Série de TD n°3 Dynamique (ING)

Exercice 1

On donne le vecteur position $\vec{r}$ d'un corps de masse $6kg$: $\vec{r} = (3t^2 - 6t)\vec{\imath} - 4t^3\,\vec{\jmath} + (3t+3)\vec{k}$, *r est exprimé en mètre.* Trouver :

1. la force $\vec{F}$ agissant sur le corps,

2. la quantité de mouvement $\vec{P}$ du corps.

3. monter que $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

Exercice 2

Un projectile M de masse m est lancé d'un point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, contenue dans le plan XOY du repère galiléen $R(O,X,Y,Z)$. Le vecteur $\vec{v}_0$ fait un angle θ avec l'axe $\overrightarrow{OX}$. Le mouvement du projectile se fait avec une force de frottement $\vec{f} = -k\vec{v}$ avec k une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse M.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique. En déduire les équations différentielles du mouvement.

2. Déterminer l'expression de la composante v_x et celle de la composante v_y de $\vec{v}(M)$. Que deviennent les expressions de v_x et v_y lorsque le temps tend vers l'infini.

Exercice 3

La trajectoire de la Terre autour du soleil est circulaire de rayon R =150.10^6 *km*. Sachant que la terre est un simple satellite du soleil, montrer que la masse du soleil est M = 2. 10^{30} kg.

Exercice 4

Un solide S, assimilé à un point matériel, de masse $m = 0,1$ kg, glisse le long d'un plan incliné qui forme un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. On prend $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

1. Le solide est abandonné depuis le point A sans vitesse initiale. En considérant les frottements négligeables : **a.** Trouver l'accélération du solide

b. Déterminer la nature du mouvement de S. Justifier.

c. Calculer la durée du parcours AB, sachant que $AB = 2$ m.

2. En fait, cette durée est de 1,3 s, en admettant l'existence des frottements caractérisés par un coefficient de frottements cinétique μ_c.

a.Représenter les forces agissant sur S dans ce cas.

b. Trouver l'expression de l'accélération du solide en fonction de g, α et μ_c.

c. Déduire le coefficient μ_c.

3. Le solide est maintenant lancé du point B vers le point A. Au point B sa vitesse est de $3\ \mathrm{m/s}$. Déterminer la position du point C où le mouvement du solide S s'arrête dans les deux cas:

a. Si on néglige les frottements.

b. Si le coefficient de frottements cinétique est de $\mu_c = 0{,}11$.

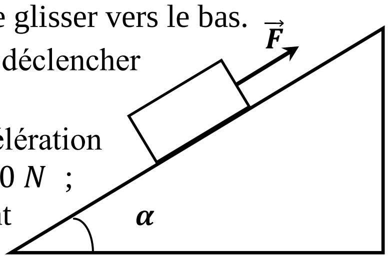
Exercice 5

Sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale, on pose une boite de masse $m = 8\ kg$. Les coefficients de frottements statique et cinétique sont respectivement $\mu s = 0.2$ et $\mu c = 0.1$. On prend $g = 10\ ms^{-2}$

1. On maintient la boite en équilibre en lui appliquant une force $\vec{F}$ de grandeur F (fig. ci-dessous).

a. Calculer la valeur minimale de F nécessaire pour empêcher la boite de glisser vers le bas.

b. Calculer la valeur maximale de F qu'on peut appliquer à la boite sans déclencher son mouvement vers le haut.



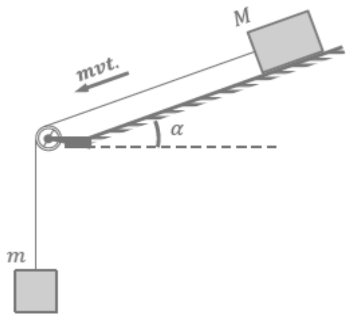
2. Préciser le sens du déplacement quand il a lieu et calculer l'accélération correspondante pour chacune des valeurs suivantes de F : $F1 = 20\ N$; $F2 = 40\ N$; $F3 = 60\ N$ On supposera que la boite est initialement immobile pour chacune de ces valeurs.

Exercice 6

Un corps de masse $M = 7kg$ se trouve sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. Il est relié à un corps de masse m par l'intermédiaire d'un fil inextensible passant à travers une poulie de masse négligeable (figure ci-contre). Les frottements entre M et le plan incliné sont caractérisés par les coefficients de frottement statique $\mu s = 0{,}6$ et cinétique$\mu c = 0{,}4$.

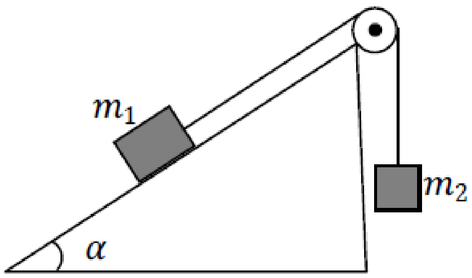
On prend g=10m/s^2.

1. Représenter les forces agissant sur les deux masses M et m.
2. Déterminer la valeur de m pour que M se mette en mouvement.
3. Pour une valeur de $m = 2kg$, calculer l'accélération du système.
4. Calculer la tension du fil.
5. Calculer le module de la force de frottement appliquée sur M



Exercice 7

Un corps M_1de masse $m_1 = 10kg$, posé sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale, est relié à un corps M_2de masse m_2 par l'intermédiaire d'un fil inextensible passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable (fig. ci-contre). Le contact entre le corps et le plan incliné est caractérisé par des coefficients de frottement statique $\mu_s = 0.2$ et cinétique $\mu_c = 0.1$. (on prendra $g = 10\ ms^{-2}$) et $\alpha = 30°$.



