = \omega^2 y \quad (2) y'' + 2y' + y = 2 \quad (3) y'' + \omega^2 y = 1 \quad (4) y'' + 2y' + 5y = 5 \cos x$$

$$(5) y'' + y' - 25y = e^{-2x} ; (6) y'' + y' + y = 0$$

Exercice 14

Le courant $i(t)$ qui circule dans un circuit LR soumis à une tension sinusoïdale vérifie l'équation

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_0 \sin(\omega t) ; \text{ Déterminer } i(t) \text{ si } i(0) = 0$$

Exercice 15

Le courant $i(t)$ qui circule dans un circuit LC soumis à une tension sinusoïdale vérifie l'équation

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = \omega U_0 \cos(\omega t) ; \text{ Déterminer } i(t) \text{ si } i(0) = 0 \text{ et } \frac{di}{dt}(0) = 0$$