



**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTE DES SCIENCES DE LA NATURE
ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DU TRONC COMMUN TCSN**

COURS DE BIOPHYSIQUE

**Mme Nacera BENGHANEM épouse BECHEUR
Enseignante chercheur
Université de Bejaia**

Préambule

Cet ouvrage est le fruit d'efforts pédagogiques accomplis à l'issue de nombreuses années enseignées dans cette spécialité. Son objectif est de faire partager un certain nombre de connaissances jugées essentielles. Son ambition est de faire aimer aux étudiants un domaine aussi porteur que celui de la biophysique.

Par ailleurs, la biophysique a toujours été une spécialité commune aussi bien au domaine de la biologie qu'au domaine de la famille des sciences médicales. En effet, l'étude des phénomènes naturels (tels que, etc...), ne peuvent être effectués sans avoir recours aux lois physiques et mécaniques énoncées régissant la biophysique. Cela étant dit, en traitant les notions de base, cet ouvrage s'adresse aussi aux étudiants de première année, car l'étudiant doit au préalable avoir pris connaissance de certaines notions de base, à travers des rappels et des explications de certains phénomènes physiques ainsi que de brefs rappels de certaines notions importantes, cet ouvrage se fixe pour objectif de servir comme outil de travail pouvant aider aussi bien dans l'acquisition des connaissances, la préparation des examens ainsi que dans la réalisation de projets de fin d'études.

Constituant une première ébauche, de nombreuses améliorations et enrichissements seront effectués à l'avenir. Pour cela, toutes remarques et suggestions seront les bienvenues.

L'auteur

Mme Nacera BENGHANEM
épouse BECHEUR

Sommaire

Chapitre 01: Les phénomènes de surface

1	Introduction.....	5
2	Définition de la tension de surface	5
3	Etude de l'interface : liquide – gaz.....	6
3.1	Aspect microscopique	6
3.2	Aspect macroscopique.....	6
4	Expression de la tension superficielle :	8
4.1-	Première Formule de la tension de surface σ : La tension superficielle (σ) est définie comme étant la force par unité de longueur. En effet, comme :	8
4.2-	Deuxième Formule de la tension superficielle :	9
5	Conséquences de l'existence de la tension superficielle	11
5.1	Formation des bulles (Interface sphérique liquide – gaz) : Equation de YOUNG-LAPLACE.....	11
5.2	Loi générale de LAPLACE	15
5.3	Déséquilibre du système des deux bulles (Expérience de LAPLACE)	15
5.4	Phénomène de Coalescence.....	19
6	Interface liquide A – liquide B	20
6.1	Energie de cohésion :	20
6.2	Energie d'adhésion:.....	21
6.3	Étalement d'un liquide A sur un autre liquide B.....	21
7	Interface Solide – liquide.....	22
7.1	Condition d'étalement.....	22
7.2	Nombre de bond (B_0).....	23
7.3	L'invariant de Young	24
7.4	Formule de Dupré.....	24
7.5	Intérêt pratique de la mesure de l'angle (θ):	25
8	Techniques de mesure de la tension superficielle	27
8.1	Capillarité - Loi de Jurin-	27

8.2	Méthode d'arrachement - - Principe de Wilhelmy	33
8.3	Méthode stalagmométrie	35
1	Introduction :	40

Chapitre02 : L'hémodynamique

2	Écoulement Bernoulli	40
2.1	Cas des liquides Parfaits	40
2.2	Cas des liquides réels.....	42
3	Débit et équation de continuité à travers un tube cylindrique	44
4	Notion sur la viscosité	45
4.1	Coefficient de la viscosité dynamique η	45
4.2	Coefficient de la viscosité cinématique ν	46
5	Différents régimes d'écoulement	48
6	Prévoir le type d'écoulement.....	49
7	Écoulement Poiseuille ou laminaire- Loi de Poiseuille	51
7.1	Loi de Poiseuille.....	51
8	Analogie entre la conduction du courant dans un circuit électrique et l'écoulement sanguin (vasculaire).....	56
8.1	Loi d'Ohm :.....	56
8.2	Loi de Poiseuille :.....	56
9	Techniques de mesure de la viscosité dynamique :	60
9.1	Viscosimètre d'Ostwald -méthode est Basée sur la loi de Poiseuille-.....	61
9.2	Viscosimètre de Hoppler (à chute de bille) – sédimentation (Loi de Stokes).....	64
9.3	Viscosimètre rotatif ou viscosimètre de Couette.....	69
10	Ultracentrifugation.....	70
	Références bibliographiques.....	74

Chapitre 01 : Les phénomènes de surfaces



1 Introduction

La surface représente une mince couche atomique qui sépare deux phases adjacentes, qu'elles soient liquide/gaz, solide/liquide, solide/gaz ou liquide/liquide. Le phénomène de surface se manifeste à l'interface, la zone de séparation entre ces phases. Il permet d'expliquer certains phénomènes naturels qui remettent en question la statique des fluides, tels que la formation d'une goutte d'eau en une sphère lorsqu'elle repose sur une tige ou une feuille de plante, ainsi que l'ascension des liquides dans les capillaires végétaux, comme le phénomène de montée de la sève, etc...

Son importance est considérable, et son intérêt pratique se rencontre dans plusieurs domaines tels que :

- ✓ L'industrie de peinture ;
- ✓ Produits tensions –actifs (Ex : détergeant) ;
- ✓ Produits cosmétique ;
- ✓ L'industrie Agro-alimentaire (fromage, yaourt...)
- ✓ L'industrie pharmaceutique (Sirop Pommade, dentifrice...)

2 Définition de la tension de surface

Pour expliquer le concept de tension de surface, prenons l'exemple suivant. Lorsque nous versons un liquide dans un capillaire et qu'il se stabilise, l'interface entre le liquide et le gaz semble initialement plane et horizontale. Cependant, une observation plus minutieuse révèle une courbure près de la paroi, qui peut être concave ou convexe. Cette courbure est le résultat d'une tension présente à l'interface, connue sous le nom de tension superficielle ou tension de surface, symbolisée par F_{Ts} . Les forces responsables de ce phénomène sont appelées forces de tension superficielle

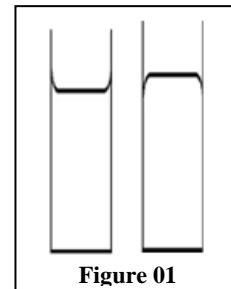


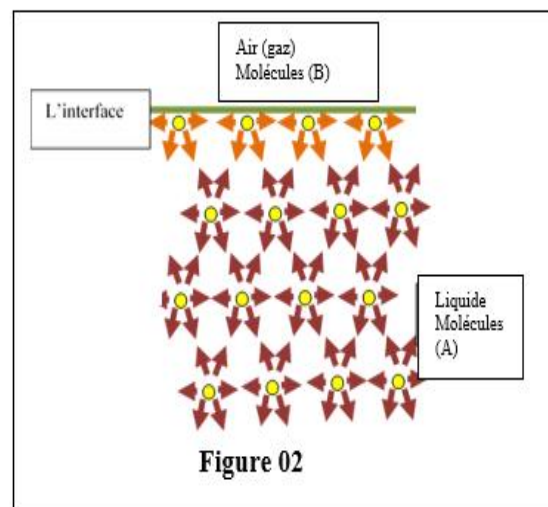
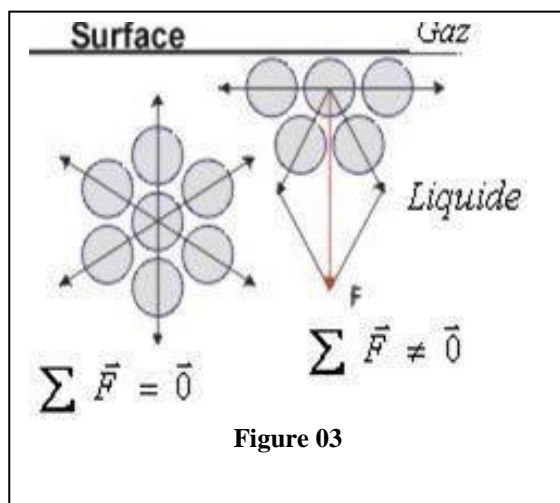
Figure 01

3 Etude de l'interface : liquide – gaz

3.1 Aspect microscopique

Au sein d'un liquide pur, chaque molécule est soumise à des forces d'attraction de type "Van der Waals" de la part de ses molécules voisines. Ces forces d'attraction se compensent mutuellement, ce qui permet au système d'atteindre un état énergétique minimal. En moyenne, la somme de ces forces est nulle ($\sum \vec{F} = \vec{0}$).

Cependant, à la surface du liquide, la situation diffère et une tension de surface est créée. L'environnement est asymétrique, car les forces attractives exercées par les molécules du liquide (A) sont plus intenses que celles des molécules de gaz (B), qui sont à la fois moins nombreuses et plus éloignées. Cette différence de forces attractives crée une tendance pour les molécules de surface à être attirées vers l'intérieur du liquide, dans le but de minimiser la surface de séparation et donc de réduire l'interface entre le liquide et l'air. Ainsi, la somme des forces n'est pas nulle ($\sum \vec{F} \neq \vec{0}$) à la surface du liquide et elle est dirigée vers l'intérieur du liquide, comme illustré dans la figure 03.



3.2 Aspect macroscopique

Dans le paragraphe précédent (fig.03), nous avons montré que les molécules A sont en équilibre ($\sum \vec{F} = 0$) et ne possèdent pas d'énergie, ce qui signifie que leur déplacement ne nécessite aucun travail. En revanche, les molécules B situées à l'interface ne sont pas en équilibre ($\sum \vec{F} \neq 0$) elles sont soumises à des forces de tension superficielle.

Afin de mettre en évidence ces forces de tension superficielle, nous avons réalisé l'expérience suivante :

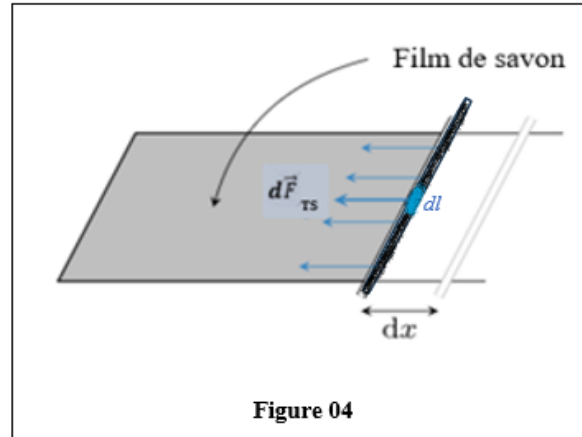
Expérience :

Plongez soigneusement le cadre en fil de fer dans le récipient d'eau savonneuse, en veillant à ce qu'il soit entièrement recouvert de film fin de savon, puis placez délicatement le petit barreau cylindrique sur le cadre immergé, en le posant doucement sur la surface du film de savon. Avec précaution, percez l'une des surfaces du film de savon à l'aide d'une aiguille fine.

Observation :

La Figure 04 présente les observations suivantes : :

- 1- Tant que le film de savon est de chaque côté du barreau, celui-ci maintient un équilibre stable et demeure immobile, celui-ci (barreau) maintient un équilibre stable et demeure immobile.
- 2- Dès qu'une des surfaces du film est perforée à l'aide d'une aiguille, l'équilibre est perturbé, libérant le barreau qui roule librement vers le côté opposé.
- 3- Le film attire le barreau avec une force attractives infinitésimale dF_{TS} . Cette force attractive agit sur un élément infinitésimal de longueur (dl) du barreau.

**Explication :**

Le déplacement du barreau est dû à la tension superficielle du film de savon, celle-ci cherchant à minimiser sa surface.

4 Expression de la tension superficielle :

4.1- Première Formule de la tension de surface σ : La tension superficielle (σ) est définie comme étant la force par unité de longueur. En effet, comme :

$dF \propto dl$ (dF proportionnelle à dl).

$$dF_{TS} = \sigma \cdot dl \quad (*)$$

σ : est la constante de proportionnalité, est appelée « constante de tension superficielle », « coefficient de tension superficielle », ou encore, tension de surface (TS) tout court »

Par intégration de l'équation (*) sur toute la longueur totale (L) du fil, σ est la tension superficielle. On définit la première définition de la tension superficielle (σ), par :

$$\sigma = \frac{F_{TS}}{L} \quad (1^{\text{ème}} \text{ Formule de la tension de surface } \sigma)$$

Elle se manifeste par une réduction de l'aire du film de savon à la surface, ce qui permet au système d'atteindre un état d'équilibre où l'énergie est minimale. En d'autres termes, la tension superficielle est responsable de l'effet de "resserrement" de la surface du liquide. C'est une force qui contribue à maintenir l'équilibre en réduisant l'aire et en minimisant l'état énergétique du système.

Unité de mesure de σ dans MKSA est : **N/m** (Newton par mètre)

Unité de mesure de σ dans le système CGS est : **dynes/cm**

Avec, 1 dyne = 10^{-5} N

1 dyne/cm = 10^{-3} N/m.

4.2- Deuxième Formule de la tension superficielle :

La tension superficielle (σ) est définie comme étant l'énergie qu'il faut apporter pour créer une surface d'un mètre carré

La figure ci-dessous montre le déplacement (dx) d'un élément infinitésimal (dl) du fil.

- ✓ Le travail nécessaire pour un tel déplacement (dx) est noté par dW :

Sachant que,

$$dW = F dx$$

$$dW = \sigma dl \cdot dx = \sigma dS$$

Avec,

$$dl \cdot dx = dS$$

d'où la formule:

$$dW = \sigma dS$$

$$dW = \sigma dS \Rightarrow \sigma = \frac{dW}{dS} \quad (2^{\text{ème}} \text{ Formule de la tension de surface } \sigma)$$

dS : la variation de la surface, avec, $dS = S_f - S_i$

$$\sigma = \frac{dW}{dS}$$

Cependant, la création d'une surface est accompagnée d'une consommation d'énergie dE . C'est l'énergie qu'il faut apporter pour créer une surface d'un mètre carré. Elle est recueillie sous forme de travail. D'où l'expression suivante :

$$dW = dE$$

Ainsi,

$$\sigma = \frac{dW}{dS} = \frac{dE}{dS}$$

σ : Étant le rapport entre la cause et l'effet produit.