1. Calculer la valeur minimale m_{2min}, du corps M_2, pour empêcher le corps M_1de glisser vers le bas.

2. Calculer la valeur maximale m_{2max}, du corps M_2 , pour maintenir le corps M_1 en équilibre sans déclencher son mouvement vers le haut.

3. On prend $m_2 = 3kg$: préciser le sens du déplacement du système et calculer sont accélération.

Exercice 8

Cet exercice s'intéresse à la glissade d'un enfant esquimau E de masse m sur le toit d'un igloo d'où il s'élance sans vitesse initiale. L'enfant glisse sans aucun frottement à la surface de l'igloo. Sa position est repérée par l'angle θ. Pour simplifier, l'igloo est supposé sphérique de rayon R.

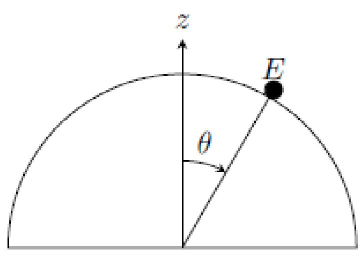
1 - Appliquer le théorème de la résultante cinétique à l'enfant pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle θ. Identifier l'équation du mouvement, qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre équation contient-elle ?

2 - En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, montrer que

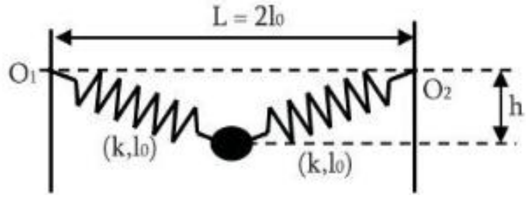
$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)$$

3 - En déduire l'expression de la force de réaction de l'igloo.

4 - L'enfant décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle et à quelle vitesse?



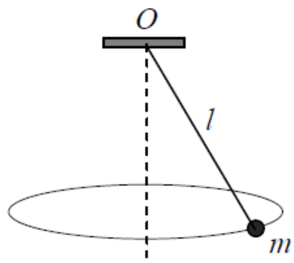
Exercice 9



Une masse m =190 g est maintenue par deux ressorts identiques liés a deux tiges verticales distante d'une longueur L = $2l_0$ avec l_0 =10 cm la longueur a vide des deux ressorts identiques de raideur k (figure ci-contre). A l'équilibre, la masse est descendue d'une hauteur h = 15 cm par rapport a la ligne horizontale O_1O_2

1. Représenter les forces appliquées sur m
2. Trouver la relation liant les longueurs l_1 et l_2 des ressorts a l'équilibre
3. Déterminer alors la longueur l des ressorts en fonction de l_0 et h
4. Déterminer une expression donnant la raideur k des ressorts

Exercice10



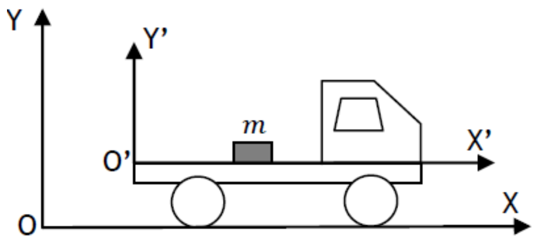
On considère un pendule conique constitué d'une masse ponctuelle m accrochée à un fil inextensible de longueur l (fig. ci-contre).

1. En utilisant le théorème du moment cinétique, montrer que si la vitesse de rotation ω de la masse autour de la verticale est constante, le mouvement s'effectuera dans un plan horizontal et qu'il sera circulaire.

2. Trouver dans ce cas l'angle d'inclinaison du fil par rapport à la verticale.

Exercice 11

Une boite de masse m=12kg se trouve sur la benne d'un camion roulant sur une route droite et horizontale. Les coefficients de frottements statique et cinétique entre la boite et la surface de la benne sont $\mu_s = 0.2$et $\mu_c = 0.1$ espectivement. Notons par R(O,X,Y,Z) le référentiel fixe lié à la route, considéré galiléen, et par R'(O',X',Y',z') le référentiel lié au camion (fig. ci-contre).



1. Qu'elle est l'accélération maximale que peut atteindre le camion sans que la boite ne glisse vers l'arrière ?

2. Calculer l'accélération de la boite dans le référentiel R(OXYZ) dans les cas où l'accélération du camion est : 4 ms^{-2}et 5 ms^{-2}. Que remarque-t-on ?

3. Calculer les composantes de la force que la boite exerce sur la benne dans le cas de la question 1 et de la question 2.

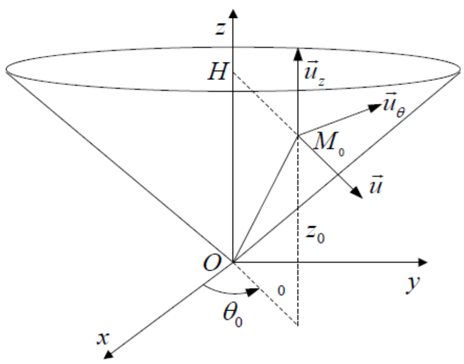
Exercices supplémentaires

Exercice S1

Un point matériel de masse m, se déplace sans frottement suivant un axe OX, sous l'action d'une force de grandeur $F = \alpha x + \beta x^2$, étant la position et α et β des constante positives.

