Chapitre IV

Séries

Suite arithmétique et suite géométrique

1) Si $\forall\, n\epsilon\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + a\ (a\ \epsilon\ \mathbb{R})$, la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** de raison a.

La somme de ses $n+1$ premiers termes est

$$S_{nA} = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_k)$$

2) Si $\forall n\epsilon\mathbb{N}$: $u_{n+1} = qu_n\ (q\ \epsilon\ \mathbb{R}^*\ )\ (u_n = q^n u_0)$, la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** de raison q. La somme de ses $n+1$ premiers termes est

$$S_{nG} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\ si\ q \neq 1 \\ (n+1)u_0 si\ q = 1 \end{cases}$$

Séries numériques

Séries à termes positifs

L'expression $u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n\geq 0} u_n$ est appelée une série numérique de terme général u_n. On note cette série par $\sum u_n$ ou $\sum_n u_n$.

La suite $(S_n)_{n\geq 0}$où $S_n = \sum_{k=}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, est appelée suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

La série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est convergente si suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge, $(\lim_{n\to+\infty} S_n = l\ (l\ finie)$ Sinon elle est divergente.

Condition nécessaire de la convergence des séries

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente.

Critères de convergence des séries à termes positifs

Critère de comparaison

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ sont deux séries numériques à termes positifs telles que $\forall n\epsilon\mathbb{N}: u_n \leq v_n$

Alors :

i) Si la série $\sum_n v_n$ converge alors $\sum_n u_n$ converge

ii) Si la série $\sum_n u_n$ diverge alors $\sum_n v_n$ diverge

Critère d'équivalence

Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries numériques à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ **pour n tend vers l'infini**, alors les deux séries sont de même nature.

Critère de d'Alembert

Si dans une série à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = l$

Alors

i) La série converge pour $l < 1$

ii) La série diverge pour $l > 1$

iii) Si $l = 1$, on peut rien conclure.

Critère de Cauchy

Si dans une série à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n} = l$

Alors

i) La série converge pour $l < 1$

ii) La série diverge pour $l > 1$

iii) Si $l = 1$, on peut rien conclure.

Série à termes de signes quelconques

Pour d'une série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ soit convergente il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit une suite de Cauchy. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, \forall p \geq 1 \left[m > N \Rightarrow \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} u_n \right| < \varepsilon \right]$$

- Une série est dite absolument convergente si la série formée des valeurs absolues de ses termes est convergente.
- Une série est dite semi-convergente si elle converge sans être absolument convergente.

Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.

Théorème d'Abel :

Supposons que $u_n = v_n w_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les conditions suivantes :

1) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

2) S_n est bornée ($S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1}$) ou bien $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ est convergente

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente.

Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

On appelle suite de fonctions sur I toute application

$$f: \mathbb{N} \to \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \text{ (} \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \text{ de toutes les fonctions définies sur } I\text{)}$$

$$n \to f(n)$$

On note la suite par $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

Convergence simple (ponctuelle) d'une suite de fonctions

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est dite simplement convergente sur I vers une fonction f si

$$\forall x \,\epsilon\, I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

f est appelée limite simple de la suite $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur I si

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\epsilon I}|f_n(x) - f(x)| \quad = 0$$

Théorème de Cauchy pour la convergence uniforme :

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall\, p,q \in \mathbb{N} : (p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left\|f_p - f_q\right\| = \sup_{x\epsilon I}\left|f_p(x) - f_q(x)\right| < \varepsilon)$$

Condition suffisante de la convergence uniforme :

Pour qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente sur I vers une fonction f, il suffit qu'il existe une suite numérique $(u_n)n$ telle que :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I \ et \ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

La convergence uniforme entraîne la convergence simple : $f_n \overset{CU}{\to} f \ sur\ I \Rightarrow f_n \overset{CS}{\to} f\ sur\ I$

La réciproqie est, en général, fausse.

Propriétés des suites de focntions uniformément convergentes

Continuité

Théorème de Seidel:

Soit $(f_n)_n$une suite de fonctions définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \,\epsilon\, I$, si

i) Pour tout entier n, la fonction f_n est continue en a,

ii) La suite de fontions $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction f,

Alors f est continue en a.

Théorème de Dini

Soit $(f_n)n$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $[a,b]\ de\ \mathbb{R}$ vers une fonction f continue sur $[a,b]$. Si $(f_n)_n$ est monotone sur $[a,b]$, alors elle converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Intégration

Théorème

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions telle que, pour tout entier n : la fonction f_n est intégrable sur $[a, b]$.