✓ **Unité :**

L'unité de dS (différentiel de surface) est le mètre carré (m^2), qui mesure l'aire. Quant à dW (différentiel de travail), son unité est le joule (J).

✓ **Dimension :**

$$[dS] = L^2$$

$$[dW] = ML^2T^{-2}$$

σ : la tension superficielle ($[\sigma] = \frac{\text{joules}}{m^2}$)

dE : la variation de l'énergie en **joules**

• **Ordres de grandeurs de la tension superficielle**

Dans le tableau ci-dessous, on présente la valeur de la tension superficielle σ de quelques interfaces liquide/air.

Liquide	σ (N/m) à 20 °C
Eau (à 20 °C)	$73 \cdot 10^{-3}$
Eau (à 0°C)	$75.6 \cdot 10^{-3}$
Mercure (à 20 °C)	$480 \cdot 10^{-3}$
Huile végétale (à 20 °C)	$32 \cdot 10^{-3}$
Ethanol (à 20 °C)	$22 \cdot 10^{-3}$

On remarque que l'élévation de la température a pour effet de diminuer la tension superficielle (σ) d'un liquide.

Un autre élément susceptible d'influencer la tension superficielle est connu sous le nom de « surfactant ». Les surfactants sont des agents tensioactifs qui interagissent au niveau des liaisons moléculaires du liquide. Les détergents, par exemple, sont des surfactants qui possèdent la capacité de diminuer la tension superficielle σ .

5 Conséquences de l'existence de la tension superficielle

5.1 Formation des bulles (Interface sphérique liquide – gaz) : Equation de YOUNG-LAPLACE

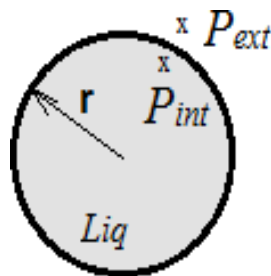
La formation de bulles requiert une pression interne supérieure à la pression externe. Cette variation de pression est définie par l'Équation de Young-Laplace. Nous allons détailler cette équation dans deux situations distinctes :

Cas 1 : bulle avec une seule interface (goutte d'eau)

Cas 2 : bulle avec deux interfaces (bulle de savon).

❖ Cas 1 : bulle à une seule interface : (goutte d'eau de forme sphérique)

Considérons une goutte de liquide de rayon r et de volume V . Supposons maintenant que le volume de la goutte soit augmenté d'une quantité dV . Le travail résultant de la différence de pression de part et d'autre de la bulle, c'est-à-dire le travail de dilatation de la goutte, est noté par dW .



et, $dW = \Delta P * dV$, où ΔP représente la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la goutte, et dV est la variation de volume de la goutte.

Il est à noter que ce travail de dilatation dW est considéré comme une mesure de l'énergie nécessaire dE pour augmenter le volume de la goutte.

$dW = \Delta P . dV$

$\Delta P = (P_{int} - P_{ext})$ (Surpression à l'intérieur de la bulle)

$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$ (augmentation du volume de la goutte)

Donc, le travail de dilatation est donné par :

$dW = \Delta P . dV = \Delta P . (4\pi r^2 dr)$(1)

Et puisque,

$dE = \sigma . dS$ (l'énergie dE nécessaire pour augmenter le volume de la goutte)

$S = 4\pi r^2 \Rightarrow dS = 8\pi r . dr$ (augmentation de surface de la goutte)

Donc,

$dE = \sigma . dS = \sigma . (8\pi r dr)$(2)

Et comme, le travail de dilatation dW est considéré comme une mesure de l'énergie dE nécessaire pour augmenter le volume de la goutte.

$dW = dE$(3)

Ainsi :

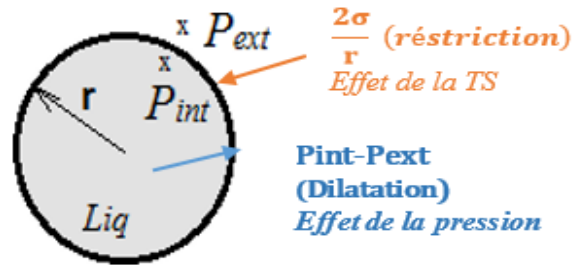
$\Delta P . (4\pi r^2 dr) = \sigma . (8\pi r dr) \Rightarrow$

$\Delta P = \frac{2.\sigma}{r}$ (Loi de YOUNG et LAPLACE à une seule interface sphérique (exemple : goutte d'eau).

Avec ,

$$\Delta P = P_{int} - P_{ext}$$

$$\Delta P = P_{int} - P_{ext} = \frac{2\sigma}{r}$$



r et σ sont des grandeurs physiques positives $\Rightarrow \Delta P > 0$ c_à_d, que $P_{int} > P_{ext}$ (la pression à l'intérieur de la bulle est **toujours supérieure** à celle de l'extérieure).

P_{int} : pression à l'intérieur de la bulle
 P_{ext} : pression à l'extérieur de la bulle
 r : rayon intérieur de la bulle
 σ : tension superficielle

La loi de Laplace traduit un état d'équilibre entre les forces de pression et les forces de tension de surface.

Nous rappelons que,

- **Surface d'une sphère S est :** $S = 4\pi r^2$

L'augmentation de surface de la sphère est dS :

$$\frac{dS}{dr} = 8\pi r \Rightarrow dS = 8\pi r \cdot dr$$

- **Volume d'une sphère V est :** $V = \frac{4\pi}{3} r^3$

L'augmentation du volume de la sphère est : dV :

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$$

❖ **Cas à deux interfaces : (bulle savonneuse)**

On considère que la bulle de savon comporte une double interface. À l'équilibre, la surpression ΔP est multipliée par un facteur de deux en raison des deux interfaces impliquées. Dans le cas d'une bulle de savon, il est nécessaire de prendre en compte ces deux interfaces, ce qui entraîne un doublement de la surface et, par conséquent, une augmentation de l'énergie de surface. Ainsi, la surpression ΔP est modifiée selon ce dédoublement de surface, d'où l'expression :

$$\Delta P = 2 \cdot \frac{2\sigma}{r} = \frac{4\sigma}{r}$$

Avec, $\Delta P = P_{int} - P_{ext}$

L'équation $\Delta P = \frac{4\sigma}{r}$ est appelée « Équation de YOUNG et LAPLACE à deux interfaces ».

$$\Delta P = P_{int} - P_{ext} = \frac{4\sigma}{r}$$

Démonstration :

Interf1 (intérieur- liquide): $P_{int} - P_L = \frac{2\sigma}{r_1} \dots (1)$

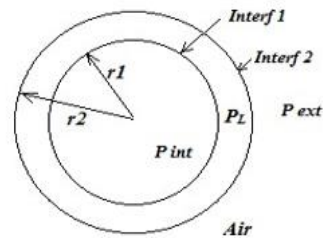
Interf2 (liquide- extérieur): $P_L - P_{ext} = \frac{2\sigma}{r_2} \dots (2)$

De(1)+(2) $(P_{int} - P_L) + (P_L - P_{ext}) = P_{int} - P_{ext} = \Delta P$

$$\left(\frac{2\sigma}{r_1}\right) + \left(\frac{2\sigma}{r_2}\right) = \Delta P$$

$$\Delta P = 2\sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$\left\{ \begin{array}{l} P_{int}: \text{pression intérieure} \\ P_L: \text{pression du liquide} \\ P_{ext}: \text{pression extérieure} \end{array} \right.$



Comme $r_1 \approx r_2 \approx r$, on peut écrire:

La pression de l'air à l'intérieur d'une bulle est supérieure à celle de l'air extérieur.

$$\Delta P = P_{int} - P_{ext} = \frac{4\sigma}{r}$$

Lorsque $\Delta P \gg \frac{4\sigma}{r}$, la bulle savonneuse s'éclate, ce sont les forces de pression qui l'emportent sur les forces de la tension superficielle. La force de pression dilate la bulle et celle de tension de surface la rétrécit.

5.2 Loi générale de LAPLACE

Dans le cas d'une surface courbée à deux rayons de courbures différents r_1 et r_2 , la surpression ΔP est:

$$\Delta P = P_{int} - P_{ext} = \sigma \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Lorsque ,

- ✓ La goutte à une forme sphérique ($r_1 = r_2 = r$), on retrouve la loi de Laplace à une seule interface

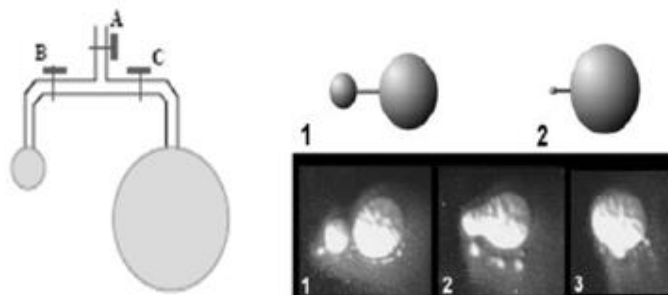
$$\Delta P = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$$

- ✓ la goutte à une forme cylindrique ($r_2 = \infty$), on retrouve la surpression égale

$$\Delta P = \frac{\sigma}{r}$$

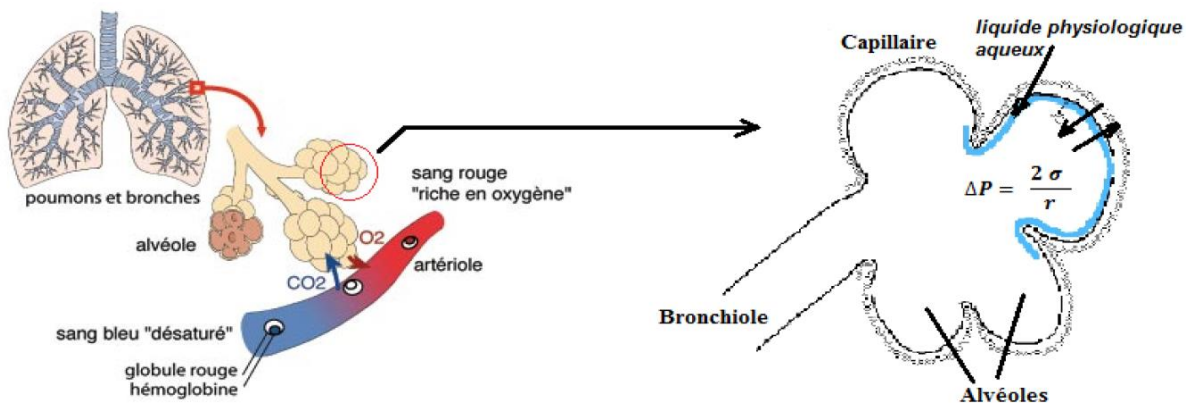
5.3 Déséquilibre du système des deux bulles (Expérience de LAPLACE)

L'expérience démontre qu'en présence d'une communication entre deux gouttes, une redistribution des pressions à travers les interfaces de la bulle est nécessaire pour atteindre un état d'équilibre global du système. Cet équilibre global se manifeste lorsque la petite bulle est absorbée par la grosse bulle, facilitant ainsi la dissipation des régions de haute pression vers les régions de basse pression. Cette observation suggère que, proportionnellement, plus une bulle est grande, moins la différence de pression entre son intérieur et l'extérieur est significative.



🚦 Applications biologiques (l'appareil respiratoire)

L'appareil respiratoire du corps humain, constitué des voies aériennes et des poumons, permet l'aspiration de l'oxygène présent dans l'air par la respiration (inspiration) et l'élimination du dioxyde de carbone produit par notre organisme lors de l'expiration. Les bronchioles, qui sont les ramifications des voies respiratoires, aboutissent aux alvéoles pulmonaires. Ces dernières jouent un rôle crucial dans le processus respiratoire en facilitant l'échange vital d'oxygène et de dioxyde de carbone.



🚦 Effet des produits Tensions actives ou surfactants sur la tension de surface

Les tensioactifs sont des molécules amphiphiles qui possèdent deux parties :

- **Tête hydrophile (lipophobe)** : présente une affinité pour l'eau (s'accroche à l'eau). Elle est constituée par un ou plusieurs groupements polaires : ioniques (anioniques, cationiques ou amphotères) ou non ioniques.
- **Queue hydrophobe apolaire (lipophile)** : présente une affinité pour les graisses (s'accroche à la graisse). Elle est constituée par une ou plusieurs chaînes hydrocarbonées.



Les tensioactifs ont la propriété de s'accumuler aux interfaces, réduisant ainsi la tension superficielle ou interfaciale.

Au sein de l'appareil respiratoire du corps humain, plus précisément au niveau de la paroi interne des alvéoles (représentée en bleu), un liquide phospholipidique, qui n'est pas purement aqueux, tapisse l'intérieur des alvéoles. La présence de cette substance permet de réduire la tension de surface à l'intérieur des alvéoles, dans une plage allant de $5 \cdot 10^{-3}$ N/m à $45 \cdot 10^{-3}$ N/m. Cette réduction de la tension de surface facilite l'expansion des alvéoles lors de l'étirement des poumons, favorisant ainsi l'augmentation de leur volume.

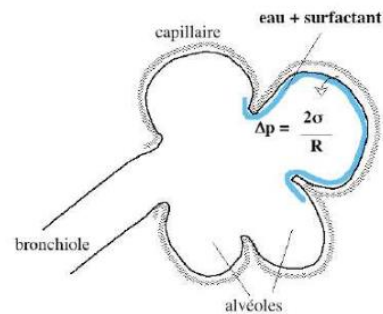
- ✓ alvéoles sans surfactant pulmonaire.

$$\sigma (\text{eau /air}) = 70 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

- ✓ Avec le surfactant pulmonaire

$$\sigma (\text{eau surfactant /air}) = 25 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

(à 37°C)



✚ Exemple 01

Chez un sujet normal, la surface totale des alvéoles est de 75 m^2 lors de l'expiration, et $98,5 \text{ m}^2$ au cours de l'inspiration.

