Série de TD-Séries Numériques

Exercice 1
Calculer les sommes partielles des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous.

$$u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n ; \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Déduire leurs natures.

Exercice 2 (Condition nécessaire de convergence d'une série)
Étudier la nature des séries dont le terme général u_n est défini par :

$$u_n = \frac{2n^2+5n+1}{5n^2+3n+9}; \quad u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 3 (Comparaison à une série de référence)
Étudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné par les expressions suivantes :

$$u_n = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\right)^n ; \quad u_n = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Exercice 4 (Règles de Cauchy et d'Alembert)
Étudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné par les expressions suivantes :

$$u_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n ; \quad u_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice supplémentaire

I. En utilisant le critère de comparaison, étudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous.

$$u_n = \frac{1}{(5+(-1)^n)^n}; \quad u_n = \frac{2n}{n^{\frac{3}{2}} + 2n + 1}.$$

II. En utilisant les critères de Leibniz et d'Abel, étudier la nature des séries dont le terme général u_n est défini par :

$$u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n); \quad u_n = e^{-an}\cos(n), \ a > 0.$$