Si $(f_n)n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors la fonction f est intégrable sur $[a, b]$. De plus

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f_n(x)dx$$

Dérivation

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions telle que, pour tout entier n : la fonction f_n est continument dérivable sur I (f_n *est de classe* C^1 *sur* I) et converge simplement vers une fonction f sur I. si la suite de fonciton $(f_n')_n$ converge uniformément vers une fonction g sur I. alors, la fonction f est continument dérivable sur I et $f'(x) = g(x)\ \forall x \in I$,

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)\ \forall x \in I$$

Séries de fonctions

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions définie sur $I \subset \mathbb{R}$, alors la série $\sum f_n(x)$ est dite série de fonctions

Converge simple

La série $\sum f_n(x)$ est dite simplement convergente sur I, si la suite $(S_n)n$ $(S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x))$ converge simplement vers une foction S sur I.

Remarques

i) Etudier la convergence simple sur I, d'une série de fonctions revient à fixer $x \in I$ et étudier la série numérique $\sum f_n(x)$

ii) Si la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge simplement vers une somme S sur un domaine D alors,

   a) L'ensemble D est appelé le domaine de convegence de la série de fonction $\sum f_n(x)$

   b) La fonction limite S est appelée la somme de la série $\sum f_n(x)$

Convergence absolue

$\sum f_n(x)$ est dite absolument convergente sur I si la série de terme général $|f_n(x)|$ converge simplement sur I.

Convergence normale

$\sum f_n(x)$ est dite normalement convergente sur I, si la série numérique de terme général $\|f_n\|$ (où $\|f_n\| = \sup_{x\in I}|f_n(x)|$) est convergente.

Condition suffisante de la convegence normale

Théorème de Weierstrass

$\sum f_n(x)$ une série de fonction définie sur I. S'il existe une série numérique **convergente** $(u_n)_n$ tel que

$$|f_n(x)| \le u_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I$$

Alors la série de fonction $\sum f_n(x)$ est normalement convergence sur I.

Convergence uniforme

La série $\sum f_n(x)$ est dite uniformément convergente vers la fonction S sur I, si sa suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge uniformément vers la fonction S sur I.

i.e la suite numérique de terme général $\sup_{x\in I}|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - S(x)|$ Converge vers 0.

Remarque : une série de fonction $\sum f_n(x)$ simplement converge sur I vers une fonction S, converge uniformément sur I si et seulement si, la suite $(R_n)_n$ de reste d'ordre n ($R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$) converge uniformément vers 0.

Remarque :

Si $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur I, alors la série de fonctions $\sum f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur I.

Théorème (cristère de Cauchy) :

La série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall p, q \in \mathbb{N}: \left(p > q > N_\varepsilon, \forall x \in I \Rightarrow |S_p(x) - S_q(x)| = \left| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \right| < \varepsilon \right)$$

Cette relation est équivalente à la proposition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall p, q \in \mathbb{N}: \left(p > q > N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in I}|S_p(x) - S_q(x)| = \sup_{x\in I}\left| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \right| < \varepsilon \right)$$

Théorème d'Abel pour la convergence uniforme

Soit la série $\sum f_n(x)\, g_n(x)$ vérifiant :

i) $\exists M > 0: \forall n \in \mathbb{N}, \|f_0 + f_1 + \cdots + f_n\| \le M$ (Les sommes partielles de la série $\sum f_n(x)$ sont bornées.

ii) La série $\sum\|g_{n+1} - g_n\|$ est convergente (ou bien la suite $(g_n(x))_n$ est monotone)

iii) La suite de fonctions $(g_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I

Alors, la série $\sum f_n(x)\, g_n(x)$ est uniformément convergente sur I.

Lien entre les différents types de convergences

On a le shéma suivant

$$\begin{array}{ccc} \textit{La convergence normale} & \Rightarrow & \textit{La convergence uniforme} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \textit{La convergence absolue} & \Rightarrow & \textit{La convergence simple} \end{array}$$

Continuité des séries de fonctions

Théorème de Seidel : Soit la série $\sum f_n(x)$ uniformément convergente sur I et $\alpha \in I$

Si $\forall n \in \mathbb{N}$: la fonction f_n continue en α (resp. sur I), alors la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ de la série est continue en α (resp. sur I). i.e :

$$\lim_{x\to\alpha} S(x) = \lim_{x\to\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to\alpha} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\alpha) = S(\alpha)$$

Remarque : Si la somme S de la série $\sum f_n(x)$ est discontinue en un point x_0 de I, alors la série $\sum f_n(x)$ n'est pas uniformément convergente sur I.