Pour un sujet sain, la tension superficielle du film phospholipidique est, $\sigma = 2 \cdot 10^{-2}$ N/m, alors que pour un sujet présentant une pathologie (manque de surfactant), sa tension superficielle est de $5 \cdot 10^{-2}$ N/m.

Calculer l'énergie nécessaire pour augmenter la surface des alvéoles pour les deux sujets (sain et malade).

Corrigé :

L'énergie nécessaire pour augmenter la surface des alvéoles est :

- ✓ Pour un sujet sain ;

$$dw = \sigma dS \Rightarrow \Delta w = \sigma \cdot \Delta S = \sigma (S_f - S_i) = 2 \cdot 10^{-2} (98,5 - 75) = 0,47 \text{ J}$$

✓ Pour un sujet malade présentant une pathologie ;

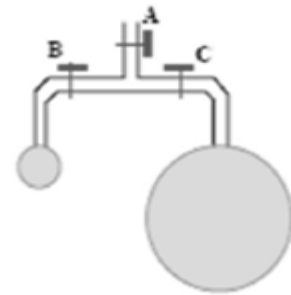
$$\Delta w = \sigma(S_f - S_i) = 5 \cdot 10^{-2}(98.5 - 75) = 1.17 J \gg 0.47 J$$

Donc, il faut plus d'énergie pour augmenter la surface des alvéoles, le sujet se fatigue trop !!!

Exemple 02

On considère deux bulles sphériques d'eau savonneuse de rayons différents, on ferme le robinet A est on ouvre les robinets B et C .

- Démontrer que système est énergétiquement instable ? Discuter.
- Calculer la variation de l'énergie développée au cours de cette transformation.



Données :

$$\sigma = 25 \text{ mN/m}$$

$$r_1 = 5 \text{ mm}$$

$$r_2 = 1 \text{ mm}$$

Corrigé :

- Surpression à l'intérieur de la petite bulle savonneuse

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_1 &= \frac{4\sigma}{r_1} = P_1 - P_{\text{atm}} \Rightarrow P_1 = \frac{4\sigma}{r_1} + P_{\text{atm}} \\ \Delta P_2 &= \frac{4\sigma}{r_2} = P_2 - P_{\text{atm}} \Rightarrow P_2 = \frac{4\sigma}{r_2} + P_{\text{atm}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_2 > P_1 \text{ (Système est Instable)}$$

Le petite bulle (à haute pression P2 se vide dans la grosse bulle (à basse pression P1).

- La variation de l'énergie développée au cours de cette transformation est .

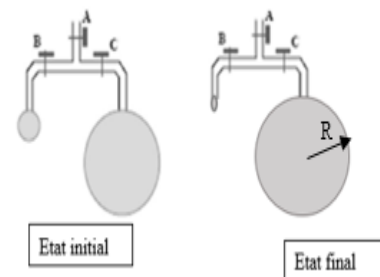
$$\Delta E = 2 \cdot \sigma \cdot \Delta S$$

Avec,

$$\Delta S = S_f - S_i$$

$$\left\{ \begin{aligned} S_i &= S_1 + S_2 = 4\pi r_1^2 + 4\pi r_2^2 = 4\pi(r_1^2 + r_2^2) \\ S_f &= 4\pi R^2 \end{aligned} \right.$$

✓ R= est inconnu ?



On applique le principe de conservation de masse \Rightarrow Volume total final (V_T) = Volume total initial (V_i)

$$\begin{cases} V_i = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3 \\ V_T = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{cases} \Rightarrow R = (r_1^3 + r_2^3)^{1/3}$$

On trouve,

$$\Delta S = S_f - S_i = 4\pi[(r_1^3 + r_2^3)^{2/3} - (r_1^2 + r_2^2)]$$

Et comme,

$$\Delta E = 2 \cdot \sigma \cdot \Delta S$$

$$\Delta E = 8\pi\sigma[(r_1^3 + r_2^3)^{2/3} - (r_1^2 + r_2^2)] = \text{Joules}$$

5.4 Phénomène de Coalescence

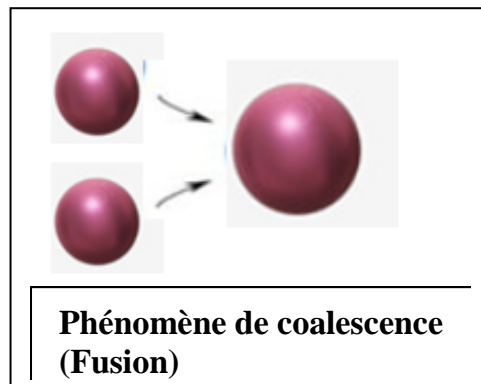
Soient deux gouttes de mercure ($\sigma = 490 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ et $d = 13,6$) de rayon $r = 2,5 \text{ mm}$, fusionnent en une seule.

Quelle est la variation de l'énergie au cours de cette transformation ?

Solution :

- Avant la fusion : $S_i = 2 \cdot s = 2 \cdot (4\pi r^2) = 8\pi r^2$
- Après la fusion : $S_f = 4\pi R^2$

Donc l'énergie est :



$$\Delta E = \sigma \Delta S$$

$$E_{sf} - E_{si} = \sigma(s_f - s_i) = \sigma(4\pi R^2 - 2(4\pi r^2)) = 4\pi\sigma(R^2 - 2r^2).....(*)$$

Sachant que, pendant la transformation, le volume étant constant, donc :

$$V_i = V_f \Rightarrow 2\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \Rightarrow R = r \cdot \sqrt[3]{2}$$

On remplace l'expression du rayon R dans l'équation (*), on trouve que,

$$\Delta E = 4\pi\sigma((r \cdot \sqrt[3]{2})^2 - 2r^2) = 4\pi\sigma r^2((2)^{2/3} - 2) = -15.80 \cdot 10^{-6} \text{ joules}$$

Conclusion : La coalescence (fusion) s'accompagne d'une perte d'énergie de 15.8 μ Joules.

6 Interface liquide A – liquide B

Par analogie à l'interface liquide-gaz, l'interface (liquide A - liquide B) est caractérisée par une constante de tension interfaciale telle que :

La tension interfaciale $\sigma_{AB} = \frac{dW}{dS}$

Cette quantité est d'autant plus grande que les liquides A et B mis en contact sont moins miscibles.

Lorsque les deux liquides ont une affinité l'un vers l'autre, la tension interfaciale σ_{AB} s'annule et on parlera d'une miscibilité totale ou parfaite entre les deux liquides A et B.

$$\sigma_{AB} = 0 \text{ (miscibilité parfaite)}$$

6.1 Energie de cohésion :

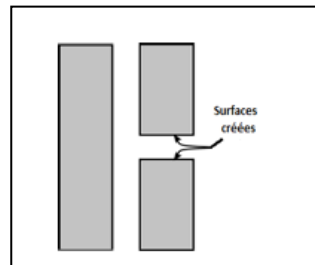
L'énergie de cohésion correspond au travail par unité de surface nécessaire pour vaincre les forces de cohésion qui maintiennent les molécules d'un liquide ensemble. Et ainsi séparer une colonne de liquide en deux parties distinctes. Pour cette séparation, un travail W doit être fourni, car deux nouvelles surfaces 2S sont créées.

Energie de cohésion égale :

$$W = 2 \cdot \sigma \cdot S$$

Et l'énergie de cohésion par unité de surface est notée par

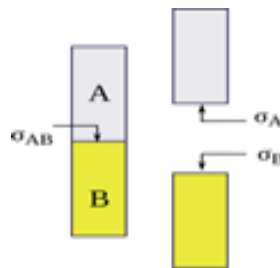
$$W_c = 2 \cdot \sigma \quad (\text{J/m}^2) \text{ ou N/m}$$



6.2 Energie d'adhésion:

L'énergie d'adhésion (W_{AB}) est l'énergie nécessaire pour séparer deux liquides A et B et obtenir deux surfaces avec des tensions superficielles σ_A et σ_B constantes.

Lorsque deux liquides différents, A et B, sont en contact, ils peuvent interagir à leur interface. L'énergie d'adhésion représente l'énergie requise pour rompre ces interactions et séparer les deux liquides, créant ainsi deux nouvelles surfaces avec des tensions superficielles spécifiques pour chaque liquide.



Ainsi l'énergie de d'adhésion par unité de surface est définie :

$$W_{AB} = \sigma_A + \sigma_B - \sigma_{AB} \quad \text{en (J/m}^2) \text{ ou N/m}$$

6.3 Etalement d'un liquide A sur un autre liquide B

Pour discuter de l'étalement du liquide A sur le liquide B, ou son absence, il est nécessaire de comparer l'énergie d'adhésion W_{AB} et l'énergie de cohésion W_c (A).

Lorsque,

- ✓ $W_{AB} > W_c(A)$ la goutte du liquide A s'étale sur la surface du liquide B.
- ✓ $W_{AB} < W_c(A)$, le liquide A ne s'étale pas sur le liquide B.

Sur le tableau ci-dessous, on donne quelques valeurs de tensions interfaciales σ_{AB} .

Système A-B	σ_A	σ_B	$\sigma_{A,B}$
eau – benzène	72,75	28,88	35,0
eau – CCl ₄	72,75	76,8	45,0
eau – n-octane	72,75	21,8	50,8
eau – mercure	72,75	470	375
eau – C ₂ H ₅ -O-C ₂ H ₅	72,75	17,0	10,7
benzène – mercure	28,88	470	357
Hg – C ₂ H ₅ -O-C ₂ H ₅	470	17,0	379

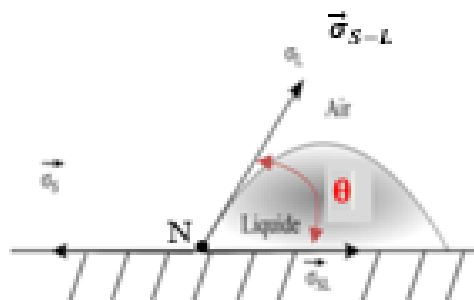
Les valeurs des tensions de surface s sont en dyne/cm (CGS). On les multiplie par 10^{-3} pour obtenir de N/m.

7 Interface Solide – liquide

7.1 Condition d'étalement

Lorsque l'on dépose une goutte d'un liquide sur un solide. Deux cas peuvent se présenter, la goutte s'étale ou non sur le solide.

Au point d'équilibre N de la goutte, on définit les trois phases : liquide solide, et le gaz qui environne les deux.



Les tensions superficielles, résultant de l'interaction entre les différentes phases adjacentes, sont :

- ✓ σ_{SL} : tension superficielle entre la phase Solide/Liquide
- ✓ $\sigma_{LG} = \sigma_L$: tension superficielle entre la phase Liquide/gaz(Air) (. L'action de l'air est négligeable)
- ✓ $\sigma_{SG} = \sigma_S$: tension superficielle entre la phase Solide/ gaz(Air)

La condition d'étalement de la goutte sur le solide est :

$$\sigma_L + \sigma_{SL} \leq \sigma_S$$

En ajoutant membre à membre la quantité : $\sigma_L - \sigma_{SL}$

On obtient :

$$2 \sigma_L \leq \sigma_L + \sigma_S - \sigma_{SL}$$

Donc,

$$W_{SL} \geq W_c(L)$$

Ce qui démontre La condition d'étalement $\sigma_L + \sigma_{SL} \leq \sigma_S$ est vérifiée.

7.2 Nombre de bond (B_0)

Il permet d'expliquer le compromis qui existe entre l'effet de gravité et celui de la tension de surface TS.

$$B_0 = \frac{\text{pression hydrostatique } (\rho g h)}{\text{pression capillaire } \left(\frac{2\sigma}{r}\right)}$$

$B_0 \ll 1$ l'effet de la tension de surface TS qui l'emporte où les molécules du liquide s'agencent entre elles et donnent une forme sphérique à la goutte.

$B_0 \gg 1$ l'effet de la gravité qui l'emporte et la goutte s'aplatit sur la surface du solide.

C'est la raison pour laquelle, Les gros gouttes d'eau sont plus aplaties alors que les petites gouttes sont sphériques



7.3 L'invariant de Young

Si une phase liquide entre en contact avec la phase solide, à l'équilibre, les deux phases se raccordent par un angle θ .

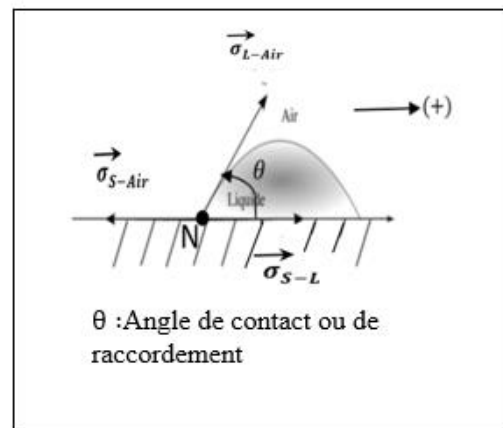
θ : angle de raccordement ou de contact (figure ci-dessous).

✓ La condition d'équilibre en un point N implique que :

$$\sigma_{SL} + \sigma_L \cos \theta - \sigma_S = 0$$

Invariant de Young est donné par l'expression :

$$\cos \theta = \frac{\sigma_S - \sigma_{SL}}{\sigma_L}$$



7.4 Formule de Dupré

Permet d'exprimer l'énergie d'adhésion entre liquide / solide (W_{SL}) en fonction de l'angle de contact « θ ».

