

Exercice 1 :

4 étudiants de M1 ont obtenu les notes de 8, 3, 11, et 4 dans le module de techniques de sondage. Deux étudiants ont été sélectionnés simultanément en utilisant le sondage aléatoire simple. Soit Y_i est la variable d'intérêt pour chaque unité de la population, il vous est demandé de :

1. Calculer la moyenne \bar{Y} et la variance modifiée (corrigée) S_Y^2 de la variable d'intérêt ?
2. Déterminer la liste de tous les échantillons possibles de taille $n=2$ (les 2 étudiants sont sélectionnés simultanément) ? (réponse justifiée).
3. Quel est le taux de sondage ?
4. Pour chacun de ces échantillons, calculer la moyenne de l'échantillon et l'écart type corrigé-échantillon ?
5. Soit \bar{y}_W la variable égale à la moyenne-échantillon, déterminer sa loi de probabilité, et calculer son espérance.
6. Vérifier que \bar{y}_W est un estimateur sans biais de la vraie moyenne.
7. Soit S_W^2 la variance corrigée-échantillon. Vérifier que celle-ci estime sans biais la vraie valeur de la variance (S_Y^2) ?

Exercice 2 :

On s'intéresse à l'estimation de la proportion (P) d'individus atteints par une maladie professionnelle dans une entreprise de 1500 salariés. On sait par ailleurs que trois personnes sur dix sont ordinairement touchées par cette maladie dans des entreprises du même type. On se propose de sélectionner un échantillon au moyen d'un sondage aléatoire simple. Quelle taille d'échantillon faut-il sélectionner pour que la longueur totale d'un intervalle de Confiance avec un niveau de confiance 0,95 soit inférieure à 0,01 pour un plan de sondage aléatoire simple : a) avec remise ? b) sans remise ?

Exercice 3 :

On dispose d'une population de 100 entreprises, et on s'intéresse au nombre moyen d'employés par entreprise. Pour ce faire, un échantillon de 7 entreprises a été sélectionné en utilisant un plan de sondage aléatoire simple sans remise, les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous:

N° Entp.	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'employés	10	5	15	20	12	8	10

1. Calculer le taux de sondage.
2. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne des employés de 100 entreprises
3. Donner une estimation ponctuelle de l'écart-type corrigé de l'estimateur de la moyenne des employés de 100 entreprises
4. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de 95% pour la moyenne de la population
5. Déterminer la taille d'échantillon à choisir pour avoir une incertitude absolue de la moyenne population inférieure ou égale à 1 au niveau 95%.

NB. $Z_{0,975} = 1,96$

Exercice 4 :

On souhaite estimer μ la distance moyenne (exprimée en kilomètres) parcourue en vélo par les habitants d'une ville de $N = 50\ 000$ habitants en mai 2017. On sélectionne par un plan de sondage aléatoire simple (sans remise) un échantillon de taille $n = 250$. On note x_i la distance (exprimée en kilomètres) parcourue en mai 2005 par le $i^{\text{ème}}$ individu de l'échantillon. Les résultats sont :

$$\sum_{i=1}^{250} x_i = 15150 \quad \sum_{i=1}^{250} x_i^2 = 1155400$$

1. Que signifie-elle la quantité $\sum_{i=1}^{250} x_i = 15150$?
2. Calculer la variance corrigée S^2
3. On souhaite donner un intervalle de confiance de niveau 90%, puis 95% pour μ .
 - a. Avant d'effectuer les calculs, pouvez-vous dire, en justifiant votre réponse, quel sera l'intervalle le plus large ?
 - b. Donner ces intervalles de confiance
4. Estimer la distance totale parcourue en vélo par les habitants de la ville en question
NB : $Z_{0,95} = 1,62$

Exercice 5

Une entreprise possède cinq succursales. Un inspecteur ne peut en examiner que deux par tournées. Dans chaque succursale, nous mesurons une variable d'intérêt Y (Nombre de nouveaux clients dans l'année). La situation réelle des cinq succursales est la suivante :

$$Y_1 = 100; Y_2 = 80; Y_3 = 100; Y_4 = 120; Y_5 = 90.$$

1. Calculer la moyenne \bar{Y}
2. Enumérer tous les échantillons possibles (e_i) correspondant à une tournée et pour chaque échantillon calculer \bar{y}_{e_i}
3. Calculer l'estimateur de la moyenne \hat{Y} ,
4. Vérifier que \hat{Y} est un estimateur sans biais de la vraie moyenne de la variable d'intérêt.
3. Calculer la variance de l'estimateur de la moyenne \hat{Y} (i.e. $V(\hat{Y})$)
4. Pour chaque échantillon possible, calculer sa variance corrigée $s_{e_i,c}^2$
5. Soit s_c^2 la variance corrigée-échantillon, Vérifier que celle-ci estime sans biais la vraie valeur de la variance corrigée de la population

Exercice 6 :

Afin de contrôler la conformité de la production d'une pièce détachée à une norme établie, on décide de faire un sondage aléatoire systématique. On tire un échantillon au taux de sondage de 1/50 dans un lot de 500 pièces.

- Quelle est la taille de l'échantillon ?
- Quelle est la raison (le pas)
- Quels sont les numéros des pièces constituant l'échantillon ?
- Dans l'échantillon, on constate qu'une pièce ne répond à la norme. Estimer ponctuellement et par intervalle de confiance la proportion des pièces défectueuses dans le lot (on admet un risque d'erreur de 10%)