Intégration :

Théorème : Soit la série $\sum f_n(x)$ uniformément convergente vers $S(x)$ sur $[a,b]$. Si pour tout entier n, la fonction f_n est intégrable sur $[a,b]$. Alors la somme S de la série est intégrable sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b S(x) = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)$$

Dérivation

Soit $\sum f_n(x)$ de somme $S(x)$ telle que pour tout entier n, la fonction f_n est continument dérivable sur $[a,b]$; Si

i) $\exists x_0 \in [a,b]\ tel\ que\ \sum f_n(x_0)$ converge

ii) $\sum f_n'(x)$ converge uniformément sur $[a,b]$

Alors la série $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur $[a,b]$. De plus la fonction S est dérivable sur $[a,b]$ et on a

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

Séries entières

On appelle série entière de variable réelle (rep. de variable complexe) toute série de fonction de la forme $\sum a_n x^n$ $(resp. \sum a_n z^n)$ où $(a_n)_n$ est une suite de nombre complexes.

La suite $(a_n)_n$ est appelée la suite des coefficients de la série entière.

Remarque : toute série entière converge pour $z = 0$

Domaine de convergence : On désigne par D l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la série $\sum a_n z^n$ est convergente, on note $f(z)$ la somme de cette série , soit :

$$\forall z \in D, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

L'ensemble D est appelé domaine de convergenc de la série $\sum a_n z^n$. D n'est pas vide car il contient toujours 0.

Convergence d'une série entière

Proposition d'Abel : S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_n$ soit bornée. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument.

Rayon de convergence d'une série entière :

Le nombre réel positif $R = sup\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$ est le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$

- S'il existe deux réels strictement positifs m et M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq |a_n| \leq M$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.
- Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R :

i) $\sum a_n x^n$ est absolument convergente pour tout x, $(|x| < R)$

ii) Si R est fini, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum |a_n x^n|$ sont divergentes pour tout x tel que $|x| > R$

- La série $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur tout intervalle $[-r, r]$ (r<R)
- Les séries entières $\sum n a_n x^{n-1}$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont le même rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Technique de calcul de rayon de convergence :

Théorème d'Hadamard : soit la série entière $\sum a_n x^n$.

Si $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ alors $R = \frac{1}{l}$

Si $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ alors $R = \frac{1}{l}$

Remarque :

i) Dans le cas où les deux limites $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ et $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ n'existent pas, le rayon de convergence est alors donné par :

$$R=\frac{1}{l} \text{ où } l=\overline{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \text{ si } l\neq 0$$

Et $si\ l=0, on\ a\ R=+\infty\ et\ si\ l=+\infty\ on\ a\ R=0$

ii) soit la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R. alors son domaine de convergence est l'un des quatre intervalles : $]-R,+R[, [-R,+R[,]-R,+R], [-R,+R]$

Opérations sur les séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'.

i) Si $R\neq R'$, le rayon de convergence R'' de la série $\sum(a_n+b_n)x^n$ est $R''=min\{R,R'\}$

ii) Si $R=R'$, le rayon de convergence R'' de la série $\sum(a_n+b_n)x^n$ est $R''\geq R$

Continuité des séries entiètes

La fonction somme S d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul est continue sur $]-R,+R[$

Continuité d'Abel: Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors la série entière $\sum a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[0,R]$ et sa somme est continue sur ce segment. En particulier $\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$

Intégration

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière dont la somme est S et le rayon de convergence est R. Alors pour tout intervalle $[a,b]$ inclus dans $]-R,+R[$ on a

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\int_a^b x^n\,dx$$

De plus fonction S est continue sur $]-R,+R[$ et ses primitives sont de la forme :

$$t\to k+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}t^{n+1} \text{ où } k\in\mathbb{R}$$

Dérivation :

La fonction S est de classe C^1 sur $]-R,+R[$. De plus, on a :

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$

La somme $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est indéfiniment dérivable ($f\in C^\infty(]-R,+R[)$) :

$$\forall x \in]-R,+R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Série de Taylor :

Soit f une fonction réelle à variable réelle. S'il existe une suite réelle $(a_n)_n$ telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n, \forall x \in]-r,+r[, r > 0$$

Alors on peut développer f en série entiète au voisinage de 0.