On a:

$$\sigma_S = \sigma_{SL} + \sigma_L \cos \theta \Rightarrow \sigma_S - \sigma_{SL} = \sigma_L \cos \theta$$

En ajoutant membre à membre la quantité σ_L on aura :

$$\sigma_L + \sigma_S - \sigma_{SL} = \sigma_S - \sigma_{SL} + \sigma_L = \sigma_L \cos \theta + \sigma_L = \sigma_L (1 + \cos \theta)$$

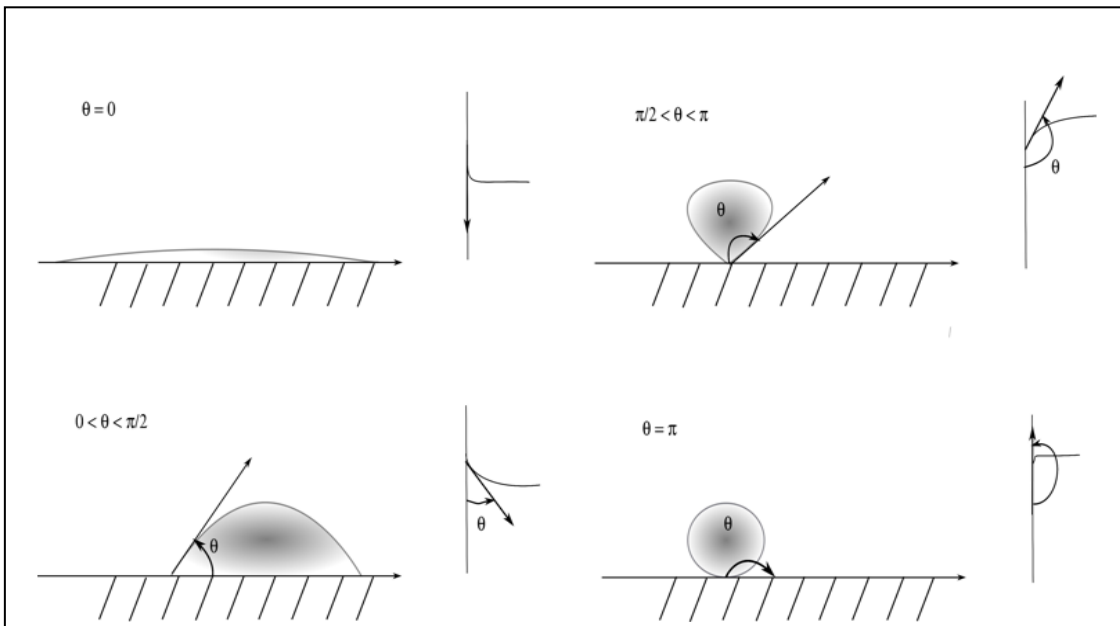
et $W_{SL} = \sigma_L + \sigma_S - \sigma_{SL}$,

On obtient ainsi,

$$W_{SL} = \sigma_L (1 + \cos \theta) \quad \text{Appelée la formule de Dupré}$$

- Il en résulte plusieurs cas de raccordement de la phase liquide avec la phase solide en fonction de l'angle θ .

- $\theta = 0$, ($\cos \theta = 1$) $\Rightarrow W_{SL} = 2 \sigma_L = W_L$ mouillement parfait
- $\theta = \pi$, ($\cos \theta = -1$) $\Rightarrow W_{SL} = 0$ mouillement nul. (Mercure/verre, Le mercure se ramasse)
- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, ($0 < \cos \theta < 1$) bon mouillement
- $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, ($-1 < \cos \theta < 0$) mauvais mouillement



7.5 Intérêt pratique de la mesure de l'angle (θ):

La mesure de l'angle de contact (θ) entre un liquide et une surface présente plusieurs intérêts pratiques, tels que :

- ✓ Évaluer les propriétés de mouillage d'un liquide sur une surface donnée.
 - Un grand angle (θ), indiquant un caractère non mouillant \Rightarrow la surface est hydrophobe
 - Un petit angle (θ), indiquant un caractère mouillant \Rightarrow la surface est hydrophile.

- ✓ Permet d'étudier l'adsorption de substances à la surface, la formation de films minces
- ✓ Permet de comprendre les phénomènes de capillarité.
- ✓ Etudier les interactions entre un liquide et une surface solide

L'appareil de mesure utilisé pour mesurer l'angle θ est appelé "goniomètre".

Afin de favoriser le mouillage et réduire l'angle θ , on introduit un agent tensioactif (surfactant en anglais), dans le liquide pour diminuer sa tension de surface.

Pour augmenter le mouillage (diminuer θ) on ajoute un produit tension actif (surfactant) au liquide pour diminuer la tension de surface.

8 Techniques de mesure de la tension superficielle



Il existe différentes méthodes pour mesurer la tension de surface. Les méthodes les plus couramment utilisées sont :

8.1 Capillarité - Loi de Jurin-

Lorsqu'un tube capillaire (avec un rayon $R < 1$ cm) est immergé dans un liquide, le niveau du liquide à l'intérieur du tube peut soit s'élever (ascension), soit s'abaisser (dépression). Ces phénomènes d'ascension et de dépression sont influencés par les propriétés du liquide (mouillant ou non mouillant), les caractéristiques des parois du tube, les interactions entre les molécules du liquide et les parois du tube, ainsi que par le milieu environnant.

8.1.1 Liquide est mouillant -Ascension capillaire :

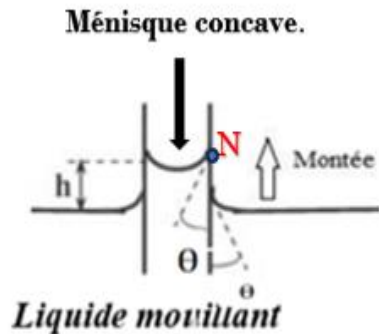
Le liquide est considéré comme mouillant lorsqu'il a une affinité pour la surface solide (cas du verre) avec laquelle il est en contact. Cela se traduit par un angle de contact $\theta < \pi/2$, et une surface libre du liquide (interface liquide-air) sous la forme d'un ménisque concave.

a- Méthode 1 : Équilibre entre effet de capillarité et de gravité

L'affinité du liquide mouillant pour le verre est sa tendance à monter (ascension capillaire) le long de la surface et former une liaison avec celle-ci, ce qui permet au liquide mouillant de se déplacer le long des parois internes du tube par effet capillaire jusqu'à ce qu'il atteigne un équilibre entre l'effet de capillarité et l'effet de gravité.

✓ L'effet de capillarité provient de la force de la tension superficielle verticale (F_{Ts}).

- ✓ L'effet de gravité, est la force qui s'exerce sur le liquide en raison de la pesanteur g , et égale au poids du liquide (P) contenu dans capillaire . Cette force tend à faire descendre le liquide dans le tube. Ainsi, À l'équilibre



θ : L'angle de contact au point N (raccordement des trois phases : liquide, paroi interne du tube et l'air).

$$(F_{TS})_v = P$$

$$(F_{TS})_v = m g$$

$$(F_{TS})_v = F_{TS} \cos \theta = 2\pi r \sigma \cos \theta \dots\dots\dots (1)$$

$$P = m g = \rho V g = \rho S . h . g = \rho \pi r^2 h g \dots\dots\dots (2)$$

S : surface du capillaire égale à πr^2

À partir des équations (1) et (2), on peut déduire l'expression de la hauteur (h) ou du niveau maximal atteint par le liquide.

La hauteur d'ascension capillaire maximale du liquide dans le tube est :

$$h = \frac{2 \sigma \cos \theta}{\rho g r} \quad \text{Loi de JURIN}$$

Avec,

g : la gravitation terrestre

r : rayon du tube capillaire,

ρ (rho) : masse volumique du liquide

σ : la tension superficielle du liquide

$$\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow h > 0$$

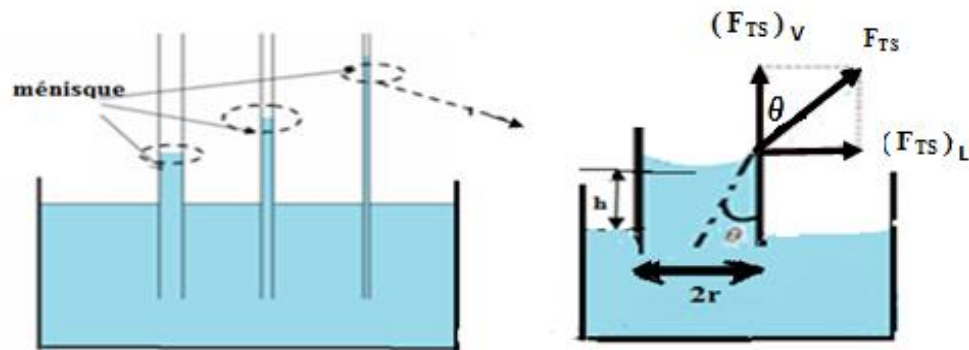


Figure 1

Unités :

h : mètre (m)

 g : N/Kg ou m/s^2

r : mètre (m)

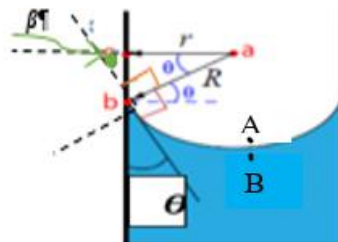
 ρ (rho) : Kg/m³ σ : N/m**b- Méthode 2 : L'équilibre entre la surpression ΔP et l'ascension**

La formation d'un ménisque de rayon R, s'accompagne de l'apparition d'une surpression ΔP dans le liquide. L'ascension (montée) du liquide dans le tube compense la surpression ΔP entre les points A et B situés de part et d'autre du ménisque.

Ce phénomène est expliqué par deux lois fondamentales :

- ✓ La Loi de Laplace
- ✓ La loi de l'hydrostatique

***Loi de Laplace :** Cette loi stipule que la surpression ΔP de part et d'autre du ménisque est inversement proportionnelle au rayon de courbure du ménisque.



$$\begin{cases} \Delta P = P_A - P_B = \frac{2 \cdot \sigma}{R} \\ P_A = P_{atm} \\ \cos \theta = \frac{r}{R} \Rightarrow R = \frac{r}{\cos \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta P = P_{atm} - P_B = \frac{2 \cdot \sigma \cos \theta}{r} \text{ (Loi de Laplace) } \dots \dots \dots (3)$$

R : rayon du ménisque

θ : Angle de contact au point de raccordement des trois phases.

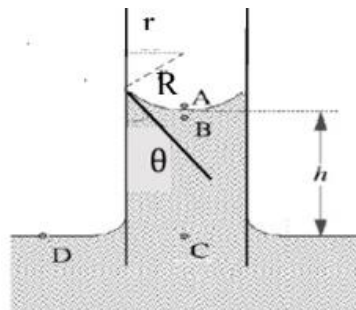
***Loi de L'hydrostatique** : Cette loi stipule que :

- La pression dans un liquide en équilibre est uniforme en tout point situé au même niveau.
- La pression est proportionnelle à la hauteur du liquide au-dessus de ce point.

Ainsi, dans le cas du ménisque, la pression est plus élevée au point A (en dessous du ménisque) et plus faible au point B (au-dessus du ménisque).

La différence de pression hydrostatique entre les points C et B, est donnée par :

$$\text{Pression hydrostatique} \begin{cases} P_C = P_B + \rho g h \\ P_C = P_D = P_A = P_{atm} \end{cases} \Rightarrow P_{atm} - P_B = \rho g h \dots \dots \dots (4)$$



(3) = (4), on obtient :

$$\frac{2 \cdot \sigma \cos \theta}{r} = \rho g h$$

Donc, l'ascension capillaire h , égale à :

$$h = \frac{2 \sigma \cos \theta}{\rho g r} \dots\dots\dots \text{Loi de JURIN}$$

Ainsi, L'expression de h est identique à celle obtenue par la méthode 01.

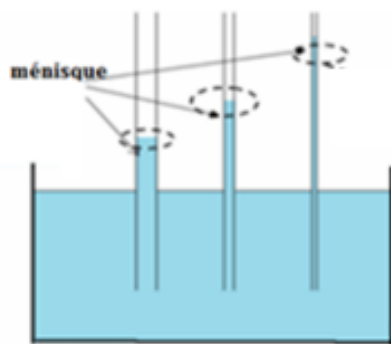
Connaissant h , r et ρ et θ , on peut déduire la tension superficielle (σ) du liquide.

+ Cas particulier : Lorsque le liquide est parfaitement mouillant ($\theta = 0^\circ$,
 $\cos \theta = 1$)

La hauteur d'ascension maximale d'un liquide parfaitement mouillant est :

$$h = \frac{2 \sigma}{\rho g r} = h_{\max}$$

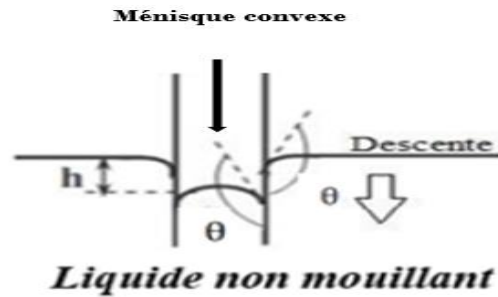
Selon la loi de Jurin, plus le rayon du capillaire est petit, plus l'élévation du liquide est importante. Les molécules situées à la surface du liquide ont tendance à établir plus d'interactions avec la paroi interne du tube solide qu'avec les molécules de liquide voisines situées sur les côtés et en dessous du tube.



8.1.2 Liquide est non mouillant - Dépression capillaire :

Le liquide est considéré comme non mouillant lorsque les forces de cohésion entre les molécules du liquide sont plus fortes que les forces d'adhésion entre le liquide et les parois

du tube. Cela se traduit par un angle de contact ($\theta > \pi/2$), En conséquence, le liquide non mouillant s'abaisse ($h < 0$) à une profondeur h à l'intérieur du tube, créant ainsi une dépression. La surface du liquide prend une forme de ménisque convexe.



✚ **Cas particulier :** Lorsque le liquide est parfaitement non mouillant

$$\theta = \pi \Rightarrow \cos \pi = -1$$



À retenir

✚ Dans un tube capillaire, la surpression à l'interface (ΔP), est responsable de l'ascension (montée) ou la dépression (descente) du liquide jusqu'à h .

En pratique, lorsque,

✚ -l'angle $\theta < \frac{\pi}{2}$, ($\cos \alpha > 0$, la hauteur d'ascension $h > 0$: Le liquide est mouillant

✚ -l'angle $\theta = 0$, le liquide atteint sa hauteur maximale ($h = h_{\max}$) : liquide est parfaitement mouillant.

