Université de Bejaia **14.01.2024**
Département GE

Interrogation
UEF 2312

Exercice 1 (15pts) : O*n souhaite appliquer une commande prédictive généralisée (GPC) à un MCC dont le modèle d'état est comme suit :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad avec \quad A = \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec : $x_1 = i : le\ courant\ d'induit$

$x_2 = \Omega : lavitesse\ de\ rotation$

1) *Déterminer le degré relatif de la sortie y(t):*
2) *Calculer les prédictions de y et sa référence à partir de l'expansion en série de Taylor, qui est exprimée par les dérivées de Lie.*
3) *Calculer la commande optimale qui optimise la fonction de coût suivante*

$$\Im = \frac{1}{2}\int_0^T [y_{ref}(t+\tau) - y(t+\tau)]^T\,[y_{ref}(t+\tau) - y(t+\tau)]d\tau$$

T : le temps de prédiction

Bon courage
O.K

Solution (15 pts)

1) **Le degré relatif de la sortie y(t)(4pts)**

$$y(t) = h(x) = x_2 \qquad\qquad x = (x_1 x_2)^T$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x}(t) = \frac{\partial h}{\partial x}[A\,x(t) + Bu(t)] = \frac{\partial h}{\partial x}A\,x(t) + \frac{\partial h}{\partial x}B.u$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial x_2}\end{pmatrix} = (0 \quad 1\,)$$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}Ax = (0 \quad 1\,)\begin{pmatrix}-10 & -1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = (0 \quad 1\,)\begin{pmatrix}-10x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2\end{pmatrix} = x_1 - x_2$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial h}{\partial x}A\,x(t) + \frac{\partial h}{\partial x}B.u = (0 \quad 1\,)\begin{pmatrix}-10 & -1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + (\mathbf{0} \quad \mathbf{1}\,)\begin{bmatrix}\mathbf{10} \\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$= (0 \quad 1\,)\begin{pmatrix}-10x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2\end{pmatrix} + \mathbf{0}.\boldsymbol{u} = x_1 - x_2$$

$\boldsymbol{\dot{y}(t) = L_f h(x) = x_1 - x_2}$**-------------------------(1pts)**

Le degré relatif de la sortie $\boldsymbol{\rho} > 1$**(1pts)**

On calcule la deuxième dérivée :

$$\ddot{y}(t) = \frac{d\dot{y}(t)}{dt} = \frac{dL_f h(x)}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}L_f h(x)\frac{\partial x}{\partial t} = \quad \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}\dot{x}(t) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}[Ax + Bu]$$

$$= \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}Ax + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}Bu$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial(L_f h)}}{\boldsymbol{\partial x}} = \begin{pmatrix}\frac{\partial(L_f h)}{\partial x_1} & \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial(x_1 - x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1 - x_2)}{\partial x_2}\end{pmatrix} = (\mathbf{1} \quad -\mathbf{1})$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial(L_f h)}}{\boldsymbol{\partial x}}\boldsymbol{Ax} = (1 \quad -1)\begin{pmatrix}-10 & -1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = (1 \quad -1)\begin{pmatrix}-10x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2\end{pmatrix} = -11x_1$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial(L_f h)}}{\boldsymbol{\partial x}}\boldsymbol{B} = (1 \quad -1)\begin{bmatrix}10 \\ 0\end{bmatrix} = 10.$$

$\boldsymbol{\ddot{y}(t) = \ -11x_1 + 10u}$ **---------------------------(1pts)**

Le degré relatif de la sortie y= Ω est$\boldsymbol{\rho = 2}$ **:--------------------------(1pts)**

2) **Calculer la prédiction de y et sa référence à partir de l'expansion en série de Taylor, qui est exprimée par les dérivées de Lie. (2pts)**

Le degré relatif de la sortie y= Ω est$\rho = 2$:

$$y(t+\tau) = y(t) + \tau\dot{y}(t) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{y}(t) = h(x) + \tau L_f h(x) + \frac{\tau^2}{2}(L^2{}_f h(x) + Gu(t)\,)$$

$\boldsymbol{y(t+\tau) = y(t) + \tau\dot{y}(t) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{y}(t) = \begin{bmatrix}1 & \tau & \frac{\tau^2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t)\end{bmatrix}}$**:---------------------------(1 pt)**

La sortie au futur $y(t+\tau)$est exprimée par :

$$y(t+\tau) = T(\tau)Y(t) \qquad\qquad Y(t) = \begin{bmatrix}y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t)\end{bmatrix} \qquad\qquad T(\tau) = \begin{bmatrix}1 & \tau & \frac{\tau^2}{2}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{y_{ref}(t+\tau) = T(\tau)Y_{ref}(t)} ------------$**(1 pt)**

Avec :$Y_{ref}(t) = \begin{bmatrix} y_{ref}(t) \\ \dot{y}_{ref}(t) \\ \ddot{y}_{ref}(t) \end{bmatrix} T(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix}$

3) Calculer la commande optimale qui optimise la fonction de coût: (9pts)

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\int_0^{T_p} [y_{ref}(t+\tau) - y(t+\tau)]^T\, [y_{ref}(t+\tau) - y(t+\tau)]d\tau$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{J} = \frac{1}{2}[Y_{ref}(t) - Y(t)]^T \int_0^{T_p} T(\tau)^T T(\tau) d\tau \,[Y_{ref}(t) - Y(t)]} --------------- (\mathbf{2pts})$$

On calcule :

$$Y_{ref}(t) - Y(t) = \begin{bmatrix} y_{ref}(t) \\ \dot{y}_{ref}(t) \\ \ddot{y}_{ref}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{ref}(t) \\ \dot{y}_{ref}(t) \\ \ddot{y}_{ref}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \\ -11x_1 + 10u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 + Gu \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{avec :} \begin{cases} \boldsymbol{M_0 = y_{ref} - x_1} \\ \boldsymbol{M_1 = \dot{y}_{ref} - (x_1 - x_2)} \\ \boldsymbol{M_2 = \ddot{y}_{ref} + 11x_1} \\ \boldsymbol{G = 10} \end{cases}$$ **--------------------------(1pts)**

$$\boldsymbol{\int_0^{T_p} \begin{bmatrix} 1 \\ \tau \\ \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix} d\tau = \int_0^{T_p} \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \\ \tau & \tau^2 & \frac{\tau^3}{2} \\ \frac{\tau^2}{2} & \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^4}{4} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T_p & \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{6} \\ \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{3} & \frac{T_p^4}{8} \\ \frac{T_p^3}{6} & \frac{T_p^4}{8} & \frac{T_p^5}{20} \end{bmatrix}} ------------- (\mathbf{2pts})$$

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 + Gu \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_p & \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{6} \\ \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{3} & \frac{T_p^4}{8} \\ \frac{T_p^3}{6} & \frac{T_p^4}{8} & \frac{T_p^5}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 + Gu \end{bmatrix}$$

La condition nécessaire à satisfaire pour trouver la commande optimale est la suivante :

$$\boldsymbol{\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u} = 0} \qquad ------------ (\mathbf{1pts})$$

$$\boldsymbol{u = -1/G\left(\frac{10}{3T_p^2}M_0 + \frac{5}{2T_p}M_1 + M_2\right)} ----------------------(\mathbf{3pts})$$