Cette situation peut être généralisée pour une fonction définie au voisinage d'un point x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, (x-x_0)^n, \forall x \in]x_0-r, x_0+r[, r > 0$$

Pour qu'une fonction f soit développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, il est nécessaire qu'elle soit de classe C^∞ dans un voisinage $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ de x_0. Dans ce cas on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Soit $f:]-r,+r[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ dans une voisinage de 0. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-r,+r[, \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n$ est simplement convergente sur $]-r,+r[$ et one a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n, \forall x \in]-r,+r[$$

Séries de Fourier :

Définitions et généralités

On dit que f est périodique de période p si elle vérifie

$$\forall x \in D(\text{domaine de défintion de } f), x+p \in D: f(x+p) = f(x)$$

On appelle série trigonométrique une série de fonctions $\sum f_n(x)$ dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et ce $\forall n \in \mathbb{N}, a_n$ et b_n sont des complexes

Si les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convegentes alors la série trigonométrique $\sum(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$

Remarque : toute série trigonométrique $\sum(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ peut se réécrire sous la forme complexe :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \ \ avec\ c_0 = a_0\ et\ \forall n \in \mathbb{N}^*: c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\ et\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Evaluation des coefficients d'une série trigonométrique

Soit $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ une série trigonométrique unifoemément convergente sur $]-\pi, +\pi[$. Notons

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)), \forall x \in \mathbb{R}$$

Alors $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S(x)dx$ et

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S(x)\cos(nx)dx\ \ et\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S(x)\sin(nx)dx\ , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ une série trigonométrique écrite sous forme complexe qui converge uniformément sur $]-\pi, +\pi[$. Notons pour tout x réel

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{inx}}\,dx$$

Définition de la série de Fourier : soit f une fonction 2π-périodique. Sa série de Fourier notée par $F(x)$ est la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ où

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx\,, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos(nx)dx\ \ et\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)dx\ , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Si ces intégrales sont définies, les coefficients a_n et b_n sont dits les coefficients de Fourier de f.

Remarques :

i) Puisque f est 2π-périodique, on peut changer l'intervalle en $[\alpha, \alpha + 2\pi], \alpha \in \mathbb{R}$

ii) Si f est paire, $b_n = 0$

iii) Si f est impaire $a_n = 0$

Définition : soit f une fonction réelle à valeurs réelles, continue par morceau et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

On appelle régularisée de f la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

En tout points de continuité x_0, la fonction $\tilde{f}$ coincide avec la fonction f $(\tilde{f}(x_0) = f(x_0))$

Théorème de Lejeune-Dirichlet:

Soitf une fonction réelle à valeurs réelles et de classe C^1 par morceau, 2π-périodique. Alors la sérier de Fourier de f converge simplement sur sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée $\tilde{f}$ de f. i.e :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \tilde{f}(x)$$

Ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \tilde{f}(x)$$

En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de sa série de Fourier est $f(x)$

Soit l'ensemble $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ 2\pi - \text{périodique et dont le carré est intégrable sur } [-\pi, +\pi]\}$

On définie sur $\mathcal{F}$ le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Où $\overline{g(x)}$ désigne le nombre complexe conjugué de $g(x)$.

On note par $\|f\|$ (norme de f) , le nombre réel positif tel que $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

Proposition : l'ensemble (infini) des fonctions $\{x \to e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée (infines) de $\mathcal{F}$ muni du produit scalaire.

Interprération géométrique des séries de Fourier

Soit $f \in \mathcal{F}$. Alors la série de Fourier n'est rien d'autre que sa décomposition suivant la base orthoormée $\{x \to e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$. Cette interprétation permet de retienir l'expression des coefficients de Fourier de f.

Projection orthogonale :

Soit $f \in \mathcal{F}$. Pour tout nombre complexe n, ses coefficients de Fourier c_n de la projection orthogonale de f sur e^{inx}, i.e :

$$c_n(f) = \langle f, e^{inx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{-inx}\, dx$$

Inégalité de Bessel

Théorème : soit la fonction $f \in D$ ((l'ensemble des fonctions continues par morceaux et 2π-périodique). Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

Egalité de Parseval

Théorème : pour toute fonction $f \in D$, on

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Si f est valeurs réelles, on a

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+2\pi} |f(x)|^2 dx = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$