✚ -l'angle $\theta > \frac{\pi}{2}$, ($\cos \alpha < 0$, la hauteur de dépression $h < 0$: Le liquide est non mouillant

✚ l'angle $\theta = \pi$, liquide est parfaitement non mouillant.

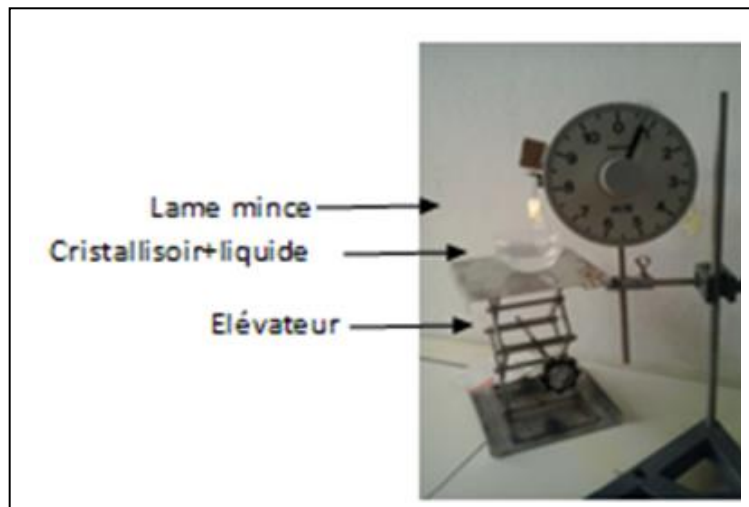
8.2 Méthode d'arrachement - - Principe de Wilhelmy

□ Cas d'une lame immergée:

Soit une lame mince de longueur L (Figure 08). L'extrémité supérieure de la lame est suspendue par un fil qui est relié à un dynamomètre à torsion, tandis que l'extrémité inférieure est immergée dans un liquide dont on veut mesurer sa tension superficielle σ .

Le dynamomètre à torsion indique la force nécessaire pour arracher une lame d'un liquide.

Il est important de noter que, lorsque la lame effleure (touche légèrement) le liquide, deux situations peuvent survenir : soit la lame est aspirée par le liquide (cas d'un liquide mouillant, figure 09), soit elle est éjectée (repoussée) à l'extérieur (cas d'un liquide non mouillant).



- On propose d'étudier le cas d'un liquide mouillant.

Lorsque la lame mince affleure la surface libre d'un liquide, on constate que la balance du dynamomètre perd son équilibre, et la lame est aspirée.

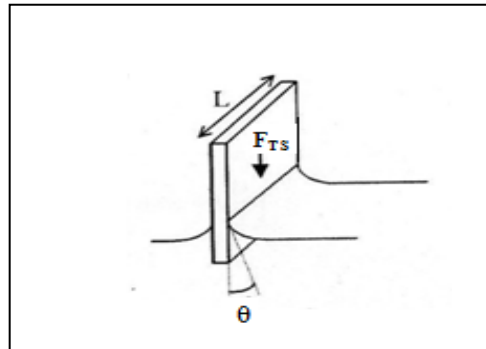


Figure 09

Juste au moment de l'arrachement, de la lame, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$F_{\text{arrachement}} = F_{\text{TS}} + P \dots \dots \dots (*)$$

P : poids de la lame

$$P = mg$$

F_{TS} : force de la tension de surface

$$F_{\text{TS}} = 2L \cdot \sigma \cdot \cos \theta$$

2L : les deux longueurs mouillées (sont en contact avec le liquide)

Ainsi, la force d'arrachement est :

$$F_{\text{arrachement}} = 2L \cdot \sigma \cdot \cos \theta + m \cdot g \quad (\text{en N})$$

Et, la tension superficielle du liquide est :

$$\sigma = \frac{F_{\text{arrachement}} - mg}{2L \cdot \cos \theta} \quad (\text{N/m})$$

Remarque :

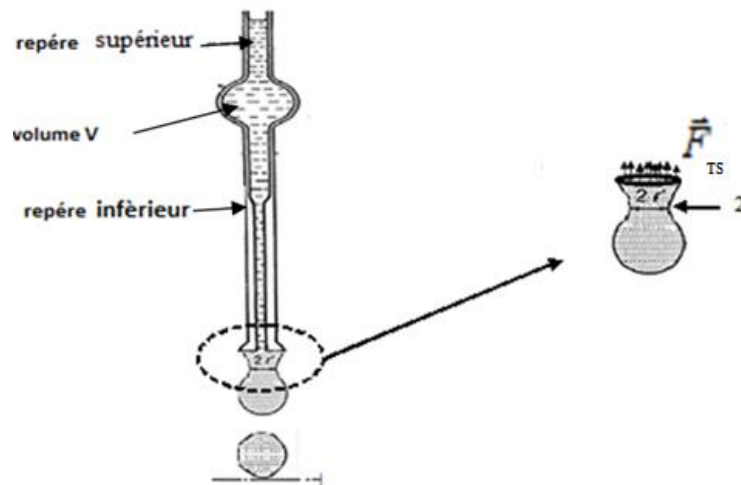
1. Si le poids de la lame est négligeable, la valeur de la force de tension superficielle (**F_{TS}**) est équivalente (égale) à la valeur de la force indiquée par le dynamomètre à torsion (**F_{arrachement}**). Voir équation (*).
2. Lorsque les liquides sont parfaitement mouillants (l'angle de raccordement (l'angle de contact entre la lame et le liquide) est nul : $\theta = 0^\circ$ ($\cos \theta = 1$)).

3. Dans le cas d'un anneau immergé, la longueur L représente (égale) la circonférence C c'est le périmètre de l'anneau. ($L = C = 2\pi r = \pi D$), où r est le rayon de l'anneau et D est le diamètre.

8.3 Méthode stalagmométrie

Le stalagmomètre, illustré dans la Figure 1, se compose d'un tube en verre avec un réservoir de volume V et se termine par un capillaire ayant un rayon externe R . Le réservoir est délimité par deux repères. Le liquide s'écoule lentement, goutte à goutte, à travers le capillaire sous l'effet de sa propre gravité.

Au moment où la goutte se détache, son poids ($m.g$) est équilibré par la force de tension superficielle F_{TS} qui s'exerce au niveau du collet de striction r ..



$$F_{TS} = m.g \dots\dots\dots (1)$$

$$F_{TS} = \sigma.L = \sigma.2\pi r$$

Avec, $R' < r < R$

R' : rayon intérieur

R : rayon extérieur

m : masse d'une seule goutte de liquide

La loi de **TATE** montre que le rayon du collet r est proportionnel au rayon extérieur du tube quelle que soit la nature du liquide.

$$r = k'R$$

$$F_{TS} = \sigma \cdot 2\pi k'R = \sigma KR \dots\dots\dots(2)$$

$$2\pi k' = K = 3,8 \quad (\text{Constante de Tate})$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \quad \mathbf{m \cdot g = K \cdot \sigma \cdot R} \quad (\text{Loi de TATE})$$

R : Rayon extérieur,
 K : constante de TATE

En pratique, la stalagmométrie permet de calculer la tension superficielle d'un liquide inconnu en le comparant à un liquide de référence dont les constantes de tension superficielle et de masse volumique sont connues. Le principe de cette méthode implique de compter le nombre de gouttes contenues dans un réservoir de volume V (connu) pour les deux liquides.

Exemple d'applications :

Soient, n_0 , σ_0 , ρ_0 et n_x , σ_x , ρ_x , respectivement, le nombre de goutte, la tension superficielle du liquide et la masse volumique, du liquide de référence et du liquide à étudier.

Ainsi,

✓ Pour une goutte du liquide de référence : la loi de Tate s'écrit : $m_0 \cdot g = K \cdot \sigma_0 \cdot R$

$$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{m_0 \cdot g}{K \cdot R} \rightarrow \begin{cases} m_0 = \rho_0 \cdot V_{0g} \\ V_{0g} = \frac{V}{n_0} \end{cases} \Rightarrow \sigma_0 = \frac{\rho_0 \cdot V}{K \cdot R \cdot n_0} \cdot g \dots\dots\dots(3)$$

En suivant les mêmes étapes précédentes,

✓ Pour une goutte du liquide à étudier (inconnu): la loi de Tate s'écrit : $m_x \cdot g = K \cdot \sigma_x \cdot R$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{m_x \cdot g}{K \cdot R} \rightarrow \begin{cases} m_x = \rho_x \cdot V_{xg} \\ V_{xg} = \frac{V}{n_x} \end{cases} \Rightarrow \sigma_x = \frac{\rho_x \cdot V}{K \cdot R \cdot n_x} \cdot g \dots\dots\dots(4)$$

m_0 , m_x et V_{0g} , V_{xg} sont respectivement la masse et le volume d'une seule goutte du liquide de référence et du liquide inconnu (liquide à étudier)

V : volume du réservoir (même réservoir)

En faisant le rapport entre l'équation (4) et (3), on trouve l'expression :

$$\boxed{\frac{\sigma_x}{\sigma_0} = \frac{\rho_x n_0}{\rho_0 n_x}} \dots\dots\dots(5)$$

Ainsi la tension superficielle du liquide inconnu σ_X est :

$$\sigma_X = \sigma_0 \frac{\rho_x n_0}{\rho_0 n_x} \quad \text{en N/m}$$

Remarque:

L'indice « 0 » est utilisé pour représenter le liquide de référence, tandis que l'indice « x » est utilisé pour représenter le liquide inconnu.

- La stalagmométrie constitue une méthode permettant d'établir la relation entre les propriétés physiques d'un liquide de référence et celles d'un liquide inconnu, comme indiqué dans l'équation (5). Il s'agit d'une approche indirecte visant à déterminer la tension de surface du liquide inconnu.

Exemple d'Application : Loi de LAPLACE

Quelle est la surpression à l'intérieur d'une goutte de pluie (de forme sphérique) ayant un diamètre « d » d'environ 3 mm ?

Quelle est l'énergie nécessaire à la formation de cette goutte de pluie ?

On donne :

$$\sigma = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

Réponse :

La surpression ΔP à l'intérieur d'une goutte de pluie peut être déterminée à partir de la différence entre la pression à l'intérieur de la goutte et la pression atmosphérique environnante.

✓ Elle est donnée par l'équation de Laplace :

Sachant qu'une goutte de pluie possède une seule interface, la surpression à l'intérieur de la goutte s'écrit

$$\Delta P = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$$

Où

σ : tension de surface de la goutte de pluie

r : est le rayon de la goutte.

$$r = \frac{d}{2}$$

Par conséquent,

$$\Delta P = \frac{4 \cdot \sigma}{d}$$

$$\Delta P = 97.33 \text{ N/m ou Pa}$$

La formation d'une goutte de pluie nécessite de l'énergie de surface, une forme d'énergie interfaciale associée à l'interface entre deux phases, à savoir l'air et la goutte de pluie. Cette énergie découle des forces d'interaction entre les molécules à la surface et joue un rôle crucial dans le phénomène de la tension de surface. Elle peut être exprimée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sigma \cdot \Delta S = \sigma \cdot (S_f - S_i) = \sigma \cdot (S_f - 0) = \sigma \cdot 4\pi r^2 \\ &= 73 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})^2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ joules} \end{aligned}$$

Exemple d'application : loi de JURIN cas d'ascension capillaire

Le schéma illustre un récipient renfermant un liquide mouillant dont la masse volumique est de 1000 kg/m^3 , lorsque'un tube capillaire de 2 mm de diamètre est immergé dans ce liquide.

1- Sur un schéma, représenter l'ascension h du liquide.

2- Calcul de l'ascension maximale du liquide.

Données : $\sigma = 72 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Réponse :

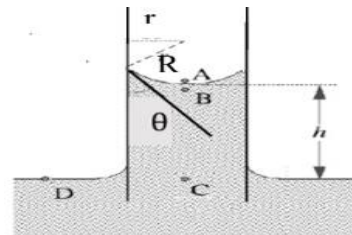
1- Le liquide est mouillant, donc l'ascension h est positive ($h > 0$). Voir le schéma correspondant à l'ascension capillaire.

2-Selon la Loi de Jurin, la hauteur d'ascension est : $h = \frac{2 \sigma \cos \theta}{\rho g r}$

L'ascension (montée) maximale du liquide correspond à un angle de mouillage θ nul

$\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos \theta = 1$, ainsi :

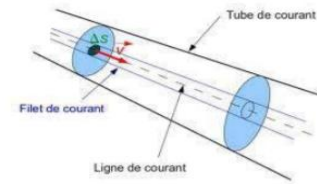
$$h = \frac{2 \sigma}{\rho g r}$$



Application numérique :

$$h = \frac{2 \cdot 72 \cdot 10^{-3} (N/m)}{1000 (Kg/m^3) \cdot 10 (m/s^2) \cdot 1 \cdot 10^{-3} (m)} = 144 \cdot 10^{-4} m = 14,4 \text{ mm}$$

Chapitre02 : L'hémodynamique

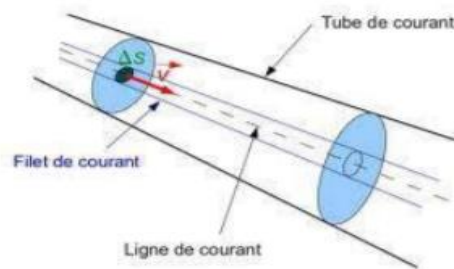


1 Introduction :

Il s'agit d'une science qui se consacre à l'étude de la circulation sanguine (écoulement) de l'être humain à travers les vaisseaux sanguins. Elle est basée sur les lois physiques de la mécanique des fluides.

En dynamique, l'écoulement du fluide (liquides et gaz) est considéré comme étant un écoulement permanent (stationnaire) où la vitesse d'un élément du fluide est indépendante du temps, incompressible (masse volumique constante), et chaque élément du fluide est défini par:

- ✓ Ligne de courant: Ce sont des lignes imaginaires dont les vitesses sont tangentes à tous les points et parallèles à la direction de l'écoulement.
- ✓ Tube de courant : c'est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.
- ✓ Filet de courant : est un tube de courant qui renferme un petit élément de surface dS .