1. Sachant que la vitesse de m à l'origine est nulle, trouver sa vitesse instantanée en fonction de x.
2. Quel est le domaine non accessible à M sur l'axe OX ?

Exercice S2



Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur la surface intérieure d'un cône de révolution d'axe (Oz), de sommet O et de demi angle au sommet .

A l'instant t_0, M a pour coordonnées cylindriques (r_0, θ_0, z_0). Dans la région considérée, l'accélération de pesanteur $\vec{g}$ sera considérée comme uniforme. Le référentiel $R\left(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{k}\right)$ est galiléen.

1/ Montrer que la côte du point M, notée z , est donnée par : $z = r\frac{z_0}{r_0}$

2/ Appliquer la relation fondamentale de la dynamique dans R et la projeter sur la base locale des coordonnées cylindriques $\left(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{k}\right)$. Ecrire le système des trois équations différentielles obtenues.

3/ Déduire la relation $\dot{\theta} = f(r_0,v_0,r)$ de l'expression de la composante orthoradiale de l'accélération du point M.

4/ Mettre l'équation différentielle d'intégrale $r\ (t\ )$ sous la forme :

$$\ddot{r} + \frac{A(r_0,v_0,z_0)}{r^3} = B(r_0,z_0,g)$$

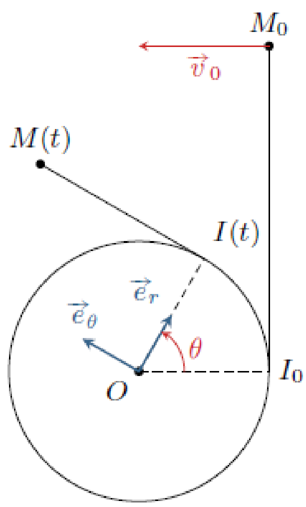
5/ Pour quelle vitesse initiale $v_0 = f(z_0,g)$ le point M a-t-il un mouvement circulaire uniforme de rayon r_0 sur le cône, autour de l'axe (Oz) ?

6/ Multiplier par 2 les deux membres de l'équation différentielle de solution $r\ (t\ )$ et l'intégrer une fois par rapport au temps . Présenter l'équation différentielle obtenue sous la forme :
$\dot{r}^2 = f(r_0,v_0,z_0,r,g)$.

Exercice S3

Considérons une petite planète de rayon R et de masse volumique moyenne $\rho = 5\ gcm^{-3}$.
1. Calculer l'accélération de la pesanteur à la surface de cette planète.
2. Quel serait le poids d'un homme sur cette planète sachant que sa masse est $m = 80kg$? Comparer avec son poids sur la terre.

Exercice S4



Un fil de longueur L, inextensible et de masse négligeable, est accroché tangentiellement à une bobine plate de rayon R. À l'extrémité libre est accroché un point matériel M, de masse m. L'effet de la pesanteur est négligé.

Le fil est tendu et M lancé dans le plan de la bobine depuis la position M_0 perpendiculairement au fil, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, afin d'enrouler le fil autour de la bobine.

On utilise la base polaire relative au point I, point du fil le plus proche de M à être en contact avec la bobine.

1 - Montrer que $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + (L - R\theta)\vec{e}_\theta$. En déduire les composantes de la vitesse et de l'accélération de M dans cette base.

2 - En utilisant le PFD, montré que la vitesse radiale de M est constante. Que vaut cette constante ?

3 - En déduire par intégration une relation entre θ et t puis déterminer la durée totale τ nécessaire pour enrouler le fil en totalité.

4 - Établir la loi horaire $\theta(t) = \frac{L}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right)$.

5 - Vérifier que le fil reste tendu tout au long du mouvement.

Corrigé Série de TD n°3 Dynamique (ING)

Exercice 1

1. La force $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (3t^2 - 6t)\vec{\imath} - 4t^3\vec{\jmath} + (3t+3)\vec{k} \rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt} = (6t-6)\vec{\imath} - 12t^2\vec{\jmath} + 3\vec{k} \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\vec{\imath} - 24t\vec{\jmath}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(6\vec{\imath} - 24t\vec{\jmath})$$

2. La quantité de mouvement $\vec{P} = m\vec{v} = m\left((6t-6)\vec{\imath} - 12t^2\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right)$

3. vérification $\vec{F} = d\vec{P}/dt$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(6\vec{\imath} - 24t\vec{\jmath}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\left(m\left((6t-6)\vec{\imath} - 12t^2\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right)\right)}{dt} = m\big((6\vec{\imath} - 24t\vec{\jmath})\big) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

(1)=(2) donc .. $\vec{F} = d\vec{P}/dt$

Exercice 2

1. Les équations du mouvement :

Le repere $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$est considéré galiléen les forces appliquées sur le corps sont :

Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

La force de frottement $\vec{f} = -k\vec{v}$

$$\vec{v}_0 = v_0\cos(\theta)\,\vec{\imath} + v_0\sin(\theta)\,\vec{\jmath}$$

En appliquant le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \ : \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Pour trouver les équations du mouvement il faut projeter l'équation sur les axes OX et OY

On a $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{k}$

$$\vec{f} = -k\vec{v} = -k\big(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}\big) = -k(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath})$$

Le mouvement se fait dans le plan XOY :

