

Cours de la Série de TD
sur les séries Numériques

Ex 1.

* / $U_n = (3/5)^n$; calculer sa somme partielle

$$\sum_{k=0}^n U_k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{5}{2} \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$$

(Série géométrique de raison $3/5$).

on a $2 = 3/5 < 1 \Rightarrow$ Convergence et sa valeur vaut $5/2$.

* / $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geq 1$.

sa somme partielle:

$$\sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

$$= \left[1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] \quad (\text{Série télescopique}).$$

Elle converge car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et sa

valeur vaut

$$1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

Ex 2 * / $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 5n + 1}{5n^2 + 3n + 9} = \frac{2}{5} \neq 0$

$\Rightarrow$ diverge

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$
diverge.

$$U_n = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \right)^n$$

on a

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \quad \text{pour } n \geq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \right)^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

or

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ est convergente (série géométrique de raison } r = \frac{1}{2} \text{)}$$

on déduit alors que $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \right)^n$ converge.

X/

on a

$$\frac{1}{n(n+1)} \ll \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge (série de Riemann avec } \alpha = 2 > 1 \text{)}$$

Donc ~~$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$~~ $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2(n)(n+1)}$ converge.

Ex 4

X/ Règle de Cauchy

$$U_n = \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{Converge.}$$

o/ Rayle d'Alambert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n!)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n! \times (n+1)}{(n+1)^n \times (n+1)}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

~~$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$~~

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ Convergence.