2 Écoulement Bernoulli

2.1 Cas des liquides Parfaits

En écoulement permanent, l'énergie totale E_T est conservée tout le long d'une ligne de courant.

En analogie avec la dynamique d'un point matériel. L'énergie totale E_T est conservée et égale à la somme de trois énergies : énergie cinétique (E_C), potentielle de pression (E_{pp}) et énergie potentielle de pesanteur (E_{pz}).

$$E_T = E_{pp} + E_C + E_{pz} = \text{constante}$$

En divisant par unité de volume, l'équation énergétique est équivalente à des pressions, on obtient

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \cdot g \cdot z = \text{cste} \quad (\text{en Pascal})$$

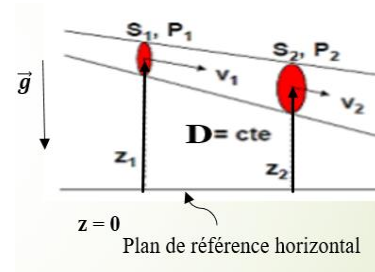
Cette équation est la **Loi de Bernoulli**, c'est la « charge du liquide » entre les points (1) et (2).

Avec,

$\frac{1}{2}\rho v^2$: Pression cinétique ou dynamique (Énergie cinétique (E_C) par unité de volume)

P : Pression statique (Énergie potentielle de pression (E_{pp}) par unité de volume)

$\rho \cdot g \cdot z$: Pression de pesanteur (Énergie potentielle de pesanteur (E_{pz}) par unité de volume)



Loi de Bernoulli entre deux points quelconque 1 et 2 de la ligne du courant s'écrit :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho(\bar{v}_1)^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho(\bar{v}_2)^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 = \text{cste} \quad ..(*) \quad (\text{Unité : Pascal})$$

$P_1 + \frac{1}{2}\rho(\bar{v}_1)^2 + \rho \cdot g \cdot z_1$: la charge du liquide au point 1

$P_2 + \frac{1}{2}\rho(\bar{v}_2)^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$: la charge du liquide au point 2

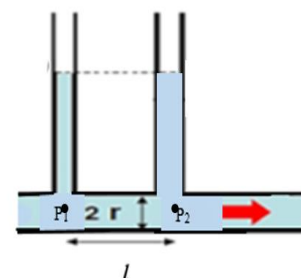
En divisant l'équation (*) par $\rho \cdot g$, les pressions deviennent les hauteurs, c'est une autre forme de l'équation de Bernoulli (en unité de longueur).

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{(\bar{v}_1)^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{(\bar{v}_2)^2}{2 \cdot g} + z_2$$

(Unité : mètre)

Si, la conduite est horizontale et de section constante :

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = S_2 \\ \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \\ z_1 = z_2 \end{array} \right\} \Rightarrow P_1 = P_2$$



En écoulement Bernoulli, le liquide est animé de vitesses égales et parallèles à l'axe centrale.

Le Profil de vitesse: Dans chaque section droite de cette conduite:

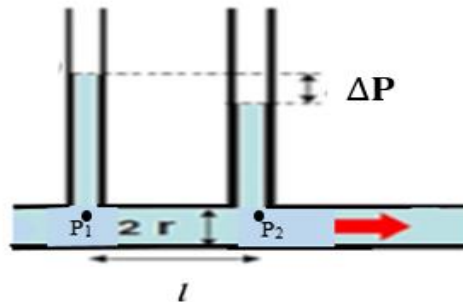
- ✓ Vitesse est constante
- ✓ Parallèles à l'axe centrale.



2.2 Cas des liquides réels

2.2.1 Perte (chute) de charge ΔP

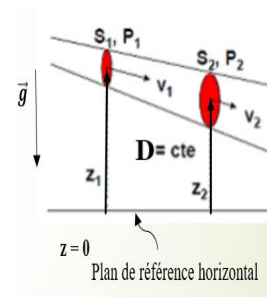
Dans un liquide réel, l'écoulement entre les points (1) et (2) de la ligne de courant ne se produit que si la perte de charge ΔP est positive, visant à surmonter les forces de frottement. Ici, ΔP est défini comme la différence de pression entre les points P1 et P2, avec un flux de hautes pressions vers les basses pressions ($\Delta P = P_1 - P_2$).



$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho (\bar{v}_1)^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho (\bar{v}_2)^2 + \Delta P \quad (\text{en Pascal}) \quad (**)$$

□ Pour une conduite horizontale de section constante

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = S_2 \\ \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \\ Z_1 = Z_2 \end{array} \right\} \Rightarrow P_1 - P_2 = \Delta P \quad , \text{D'où, } (P_1 > P_2)$$



$\Delta P = P_1 - P_2$: est la perte de charge ou chute de pression entre les points 1 et 2.

D'où, $(P_1 > P_2)$.

Le fluide circule des régions de hautes pressions vers les basses pressions.

2.2.2 Perte de charge en hauteur: ΔH

En divisant l'équation précédente (***) par $(\rho \cdot g)$, on obtient une autre Forme de l'équation (**). Celle-ci est donnée en unité de longueur.

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 + \frac{(\bar{v}_1)^2}{2 \cdot g} = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + \frac{(\bar{v}_2)^2}{2 \cdot g} + \frac{\Delta P}{\rho \cdot g} \quad (\text{en mètre})$$

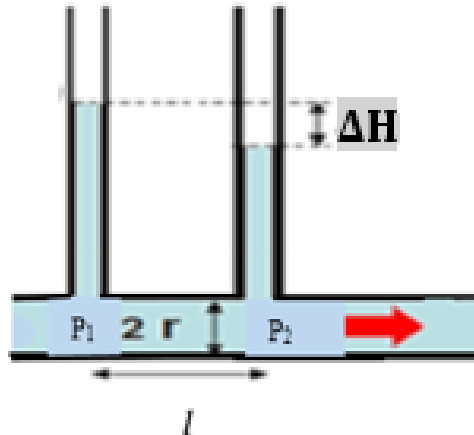
Avec , $\frac{\Delta P}{\rho \cdot g} = \Delta H$

Et comme, la conduite cylindrique est horizontale $z_1 = z_2$, l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{(\bar{v}_1)^2}{2 \cdot g} = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{(\bar{v}_2)^2}{2 \cdot g} + \Delta H$$

ΔH : est appelée « perte de charge en mètre de colonne de fluide (m.C.F) » ou perte en charge linéaire

En divisant par le distance l de l'écoulement : $\frac{\Delta H}{l}$ est appelée « perte de charge linéaire », c'est une grandeur sans unité.



3 Débit et équation de continuité à travers un tube cylindrique

Le débit est la quantité de fluide qui s'écoule par unité de temps.

On distingue deux types débits : le débit volumique et le débit massique.

3.1 Débit volumique Q_V : Est le volume élémentaire de fluide qui s'écoule par unité de temps dt.

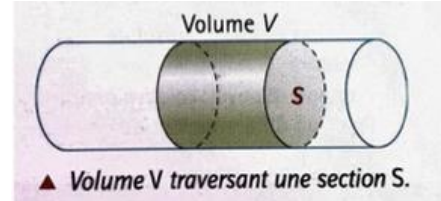
$$Q_V = \frac{dV}{dt} = \frac{S dx}{dt} = S \cdot \bar{v}$$

dV : volume élémentaire en (m^3)

\bar{v} : vitesse moyenne (m/s)

S : section de la conduite cylindrique ($S = \pi r^2$) en m^2

Soit,



$$Q_V = S \cdot \bar{v} \dots \dots \dots (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dimension : } [Q_V] = L^3 T^{-1} \\ \text{Unité : } \quad \quad \quad m^3 \cdot s^{-1} \end{array} \right.$$

3.2 Débit massique Q_m : Est la masse élémentaire qui traverse la section droite du tube (conduite) pendant un intervalle de temps dt.

$$Q_m = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \frac{\rho \cdot S \cdot dx}{dt} = \rho \cdot S \cdot \bar{v}$$

$$dm = \rho dV \quad (\text{ en kg})$$

ρ : masse volumique du liquide en $\frac{Kg}{m^3}$

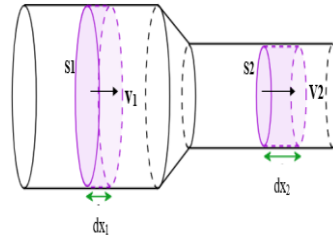
$$Q_m = \rho \cdot Q_V \dots \dots \dots (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dimension : } [Q_V] = \frac{M}{T} \\ \text{Unité : } \quad \quad \quad kg \cdot s^{-1} \end{array} \right.$$

3.3 Equation de continuité : (conservation de masse)

Elle explique la conservation de la masse d'un liquide qui se déplace en régime permanent dans un tube cylindrique à section variable.

Comme, la masse est conservée : la masse de liquide ayant traversé la section S1 est la même que celle ayant traversé la section S2, on écrit :



$$\left. \begin{array}{l} (Q_v)_1 = S_1 \cdot \bar{v}_1 \\ (Q_v)_2 = S_2 \cdot \bar{v}_2 \end{array} \right\} \quad (Q_v)_1 = (Q_v)_2 = \text{constante}$$

Le débit à travers toutes les sections droites du tube est constant

$Q_v = S_1 \bar{v}_1 = S_2 \cdot \bar{v}_2 = \text{constant}$ est appelée « **Equation de continuité** »

C'est-à-dire l'expression de l'équation de continuité généralisée s'écrit ;

$$\mathbf{S \cdot \bar{v} = Q_v = \text{constante}}$$

Cette équation stipule que, le resserrement de la section augmente la vitesse moyenne (\bar{v}) de l'écoulement.

$$S_1 < S_2 \Rightarrow \bar{v}_1 > \bar{v}_2 \Rightarrow \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

4 Notion sur la viscosité

La viscosité d'un liquide est les frottements internes qui s'opposent au mouvement relatif de deux couches adjacentes.

4.1 Coefficient de la viscosité dynamique η

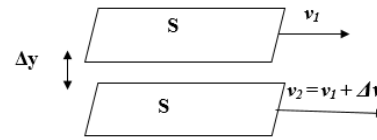
Si l'on considère deux couches de fluide successives de surface S et distantes de Δy , animées de vitesses différentes v_1 et v_2 parallèles. Il existe entre ces deux couches une force

qui s'oppose à leurs mouvements relatifs. Cette force est appelée force de frottement ou visqueuse notée par F_v . Elle est donnée par la formule de Newton.

$$F_v = \eta \cdot S \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad (\text{Formule de Newton})$$

Δv : vitesse relative des deux couches

$\frac{\Delta v}{\Delta y}$: est appelé gradient de vitesse.



η : « coefficient de viscosité dynamique du fluide ou la viscosité dynamique tout-court ».

La viscosité η mesure de la résistance d'un fluide au mouvement, plus le liquide est visqueux, plus le mouvement est lent.

- L'addition d'une faible quantité de substance en suspension ou en solution peut augmenter grandement la viscosité du liquide.
- Les liquides ont une viscosité supérieure à celle des gaz car les molécules sont plus rapprochées, des liaisons s'établissent entre elles ce qui augmentent la cohésion de l'ensemble.
- La viscosité varie en sens inverse de la température
- Si, la viscosité est indépendante du gradient de vitesse. Exemple: L'eau. Le liquide est dit Newtonien. Est dit non newtonien dans le cas inverse. Exemple : le sang, le yaourt.

Dimension et unité de la viscosité dynamique η :

$$\eta = \frac{F}{S} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta v} \left\{ \begin{array}{l} \text{système MKSA (SI): } (N \cdot m^{-2}) \cdot \left(\frac{m}{m \cdot s^{-1}} \right) = kg \cdot m^{-1} s^{-1} = Pa \cdot s = \text{Poiseuille (Pl)} \\ \text{Dimension : } = M \cdot L^{-1} T^{-1} \\ \text{système CGS : } \text{Poise} \\ \text{avec, } 1 \text{ Poise} = 0,1 \text{ Pl} \end{array} \right.$$

4.2 Coefficient de la viscosité cinématique ν

C'est le rapport de la viscosité dynamique η et de la masse volumique ρ du fluide.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{système MKSA (SI): } m^2s^{-1} \\ \text{Dimension : } L^2T^{-1} \\ \text{système CGS : } \text{Stokes (St)} \\ \text{avec, } 1m^2s^{-1} = 10^4 \text{ St Stokes} \end{array} \right.$$

Exemple 01:

On interpole un liquide entre deux plaques planes et parallèles A et B, ces plaques sont distantes de 1 mm et ont une surface de 100 cm².

Quand la plaque A se déplace à une vitesse de 100 cm/s, elle exerce sur la plaque B immobile une force de frottement $F=0.02N$, les vecteurs vitesses et forces sont parallèles.

- Calculer le coefficient de la viscosité dynamique η , en précisant éventuellement l'unité dans le système international MKSA et dans le système CGS
- Donner la signification des paramètres résultants de cette définition.
- Définir η , dans le cas d'un tube cylindrique de rayon R et de longueur L (sans faire les calculs).

Corrigé

Calculer le coefficient de la viscosité dynamique η .

$$\bullet \quad \eta = \frac{F}{S} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta v}$$

Application numérique

$$\left. \begin{array}{l} \Delta y = 10^{-3} \text{ m} \\ S = 10^{-2} \text{ m}^2 \\ F = 0.02 \text{ N} \\ \Delta v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta = \frac{0.02 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad \text{ou} \quad \text{Poiseuille (Pl)} \quad (\text{MKSA})$$

En CGS : $\eta = 2 \cdot 10^{-1}$ Poise

1Pl = 10 Poise

•

Δy : distance entre les deux lames

S: surface commune aux deux lames

Δv : vitesse relative d'une lame par rapport à l'autre

$\frac{\Delta v}{\Delta y}$: gradient de vitesse

Exemple 02: ATTENTION !!