On a aussi $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath}$

Projection sur OX :

$$-kv_x = ma_x = m\frac{dv_x}{dt}$$

Projection sur OY :

$$-mg - kv_y = ma_y = m\frac{dv_y}{dt}$$

2. Les expressions du composant vecteur vitesse

Sur OX on a :

$$-kv_x = m\frac{dv_x}{dt} \to \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m}dt \to \int_{v_{0x}}^{v_x}\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \to \ln\left(\frac{v_x}{v_{0x}}\right) = -\frac{k}{m}t \to v_x = v_{0x}\exp(-\frac{k}{m}t)$$

$$v_x = v_0\cos(\theta)\exp(-\frac{k}{m}t)$$

Sur oy:

$$-mg - kv_y = m\frac{dv_y}{dt} \to -g - \frac{k}{m}v_y = \frac{dv_y}{dt} \to \frac{dv_y}{g + \frac{k}{m}v_y} = -dt$$

$$\frac{1}{\left(\frac{k}{m}\right)}\frac{\left(\frac{k}{m}\right)dv_y}{g + \frac{k}{m}v_y} = -dt \to \frac{\left(\frac{k}{m}\right)dv_y}{g + \frac{k}{m}v_y} = -\left(\frac{k}{m}\right)dt \to \int_{v_{0y}}^{v_{0y}}\frac{\left(\frac{k}{m}\right)dv_y}{g + \frac{k}{m}v_y} = -\left(\frac{k}{m}\right)\int_0^t dt$$

$$\to \ln\left(\frac{g + \frac{k}{m}v_y}{g + \frac{k}{m}v_{0y}}\right) = -\frac{k}{m}t \to \frac{g + \frac{k}{m}v_y}{g + \frac{k}{m}v_{0y}} = \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

$$\to\ g + \frac{k}{m}v_y = \left(g + \frac{k}{m}v_{0y}\right)\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \to v_y = \frac{m}{k}\left(g + \frac{k}{m}v_{0y}\right)\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - \frac{mg}{k}$$

$$\to v_y = \left(\frac{mg}{k} + v_0\sin(\theta)\right)\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - \frac{mg}{k}$$

Quand
$t \to \infty, v_x = \lim_{t\to\infty,} v_0\cos(\theta)\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) = 0, v_x = \lim_{t\to\infty,}((\frac{mg}{k} + v_0\sin(\theta))\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) -$
$mgk) = -mgk$

Exercice 3

Si on assimile la trajectoire de la terre à un cercle, le PFD s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \to \vec{P} = m\vec{a}$$

Projection sur l’axe normale : $P = ma_N \to \frac{GM_SM_T}{R^2} = M_T\frac{v^2}{R}$

$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T}R$$

d'où :

$$\frac{GM_S}{R^2} = \frac{\left(\frac{2\pi}{T}R\right)^2}{R} \to \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \to M_S = \frac{4\pi^2}{G}\cdot\frac{R^3}{T^2}$$

Application numérique : $T = 1ans = 3153600s, G = 6.61\ 10^{-11}\ SI, M_S = 2\ 10^{30}kg$

Exercice 4

1. a. L'accélération :

PFD :$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} (X'X): mgsin\alpha = ma \\ (Y'Y): R - mgcos\alpha = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow a = gsin\alpha = 5\,m/s^2$$

b. La nature du mouvement de S:$a = C^{ste}$ et $\vec{a}.\vec{v} > 0\vec{v}$ et $\vec{a}$dans le même sens, donc le mouvement est <u>rectiligne uniformément accéléré</u>.

c. La durée du parcours AB :

L'équation horaire dans le cas du mouvement rectiligne uniformément accéléré est :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

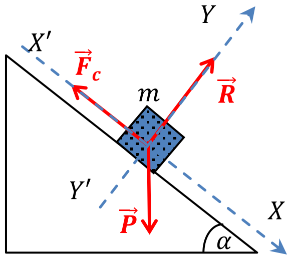
Donc, l'équation horaire de notre solide est :

$x(t) = \frac{1}{2}gsin\alpha t^2 + x_A$ On peut considérer $x_A = 0$

Le temps de parcours t_p s'obtient comme suit :

$$x(t_p) = x_B = \frac{1}{2}gsin\alpha t_p^2 + x_A$$

$$\Rightarrow t_p = \sqrt{\frac{2(x_B - x_A)}{gsin\alpha}} = \sqrt{\frac{2AB}{gsin\alpha}} = 0{,}89s$$



2. Représentation des forces agissant sur S et calcul du coefficient μ_c:

- Les forces agissant sur S(voir le schéma) :
- Le coefficient μ_c:

PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_c = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} (X'X): -F_c + mgsin\alpha = ma \\ (Y'Y): R = mgcos\alpha = \frac{F_c}{\mu_c} \end{cases}$

$$F_c = \mu_c R = \mu_c mgcos\alpha$$

$$\Rightarrow a = gsin\alpha - \mu_c gcos\alpha$$

L'équation horaire du solide devient :

$x(t) = \frac{1}{2}(gsin\alpha - \mu_c gcos\alpha)t^2 + x_A$ On peut considérer $x_A = 0$

D'où :

$$x_B = \frac{1}{2}(gsin\alpha - \mu_c gcos\alpha)t_p^2 + x_A$$

$$\Rightarrow \mu_c = \frac{1}{gcos\alpha}\left(gsin\alpha - 2\frac{AB}{t_p^2}\right) = 0{,}3$$

3. Calcul de la distance BC :

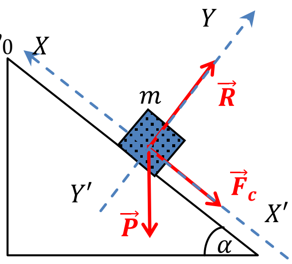
a.Sans frottements :

L'équation horaire de notre solide à présent est :

$a = -gsin\alpha$ il faut appliquer le PFD pour trouver a.

