# Série de TD 04

**Exercice :**

Soit les programme linéaires suivants :

$$(P1)\begin{cases} Min\ Z = \ 2x_1 + \ 4x_2 + \ 5x_3 \\ -3x_1 - x_2 + \ x_3 \ \geq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + \ x_3 \ \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \ \geq 0 \end{cases}$$

On peut facilement déduire sont duale, on obtient :

$$\begin{cases} Max\ Z = \ y_1 + \ 2y_2 \\ -3y_1 + \ 2y_2 \ \leq 2 \\ -y_1 + \ 2y_2 \ \leq 4 \\ y_1 + \ y_2 \ \leq 5 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si on a notre duale, il suffit juste de résoudre ce dernier est déduire la solution du problème primale à partir de la solution du problème duale.

Après résolution du problème duale on a trouvé que :

La solution optimale est : $y_1 = 2$ ; $y_2 = 3$

- **Pour déduire la solution du problème primale il faut appliquées ces deux règles :**

1. Si la $j^{ième}$ Contrainte duale n'est pas satisfaite alors la $j^{ième}$ variable primale est nulle.
2. Si la $i^{ième}$ variable duale est strictement positive alors la $i^{ième}$ contrainte primale est satisfaite.

Appliquons ces deux règles à notre problème :

**1$^{ère}$ Règle :**

- La première contrainte : $-3y_1 + \ 2y_2 = 0$ (donc notre contrainte n'est pas satisfaite) ce qui implique $x_1 = 0$.
- La deuxième contrainte : $-y_1 + \ 2y_2 = 4$ (donc notre contrainte est satisfaite)
- La troisième contrainte : $y_1 + \ y_2 = 5$ (donc notre contrainte est satisfaite)

**2$^{ième}$ Règle :**

- On a $y_1 = 2 > 0$ donc la première contrainte primale est satisfaite $-3x_1 - x_2 + \ x_3 = 1$
- On a $y_2 = 3 > 0$ donc la deuxième contrainte primale est satisfaite $2x_1 + 2x_2 + \ x_3 \ = 2$

Après application des deux règles on obtient vers la fin un système d'équations qui va nous permettre de déduire la solution du primale

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + \ x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + \ x_3 \ = 2 \end{cases}$$

Sachant que d'après la première règle $x_1 = 0$, donc le système sera :

$$\begin{cases} \ -x_2 + \ x_3 = 1 \\ 2x_2 + + x_3 \ = 2 \end{cases}$$

Il suffit donc de résoudre ce système d'équations pour obtenir la solution finale :

Après résolution on obtient :

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{4}{3}$$

$$Avec\ Z = 2x_1 + \ 4x_2 + \ 5x_3 = 8$$