Dans le cas d'un tube cylindrique de rayon R et de longueur L , la section latérale S est $S=2\pi RL$

Ordres de grandeur : la viscosité dynamique varie fortement avec la température (elle diminue lorsque la température augmente). Plus la viscosité est grande plus il s'écoule difficilement.

Fluide	η (Pa·s)
eau (0 °C)	$1,787 \times 10^{-3}$
eau (20 °C)	$1,002 \cdot x 10^{-3}$
eau (100 °C)	$0,2818 \cdot x 10^{-3}$
huile d'olive (20 °C)	$\approx 100 \cdot x 10^{-3}$
glycérol (20 °C)	$\approx 1,0$
H ₂ (20 °C)	$0,860 \cdot x 10^{-5}$
O ₂ (20 °C)	$1,95 \cdot x 10^{-5}$

5 Différents régimes d'écoulement

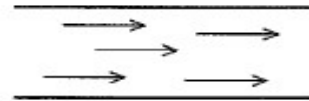
Soit un liquide visqueux de viscosité η , masse volumique ρ , traversant un tube cylindrique de rayon r à une vitesse moyenne \bar{v} .

Le type du régime d'écoulement du fluide dans la conduite cylindrique est défini selon sa vitesse.

5.1 Régime laminaire : C'est un régime **stable**, il se manifeste à des « Vitesses très faibles » sa viscosité est élevée

Caractérisations

- Silencieux.
- Des lames de liquide glissent les unes sur les autres.
- Vitesse d'écoulement est **parallèles** et dans une seule direction.



5.2 Régime turbulent : C'est un régime Bruyant. Il se manifeste à des « Vitesses plus élevées ». Sa viscosité est FAIBLE

Caractérisé par

- Présence des tourbillons dans le fluide
- Agité
- Vitesse et direction quelconques



5.3 Régime transitoire (intermédiaire) : C'est une transition entre les deux régimes.

C'est un régime **instable**.

6 Prévoir le type d'écoulement

Par définition, Le nombre de Reynolds (N_R) est le rapport entre les forces d'inertie (Force qui subirait le fluide s'il était parfait) et les forces visqueuses.

$$N_R = \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces visqueuses}}$$

Quand $N_R \ll 1$, la force visqueuse est dominante

Quand $N_R \gg 1$, la force d'inertie est dominante

Cela étant dit, Aux faibles valeurs N_R , c'est la force visqueuse qui l'emporte (domine), le régime de l'écoulement est dit stable. Celui-ci devient instable voire turbulent lorsque N_R augmente. Ainsi, d'une façon générale, on peut dire, que la viscosité permet de stabiliser et régulariser les écoulements.

Les expériences ont montré que les conditions dans lesquelles le régime d'écoulement d'un liquide se modifie, font appel à quatre variables qui participent à la définition du régime d'écoulement qui sont :

$$\left. \begin{array}{l} \eta : \text{la viscosité dynamique du liquide (Pa. s)} \\ \bar{v} : \text{vitesse moyenne d'écoulement d'un liquide en } \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \mathbf{d} : \text{diamètre du tuyau cylindrique (conduite), en (m)} \\ \rho : \text{masse volumique } \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \end{array} \right\}$$

Le nombre de Reynolds (N_R), est défini par :

$$N_R = \frac{\rho \cdot d \cdot \bar{v}}{\eta}$$

Autre définition de (N_R),

comme, $\eta = \mathbf{v} \cdot \rho$

$$\Rightarrow N_R = \frac{d \cdot \bar{v}}{\nu}$$

avec, ν : Viscosité cinématique du liquide en $m^2 s^{-1}$

✓ Le nombre de Reynolds (N_R), est une grandeur physique sans dimension

η : en (Pa.s) c'est la viscosité dynamique du liquide

\bar{v} en $\frac{m}{s}$ est la vitesse moyenne d'écoulement d'un liquide

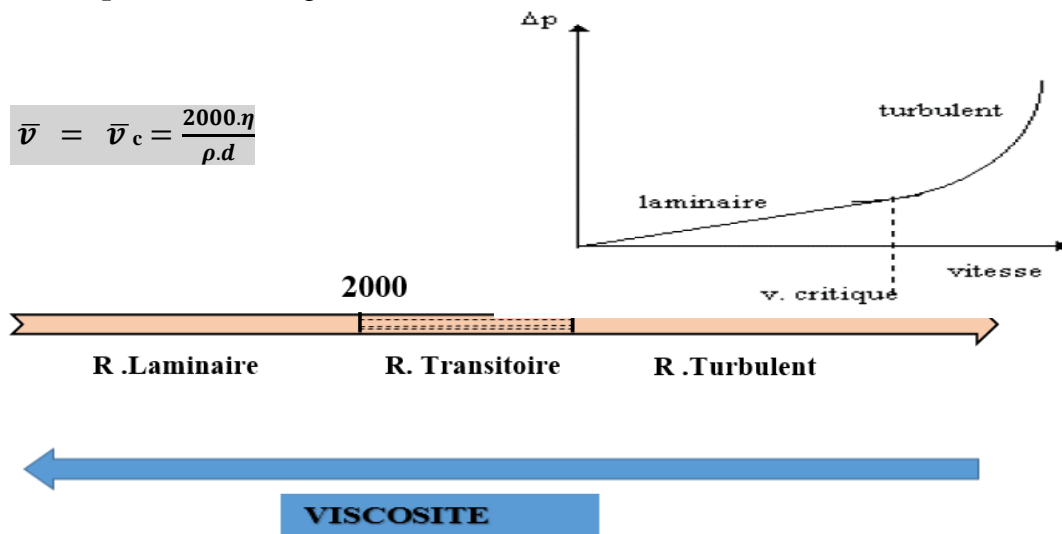
d en (m) est le diamètre du tuyau cylindrique (conduite).

ρ en $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$ est la masse volumique

$N_R < 2000$	régime laminaire (stable)
$2000 < N_R < 3000$	régime transitoire (instable)
$N_R > 3000$	régime turbulent

À la limite supérieure du régime laminaire, ($N_R = 2000$), la vitesse d'écoulement atteint une valeur dite critique, au-dessus de laquelle, le régime initialement laminaire « stable » bascule, et devient instable voire turbulent. La valeur critique de la vitesse est notée par \bar{v}_c , appelée « vitesse critique ». Elle est égale:

$$\bar{v} = \bar{v}_c = \frac{2000 \cdot \eta}{\rho \cdot d}$$



Résumé :

- La viscosité agit en sens inverse de la vitesse « le régime sera d'autant plus turbulent que la viscosité sera plus faible où la " fluide" du liquide augmente.

7 Ecoulement Poiseuille ou laminaire- Loi de Poiseuille

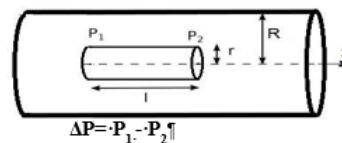
L'écoulement de Poiseuille est observé dans une conduite cylindrique de rayon r (relativement petit) avec une viscosité non négligeable. Cet écoulement est caractérisé comme étant laminaire.

7.1 Loi de Poiseuille

Considérons un tube très fin de rayon (r) et de longueur (l) situé sur l'axe central d'une conduite cylindrique. Dans un régime permanent, les forces agissant sur le tube sont, les forces motrices résultant de la perte de charge ΔP entre les points (1) et (2) ainsi que les forces visqueuses.

- **Forces motrice** due à la différence de pression : (s est section droite) de la conduite.

$$F_m = (P_1 - P_2) \cdot s = \Delta P \times (\pi r^2)$$



- **Force de frottement (Stocks)** : (surface latérale = $2 \pi r l$)

$$F_s = \eta \cdot s \frac{dv}{dr} = \eta \cdot (2\pi r l) \frac{dv}{dr}$$

Projection / x : $F_m = F_s \rightarrow \Delta P \times (\pi r^2) = -\eta \cdot (2\pi r l) \frac{dv}{dr}$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta l} r \rightarrow dv = -\frac{\Delta P}{2\eta l} r dr \xrightarrow{\text{intégration}} v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta l} r^2 + cst \quad (*)$$

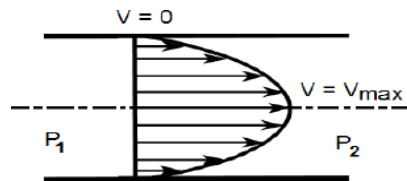
Conditions aux limites : La vitesse au contact des parois ($r = R$) du cylindre est nulle. On écrit,

$$v(R) = 0 = -\frac{\Delta P}{4\eta l} R^2 + cst \Rightarrow cst = \frac{\Delta P}{4\eta l} R^2$$

On remplace dans (*), ainsi :

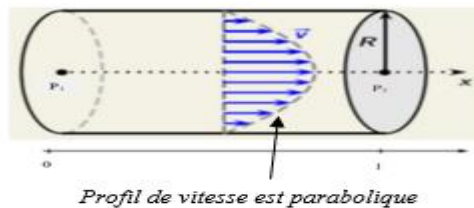
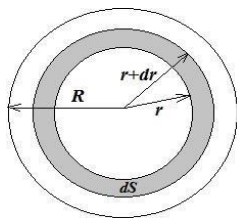
$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta l} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta P \cdot R^2}{4\eta l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = v_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Dans l'écoulement de Poiseuille, le liquide présente des vitesses parallèles à l'axe central de la conduite. La vitesse atteint son maximum au centre de la conduite (l'axe du tube) et diminue progressivement à mesure que l'on se rapproche des parois, où elle s'annule au contact. Cela donne lieu à un profil de vitesse parabolique.



L : longueur de la conduite (m) entre les points 1 et 2

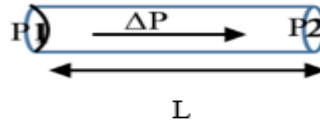
R : rayon intérieur de la conduite (m)



$$\begin{cases} (r = 0) \Rightarrow v_{max} = \frac{\Delta P}{4\eta \cdot L} R^2 & \text{à l'axe du tuyau} \\ (r = R) \Rightarrow v(r) = 0 & \text{à la paroi de tube} \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

$\Delta P = P1 - P2$: La chute de pression entre les extrémités de la conduite de longueur L

Unité :Pascal



$\frac{\Delta P}{L}$ est appelé : *gradient de pression*.

Ainsi, de (1), la chute de pression est :

$$\Delta P = \frac{4 \cdot \eta \cdot L \cdot v_{max}}{R^2} \quad \text{Appelée LOI DE POISEUILLE(2)}$$

a- L'expression de ΔP en fonction de la vitesse moyenne \bar{v} s'écrit :

Sachant que :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v} = \frac{v_{max} - v_{min}}{2} = \frac{v_{max}}{2} \\ v_{min} = 0 \frac{m}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Delta P = \frac{8 \cdot \eta \cdot L \cdot \bar{v}}{R^2} \dots\dots\dots (3)$$

b- L'expression de ΔP en fonction du débit volumique (Q_V), s'écrit :

Nous rappelons que le débit volumique à travers un tube cylindrique de rayon R est :

$$Q_V = S \cdot \bar{v} \Rightarrow \bar{v} = \frac{Q_V}{S}$$

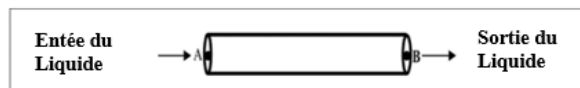
On remplace dans (3), on obtient :

$$\Delta P = \frac{8 \cdot \eta \cdot L \cdot Q_V}{\pi R^4} \dots\dots\dots (4)$$

Exemple d'application 01:

Soit un segment d'une conduite de forme cylindrique de 5 cm de long et de 2 cm de diamètre parcouru par un liquide de viscosité $\eta = 0,03$ Poises. La perte de charge ΔP entre les deux extrémités du segment A et B est égale à 0.05 mm de mercure.

1. On suppose que l'écoulement du liquide obéit à la loi de Poiseuille. Calculer le débit en litres par minute.
2. Calculer la pression P_B à l'extrémité B du segment, si la pression à l'entrée A est $P_A = 8 \text{ Pa}$.
3. Calculer la vitesse moyenne d'écoulement (\bar{v}) du liquide. Déduire la vitesse maximale v_{\max} .
4. Représenter sur le segment, l'allure de la vitesse d'écoulement du liquide. Expliquer.
On donne : 760 mm de mercure (mm Hg) correspondent à $1,013 \cdot 10^5$ Pascal.



Corrigé :

1. Le débit volumique

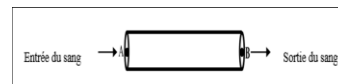
$$\left. \begin{aligned} D_V &= \frac{\pi r^4 \cdot \Delta P}{8 \eta L} \\ r^4 &= \frac{d^4}{16} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_V = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot \Delta P}{128 \cdot \eta \cdot L}$$

Application numérique:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s ou Pl} \\ L &= 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \Delta P &= 0,05 \text{ mmHg} = 6.66 \text{ Pa} \\ 1 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} &= 6 \cdot 10^4 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_V = 1,74 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 10,44 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1}$$

2. Calculer la pression P_B à l'extrémité B du segment, si la pression à l'entrée A est $P_A = 8 \text{ Pa}$.

ΔP : La perte de charge entre les deux extrémités du segment A et B.



$$\left. \begin{aligned} \Delta P &= P_A - P_B \Rightarrow P_B = P_A - \Delta P \dots \dots \dots \\ P_A &= 8 \text{ Pa} \\ \Delta P &= 0,05 \text{ mmHg} = 6.66 \text{ Pa} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_B = 1,34 \text{ Pa}$$

3. Calculer la vitesse moyenne d'écoulement du liquide (\bar{v}).

$$\left. \begin{aligned} D_V &= \frac{\pi r^4 \cdot \Delta P}{8 \eta L} = S \cdot \bar{v} \dots \\ S &= \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \dots \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{v} = \frac{r^2 \cdot \Delta P}{8 \cdot \eta \cdot L} = \frac{d^2 \cdot \Delta P}{32 \cdot \eta \cdot L} \dots \dots \dots$$

Application numérique:

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s ou Pl} \\ L = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \Delta P = 0,05 \text{ mmHg} = 6,66 \text{ Pa} \\ d = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{v} = 0,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 56 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \dots \dots$$

3.b. Dédire la vitesse maximale (v_{max})

$$v_{max} = 2 \cdot \bar{v}$$

$$v_{max} = 1,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 112 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Représenter sur le segment, l'allure de la vitesse d'écoulement du liquide. Expliquer.