Pour trouver la distance BC (x_C) on peut appliquer directement la relation : $v_C^2 - v_B^2 = 2a.BC$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_x(t)} dv = \int_0^t a\,dt \to v_x(t) = -gsin\alpha t + v_0$$



$$\Rightarrow x(t) = \frac{-1}{2} gsin\alpha t^2 + v_0 t + x_0$$

$$x_0 = x_B = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{-1}{2} gsin\alpha t^2 + v_0 t$$

Nous avons : $v_x(t) = -gsin\alpha t + v_0 \Rightarrow t = \frac{v_0 - v_x(t)}{gsin\alpha}$

Remplaçons dans l'équation horaire de $x(t)$:

$$x(t) = \frac{-1}{2} \frac{\left(v_0 - v_x(t)\right)^2}{gsin\alpha} + v_0 \left(\frac{v_0 - v_x(t)}{gsin\alpha}\right)$$

Au point C, la vitesse $v_x = 0$, alors :

$$x_C = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{gsin\alpha} = 0{,}9m$$

D'où :

$$BC = x_C - x_B = 0{,}9 - 0 = 0{,}9m$$

b.Avec frottement :

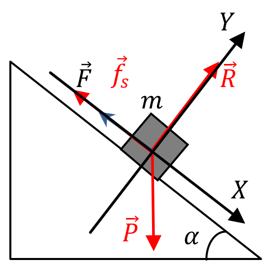
Il faut faire le même raisonnement à condition de prendre $a = -\mu_c gcos\alpha - gsin\alpha$(pour trouver cette relation il faut appliquer le PFD) car le frottement cette fois-ci est orienté dans le sens négatif, à l'opposé du sens de mouvement. Donc :

$$x_C = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\mu_c cos\alpha + sin\alpha)} = 0{,}59m$$

D'où :

$$BC = x_C - x_B = 0{,}59 - 0 = 0{,}59m$$

Exercice 5



La force minimale $\vec{F}_{min}$ pour que la boite glisse vers le bas :

PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \ : \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f_s} = \vec{0}$$

Projection :

$$\begin{cases} (OX) : -F_{min} + P_x - f_s = 0 \\ (OY) : R - P_y = 0 \ \rightarrow R = mg\cos\alpha \end{cases}$$

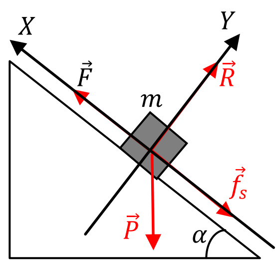
On a: $f_s = \mu_s R = \mu_s P_y = \mu_s mg \cos\alpha$

Donc;

$$F_{min} = P_x - f_s = P_x - \mu_s P_y = mg\left(\sin\alpha - \mu_{s,c}\cos\alpha\right) = 26.14N$$

La force maximale $\vec{F}_{max}$ pour que la boite glisse vers le haut :

PFD :



$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \ : \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f_s} = \vec{0}$$

Projection :

$$\begin{cases} (OX) : F_{max} - P_x - f_s = 0 \\ (OY) : R - P_y = 0 \ \rightarrow R = mg\cos\alpha \end{cases}$$

On a : $f_s = \mu_s R = \mu_s P_y = \mu_s mg\cos\alpha$

Donc;

$$F_{max} = P_x + f_s = P_x - \mu_s P_y = mg\big(\sin\alpha + \mu_{s,c}\cos\alpha\big) = 53.86N$$

Si $F = F_1 = 20N \rightarrow F_1 < F_{min}$ donc, la boite glisse vers le bas

PFD :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \ : \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f_c} = m\vec{a}$$

Projection :

$$\begin{cases} (OX) : -F + P_x - f_c = ma \\ (OY) : R - P_y = O \end{cases}$$

Force de frottement :

$$f_c = \mu_c R = \mu_c P_y = \mu_c mg\cos\alpha$$

$$a = \frac{mg(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha) - F}{m} = 1.63\ ms^{-2}$$

Si $F = F_2 = 40N \rightarrow F_{min} < F_2 < F_{max}$ donc, la boite glisse ne glisse pas ; $a = 0$

Si $F = F_3 = 60N \rightarrow F_2 > F_{max}$

PFD :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \ : \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f_c} = m\vec{a}$$

Projection :

$$\begin{cases} (OX) : F - P_x - f_c = ma \\ (OY) : R - P_y = O \end{cases}$$

Force de frottement :

$$f_c = \mu_c R = \mu_c P_y = \mu_c mg\cos\alpha$$

$$a = \frac{F - mg(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha)}{m} = 1.63\ ms^{-2}$$

Exercice 6

1. Les forces agissant sur M et m voir la figure ci-contre

2. La valeur de m pour que M se met en mvt :
Soit m la masse minimale permettant au système d'être arraché de son état d'équilibre. On applique alors le principe fondamental de la dynamique au seuil de l'équilibre :

- La masse M :

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}\ : \vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{F}_r + \vec{T}_2 = \vec{0}$

$$\begin{cases} ox: P_x + T_2 - F_r = 0 \\ oy: -P_y + R_2 = 0 \end{cases}$$

Force de frottement $F_r = \mu_s R_2 = \mu_s P_y = \mu_s Mg\cos\alpha$

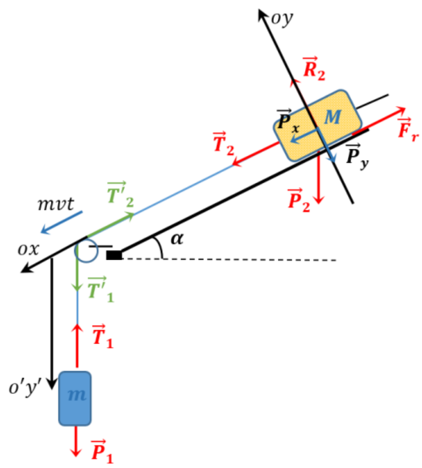
$$T_2 + Mg\sin\alpha - \mu_s Mg\cos\alpha = 0 \qquad (01)$$

- La masse m :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}\ : \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0}$$

Projection sur $o'y'$:

$$P_1 - T_1 = 0 \qquad (02)$$



Masse de fil et celle de la polie sont négligeables, alors :

$m_{fil} \sim 0 \rightarrow \begin{cases} T_1 = T'_1 \\ T_2 = T'_2 \end{cases}$ et $m_{polie} \sim 0 \rightarrow T'_1 = T'_2$. D'où $T_1 = T_2$

$(1) + (2)$ donne :

$$Mg\sin\alpha - \mu_s Mg\cos\alpha + mg = 0$$
$$m = M(\mu_s\cos\alpha - \sin\alpha)$$
$$m = 1.55kg$$

3. Accélération du système pour $m = 2kg$:

- La masse M :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}\ : \vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{F}_r + \vec{T}_2 = M\vec{a}$$

$$\begin{cases} ox: P_x + T_2 - F_r = Ma \\ oy: -P_y + R_2 = 0 \end{cases}$$

Force de frottement $F_r = \mu_c R_2 = \mu_c P_y = \mu_c Mg\cos\alpha$

$$T_2 + Mg\sin\alpha - \mu_c Mg\cos\alpha = Ma \qquad (03)$$

- La messe m :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}\ : \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m\vec{a}$$

Projection sur $o'y'$: $P_1 - T_1 = ma \qquad (04)$

Masse de fil et celle de la polie sont négligeables, alors :

$m_{fil} \sim 0$ et $m_{polie} \sim 0 \rightarrow T_1 = T_2$

$(3) + (4)$ donne :

$$Mg\sin\alpha - \mu_s Mg\cos\alpha + mg = (M+m)a$$
$$a = \frac{Mg\sin\alpha - \mu_s Mg\cos\alpha + mg}{M+m}$$
$$a = 1.96ms^{-2}$$

4. La tension du fil

$$T = T_1 = T_2 = m(g-a) \rightarrow T = 16.08N$$

5. Force de frottement :

$$F_r = \mu_c R_2 = \mu_c Mg\cos\alpha = 34.29N$$

Exercice 7

PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}\ : \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f}_s = \vec{0}$

$$\begin{cases} (m_A): & \vec{P}_A + \vec{N}_A + \vec{T}_A + \vec{f}_{sA} = \vec{0} \\ (m_B): & \vec{P}_B + \vec{N}_B + \vec{T}_B + \vec{f}_{sB} = \vec{0} \end{cases}$$

Projection:

$$\begin{cases} (m_A): \begin{cases} OX: P_{Ax} - f_{sA} - T_A = 0 \\ OY: \quad N_A - P_{Ay} = 0 \end{cases} \\ (m_B): \begin{cases} OX: -f_{sB} + T_B = 0 \\ OY: \quad N_A - P_B = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Fil inextensible et de masse négligeable, $T_A = T_B$ et $f_{sA} = \mu_s N_A = \mu_s P$

1. Le PDF s'écrit :

$$PFD: \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} (m_1): \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{R} + \vec{f}_s = \vec{0} \\ (m_2): \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0} \end{cases}$$

Le projection du PFD donne :

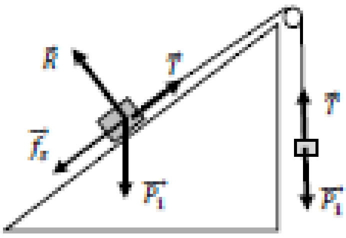
$$\begin{cases} (m_1): \begin{cases} m_1 g sin\alpha - T_1 - f_s = 0 & (1) \\ R - m_1 g cos\alpha = 0 & (2) \end{cases} \\ (m_2): \quad T_2 - m_2 g sin\alpha = 0 & (3) \end{cases}$$

A la limite de glissement vers le bas on a $m_2 = m_{2min}$. Le file est inextensible et de masse négligeable $T_1 = T_2 = T$. La force de frottement est donnée par : $f_s = \mu_s R = \mu_s m_1 g cos\alpha$. on remplace dans (1), et (3) ensuite on additionne (1)+(2), ceci donne :

$$m_{2min} = m_1(sin\alpha - \mu_s cos\alpha) = 3.67kg$$

2. Le PDF s'écrit :

$$PFD: \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} (m_1): \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{R} + \vec{f}_s = \vec{0} \\ (m_2): \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0} \end{cases}$$



Le projection du PFD donne :

$$\begin{cases} (m_1): \begin{cases} T_1 - m_1 g sin\alpha - f_s = 0 & (1) \\ R - m_1 g cos\alpha = 0 & (2) \end{cases} \\ (m_2): \quad T_2 - m_2 g sin\alpha = 0 & (3) \end{cases}$$

A la limite de glissement vers le haut on a $m_2 = m_{2max}$. Le file est inextensible et de masse négligeable $T_1 = T_2 = T$. La force de frottement est donnée par : $f_s = \mu_s R = \mu_s m_1 g cos\alpha$. on remplace dans (1), et (3) ensuite on additionne (1)+(2), ceci donne :

$$m_{2max} = m_1(sin\alpha + \mu_s cos\alpha) = 6.73kg$$

3. $m_2 = 3kg < m_{2min} = 3.67kg \rightarrow$ la masse m_1 glisse vers le bas :

L'accélération de m_1 et de m_2 est la même :

1. Le PDF s'écrit :

$$PFD: \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} (m_1): \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{R} + \vec{f}_c = m_1\vec{a} \\ (m_2): \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a} \end{cases}$$

Le projection du PFD donne :

$$\begin{cases} (m_1) : \begin{cases} m_1 g sin\alpha - T_1 - f_c = m_1 a & (1) \\ R - m_1 g cos\alpha = 0 & (2) \end{cases} \\ (m_2): \quad T_2 - m_2 g sin\alpha = m_2 a \quad (3) \end{cases}$$

Le file est inextensible et de masse négligeable $T_1 = T_2 = T$. La force de frottement est donnée par : $f_c = \mu_c R = \mu_c m_1 g cos\alpha$. on remplace dans (1), et (3) ensuite on additionne (1)+(2), ceci donne :

$$a = g\frac{m_1(sin\alpha - \mu_s cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} = 0.087ms^{-2}$$

Exercice 8

Le système étudié est l'enfant esquimau, en mouvement dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{N}$ de l'igloo, qui est sans frottement. Dans la base polaire,
$\vec{N} = N\vec{e}_r$ et $\vec{P} = -mg\cos\theta\,\vec{e}_r + mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta$
Exprimons l'accélération de l'enfant : comme l'igloo est sphérique alors *r* = *R* = cte.
$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = R\vec{e}_r$; $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$
Le PDF dans les cordonnées polaires :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Projection sur $\vec{e}_r$:

$$N - mg\cos\theta = ma_r = -mR\dot{\theta}^2$$

Projection sur $\vec{e}_\theta$:

$$mg\sin\theta = ma_\theta = mR\ddot{\theta}$$

L'équation du mouvement est celle projetée $\vec{e}_\theta$. L'équation projetée sur $\vec{e}_r$ contient en effet une force inconnue *N*, et ne permet donc pas de déterminer le mouvement ... par contre elle permet de déterminer cette force.
2.. L'équation du mouvement s'écrit :

$$mg\sin\theta = mR\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} - \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

On intègre par rapport au temps :

$$\int \ddot{\theta}\dot{\theta}\,dt - \frac{g}{R}\int \dot{\theta}\sin\theta\,dt = C$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{R}\cos\theta = C$$

Comme l'enfant s'élance de $\theta = 0$ sans vitesse $\dot{\theta} = 0$, donc :

$$\frac{g}{R} = C$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)$$

3.. la réaction :

$$N - mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2 \rightarrow N = mg\cos\theta - mR\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$$
$$N = mg(3\cos\theta - 2)$$

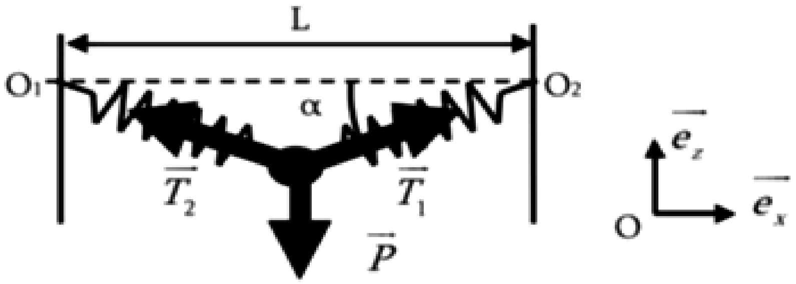
4. . L'enfant décolle de l'igloo si la force N de la liaison avec l'igloo s'annule, donc pour un angle θ_d tel que :

$$N = 0 \rightarrow 3\cos\theta_d - 2 \rightarrow \theta_d = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48°$$

La vitesse au moment de décollage:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta_d) \rightarrow \left(\frac{v_d}{R}\right)^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta_d) \rightarrow v_d = \sqrt{2gR(1-\cos\theta_d)}$$

Exercice 9



1. Inventaire des forces : → Poids $\vec{P} = m\vec{g_0} = -mg_0\cdot\vec{e_z}$

   → Tension Ressort 1 : $\vec{T_1} = -k(l_1 - l_0)\cdot\vec{e_1}$

   → Tension Ressort 2 : $\vec{T_2} = -k(l_2 - l_0)\cdot\vec{e_2}$

   Avec $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ des vecteurs unitaires suivant les ressorts

2. PFS dans $\Re = \left(O, \vec{e_x}, \vec{e_z}, t\right)$ galiléen appliqué à l'objet :

$$\vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -mg_0 \end{bmatrix}_{\Re} + \begin{bmatrix} -k(l_1 - l_0)\cos\alpha \\ +k(l_1 - l_0)\sin\alpha \end{bmatrix}_{\Re} + \begin{bmatrix} +k(l_2 - l_0)\cos\alpha \\ +k(l_2 - l_0)\sin\alpha \end{bmatrix}_{\Re} = 0$$

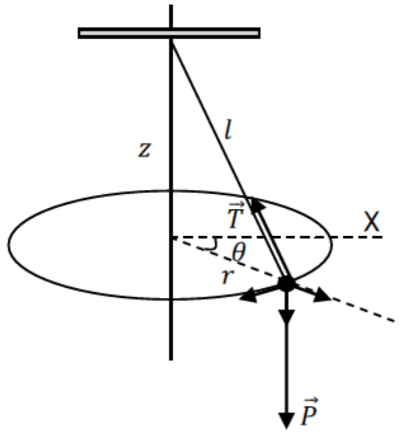
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{l_1 = l_2 = l} \\ 2k(l - l_0)\sin\alpha = mg_0 \end{cases}$$

3. Th de Pythagore : $\boxed{l = l_1 = l_2 = \sqrt{l_0^2 + h^2} = 25cm}$

4. Et d'après le PFS : $\boxed{k = \frac{mg_0}{2(l - l_0)\sin\alpha} = \frac{mg_0 l}{2h(l - l_0)} = 31\,N.m^{-1}}$

Corrigé Série de TD n°3 Dynamique (ING)

Exercice 10



1. Le TMC : $\frac{d\overrightarrow{L_{/o}}}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{/o}}$

Par raison de symétrie, on utilise les coordonnées cylindriques.

Le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \rho\, \overrightarrow{e_\rho} + z\, \overrightarrow{e_z}$ où $\rho = r$

Le vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\, \overrightarrow{e_\rho} + r\omega\, \overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\, \overrightarrow{e_z}$ avec $\omega = \dot{\theta}$

Le moment cinétique $\overrightarrow{L_{/o}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\mathcal{P}} = m(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}) = -mr\omega\, \overrightarrow{e_\rho} + m(z\dot{r} - r\dot{z})\overrightarrow{e_\theta} + mr^2\, \overrightarrow{e_z}$

$\frac{d\overrightarrow{L_{/o}}}{dt} = -2m\dot{r}\omega z\, \overrightarrow{e_\rho} + m(z\ddot{r} - r\ddot{z} - r\omega^2 z)\, \overrightarrow{e_\theta} + 2mr\dot{r}\omega\, \overrightarrow{e_z}$

Moments des forces : $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{/o}}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -mgr\, \overrightarrow{e_\theta}$

LE TMC donne 3 équations : $\begin{cases} -2m\dot{r}\omega z = 0 & (1) \\ z\ddot{r} - r\ddot{z} - r\omega^2 z + gr = 0 & (2) \\ 2mr\dot{r}\omega = 0 & (3) \end{cases}$

De la 3$^{\text{ème}}$ équation, on tire : $2r\dot{r} = 0 \Rightarrow \frac{d(r^2)}{dt} = 0 \Rightarrow r = Cte$, donc la trajectoire est un cercle de rayon r.

Du schéma, on a : $z^2 = l^2 - r^2 = Cte$, donc le mouvement se fait dans le plan horizontal $z = Cte$.

2. On a : $\begin{cases} z = Cte \Rightarrow \ddot{z} = 0 \\ r = Cte \Rightarrow \ddot{r} = 0 \end{cases}$

En remplaçant dans l'équation (2), on obtient : $\omega^2 z = g$ soit $z = \frac{g}{\omega^2}$

Du schéma : $\cos\alpha = \frac{z}{l} = \frac{g}{l\omega^2}$

Exercice 11

1.Lorsque le camion accélère, $O'X'Y'$ se trouve accéléré par rapport à $OXYZ$ donc Il est un repère non galiléen.

Le PDF dans $O'X'Y'$ s'écrit :$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_f} + \vec{f_c} + \vec{f_e} = m\vec{a}_r$

Avec $\vec{a}_r$ acceleration relative (l'accélération de la boite par rapport au camoin).

- $\vec{R}$ La réaction normale de la benne sur la boite.
- $\vec{P}$Le poids de la boite
- $\vec{F_f}$La force de frottement
- $\vec{f_e} = -m\vec{a}_e$la force d'inertie d'entrainement.
- $\vec{f_c} = -m\vec{a}_c$la force d'inertie de Coriolis.

Tant que la biote ne bouge pas par rapport à $O'X'Y'$. Les frottement sont statique $\vec{F_f} = \vec{F_s}$, on a aussi $\vec{a}_c = \vec{0}$ puisque $O'X'Y'$ et en translation par rapport à $OXYZ$.

L'équation de PDF devienne :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_s} + \vec{f_e} = \vec{0}$$

Sa projection sur $O'X'$ et $O'Y'$ donne $\begin{cases} OX: F_s - ma_e = 0 \\ OY: \quad R - P = 0 \end{cases}$

$a_e$accélération d'entrainement de la boite = l'accélération du camion.

$$a_e = \frac{F_s}{m} = \mu_s g = 2\ ms^{-2}$$

2.$a_e = 4\,ms^{-2} > 2\,ms^{-2}$ la boite commence à glisser vers l'arrière. Dans ce cas les frottements sont cinématique ;

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_c} = m\vec{a} \rightarrow F_c = ma \rightarrow a = \frac{F_c}{m} = \mu_c g = 2\,ms^{-1}$$

Même résultat pour $a_e = 5\,ms^{-2}$

L'accélération de la boite dans $OXYZ$ est indépendante de l'accélération du camion.

3. La boite exerce sur la benne une force de contacte $\vec{C}$ qui est égale à la force exercer par la benne sur la boite : $\vec{C} - (\vec{R} + \vec{F_f})$

- 1^er cas : $OX: C_x = -F_s = -\mu_s P = -24N$
  $OY: \quad C_Y = - \ R = -P = -120N$
- 2^er cas : $OX: C_x = -F_c = -\mu_c P = -12N$
  $OY: \quad C_Y = - \ R = -P = -120N$