➤ La loi de Poiseuille impose que :

- La vitesse sur l'axe de la conduite (tube) est maximale.
 - la vitesse sur la paroi de la conduite, est nulle.
- } d'où, un profil des vitesses parabolique

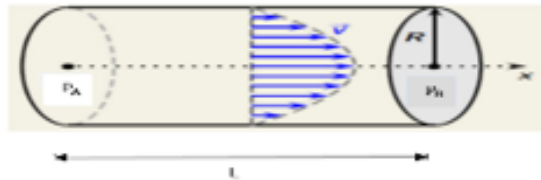


Fig : Profil des vitesses en écoulement Poiseuille

Exemple d'application 02:

Le rayon d'une artère de longueur L est réduit de deux tiers par une accumulation importante de cholestérol. Si la perte de charge ΔP_0 est la différence de pression aux bords de cette artère lorsqu'elle est saine (sans cholestérol).

- Déterminer la surpression que doit créer le cœur afin de garder le même débit sanguin dans l'artère après son rétrécissement.

Corrigé

- Déterminer la pression que doit créer le cœur afin de garder le même débit sanguin dans l'artère après son rétrécissement

Loi de Poiseuille :

$$\left. \begin{array}{l} \text{artère Seine} \rightarrow Q_V = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \Delta P_0}{8 \eta L} \\ \text{artère retrécie} \rightarrow Q_V = \frac{\pi \cdot \left(\frac{R}{3}\right)^4 \cdot \Delta P}{8 \eta L} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta P = 81 * \Delta P_0$$

Le cœur d'un sujet malade se fatigue pour maintenir la circulation sanguine.

8 Analogie entre la conduction du courant dans un circuit électrique et l'écoulement sanguin (vasculaire)

Il est possible de trouver une analogie entre la résistance électrique d'un fil cylindrique lorsqu'il est parcouru par un courant électrique (loi d'Ohm) et la résistance à l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique.

8.1 Loi d'Ohm :

$$\Delta V = R \cdot I$$

C'est la variation du potentiel électrique entre les points 1 et 2. ou la chute de tension

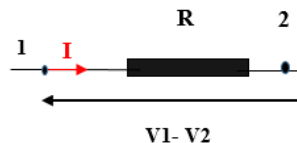
$$\Delta V = V_1 - V_2 = R \cdot I \quad (1)$$

ΔV : variation potentiel électrique entre les points 1 et 2

R : résistance électrique

I : courant électrique

$$I = \frac{dq(\text{quantité de la charge électrique})}{dt (\text{temps de parcours})}$$



8.2 Loi de Poiseuille :

$$\Delta P = \frac{8 \cdot \eta l}{\pi \cdot R^4} \cdot Q_V$$

La loi de Poiseuille –débit volumique) exprime la variation de débit en fonction des résistances à l'écoulement.(résistance vasculaire)

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8 \cdot \eta l}{\pi \cdot R^4} \cdot Q_V \quad \dots \dots \dots (2)$$

Par identification entre l'équation (1) et (2), on trouve que,

- La perte de charge (Δp) joue le rôle équivalent à la différence de potentiel dans un circuit électrique

-Le débit volumique (Q_V) joue un rôle équivalent à celui de l'intensité du courant électrique.

D'où, le terme

Circuit électrique	Ecoulement Poiseuille
ΔV	ΔP
I	Q_V
R	$\frac{8.\eta l}{\pi.R^4} = Rec$

❖ **Resistance vasculaire**

$\left(\frac{8.\eta l}{\pi.R^4}\right)$: *équivalent* à *une* résistance (dans la loi de poiseuille – débit volumique).

En hémodynamique, ce terme $\left(\frac{8.\eta l}{\pi.R^4}\right)$ est appelé résistance vasculaire. C'est l'ensemble des forces qui s'opposent au débit sanguin.

$$R_{ec} = \frac{8.\eta l}{\pi.R^4} \quad (*)$$

$$\Delta P = R_{ec} \cdot Q_V$$

Remarque :

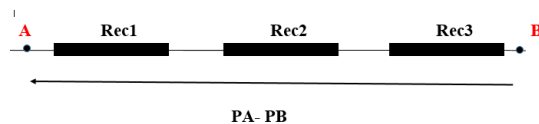
L'expression (*) stipule que dans les gros vaisseaux sanguins, il n'y a presque aucune résistance alors que dans les artérioles et les capillaires, la résistance est plus importante

Dans un circuit électrique, les résistances électriques peuvent être placées en série ou en parallèles.

En suivant la même logique, Les lois utilisées pour les résistances électriques s'appliquent également aux résistances à l'écoulement

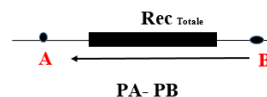
✓ **Montage des résistances en Série**

n : nombre de résistances



$$R_{ec\ Total} = \sum_{i=1}^n R_{eci}$$

$$R_{ec\ Total} = Rec1 + Rec2 + Rec3$$



❖ **Puissance électrique**

Comme c'est le cas pour la puissance électrique, Dans le corps humain, il est possible d'établir la puissance développée par le cœur pour conserver l'écoulement du sang dans l'artère.

L'expression la puissance est définie par :

$$P_{uis} = \frac{W}{t} = \frac{F.l}{t} = \frac{\Delta P.S.l}{t} = \Delta P.S.\bar{v}$$

$$P_{uis} = \Delta P. D_V$$

Exemple :

✓ **Montage des résistances en série**

La chute (perte) de Pression entre A et B est :

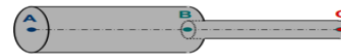
$$\Delta P_{Ac} = \Delta P_{AB} + \Delta P_{BC}$$

$$\Delta P_{Ac} = R_{AB} \cdot Q_V + R_{AC} \cdot Q_V$$

$$= Q_V(R_{AB} + R_{AC}) \quad \text{car, le débit } Q_V \text{ est constant}$$

$$\Delta P_{Ac} = Q_V \cdot Rec$$

$$Rec = R_{AB} + R_{AC} \quad (\text{résistance équivalente})$$

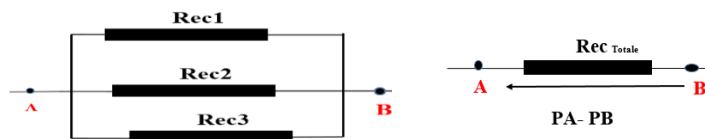


✓ **Montage des résistances en parallèles**

Dans le corps humain, , il faut alors prendre en compte des résistances de chaque conduite (on simplifie généralement en considérant qu'elles sont identiques) pour calculer la résistance totale (R_{tot}).

$$Rec \text{ Totale} = \sum_{i=0}^3 \left(\frac{1}{Rec_i} \right)$$

$$Rec \text{ Totale} = \frac{1}{Rec_1} + \frac{1}{Rec_2} + \frac{1}{Rec_3}$$

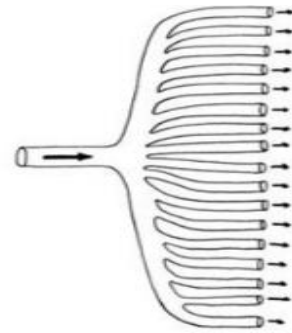


Dans le corps humain : on simplifie généralement en considérant qu'elles sont identiques pour calculer la résistance totale (R_{tot}).

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Puisque $R_1=R_2=\dots=R_n$

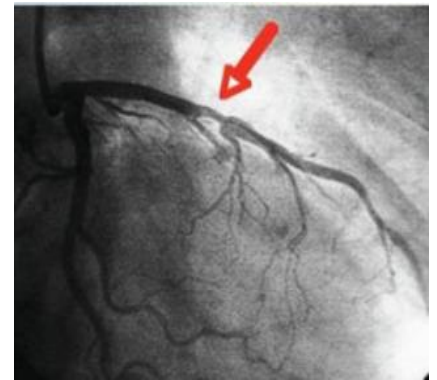
$$\frac{1}{R_t} = \frac{n}{R_1} \rightarrow R_t = \frac{R_1}{n}$$



Cas d'application : corps humain

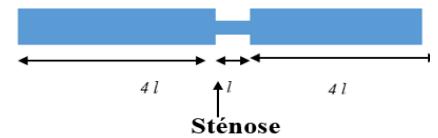
On s'intéresse à la chute de pression de part et d'autre d'un système constitué de 9 conduites (capillaires) en séries, dans deux cas de figures :

- 1- Un sujet sain : les 9 capillaires identiques de rayon r , $r=\text{constant}$)
- 2- Sujet malade (présentant une sténose) :
Les capillaires identiques sont en nombre de 8 (de rayon r et longueur l), un seul capillaire est de rayon $r'=r/2$, longueur l .



• **Résistance à l'écoulement :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour un sujet Sain : } Rec = \frac{8.\eta l}{\pi.r^4} \\ \text{Pour un sujet présentant une sténose: } R'ec = \frac{8.\eta l}{\pi.r'^4} \Rightarrow \\ \frac{R'ec}{Rec} = \left(\frac{r}{r'}\right)^4 = 16 \end{array} \right.$$



• **Résistance totale :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour un sujet Sain} \rightarrow Rec(\text{tot}) = 9 Rec \\ \text{sujet présentant une sténose:} \rightarrow R'ec(\text{tot}) = 4 Rec + R'ec + 4 Rec = 24 Rec \end{array} \right.$$

• **Perte de charge : $\Delta P = P_{entrée} - P_{sortie}$**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour un sujet Sain} : \Delta P = Rec(\text{tot}). Q_V = 9. Rec. Q_V \\ \text{Pour un sujet présentant une sténose:} \Delta P' = R'ec(\text{tot}). Q_V = 24. Rec. Q_V \end{array} \right.$$

Nous rappelons :

$$\Delta P = \frac{8 \cdot \eta \cdot l \cdot \bar{v}}{R^2}$$

Remarque

En cas de sténose, la perte de charge augmente, ce qui conduit à une augmentation de la vitesse locale (étant donné que le débit reste constant). Cette augmentation de la vitesse favorise une turbulence au niveau de la sténose sous forme des vibrations (La vibration est palpable).

Résumé : -Loi de Poiseuille-

La Loi de Poiseuille s'applique aux fluides en écoulement en régime laminaire, notamment dans le cas d'un liquide newtonien caractérisé par une viscosité constante. Selon cette loi :

- ✓ La vitesse du fluide atteint un maximum à l'axe central du tuyau.
- ✓ La vitesse décroît progressivement à mesure que l'on s'approche des parois du tuyau.

Cette variation de vitesse conduit à la formation d'un profil de vitesses parabolique. Ce phénomène peut être expliqué par la friction du fluide contre les parois du tuyau, ce qui entraîne une diminution de la vitesse aux parois. La Loi de Poiseuille permet de comprendre les caractéristiques de l'écoulement des fluides, tels que la circulation sanguine ou le transport de liquides dans des conduites.

9 Techniques de mesure de la viscosité dynamique :

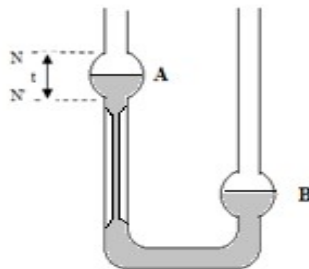
Il existe différentes méthodes pour mesurer la viscosité des liquides. Les instruments utilisés sont appelés viscosimètres.

Qui sont :

- Viscosimètre à capillaire (Viscosimètre d'Oswald)
- Viscosimètre de Hoppler à chute de bille (Stokes)
- Viscosimètre à cylindre rotatif (ou de Couette)

9.1 Viscosimètre d'Ostwald -méthode est Basée sur la loi de Poiseuille-

Le viscosimètre d'Ostwald est un viscosimètre à capillaire. Il est composé d'un tube en U à rayon très fin (r) bien calibré et un réservoir (A) de volume (V) portant deux repères N1 et N2.



Cet appareil permet de donner une mesure relative des viscosités à partir d'une simple mesure du temps de vidange du réservoir (A). Pour cela, on chronomètre le temps de vidange du réservoir (A), c.-à-d., le temps que met le liquide pour descendre du niveau N au niveau N' est chronométré.

Le liquide dans le réservoir (A) s'écoule vers le réservoir (B) via le tube capillaire. Soit t', et t, respectivement, le temps de vidange du liquide de référence et du liquide inconnu (à étudier).

✓ **Le débit volumique en fonction du temps vidange du réservoir A, est:**

$$\left. \begin{array}{l} \text{(liquide de référence)} \rightarrow Q'_v = \frac{V}{t'} \\ \text{(liquide inconnue)} \rightarrow Q_v = \frac{V}{t} \\ \text{(V: volume du reservoir)} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{Q_v}{Q'_v} = \frac{t'}{t} \dots\dots\dots(1)$$

✓ D'autre part, en écoulement laminaire (poiseuille) le débit volumique dans le tube capillaire de longueur L et de rayon r est:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{(liquide de référence)} \rightarrow Q'_V = \frac{\pi r^4 \cdot \Delta P'}{8 \eta' L} \\
 \text{(liquide inconnue)} \rightarrow Q_V = \frac{\pi r^4 \cdot \Delta P}{8 \eta L} \\
 \Delta P = \rho g \cdot L \\
 \Delta P' = \rho' g \cdot L
 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{Q_V}{Q'_V} = \frac{\Delta P}{\Delta P'} * \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\rho}{\rho'} * \frac{\eta'}{\eta} \dots \dots \dots (2)$$

$\Delta P'$ et ΔP : la *pression hydrostatique dans le tube capillaire du liquide*

(1) = (2), on déduit la viscosité du liquide inconnue:

$$\frac{t'}{t} = \frac{\rho}{\rho'} * \frac{\eta'}{\eta} \Rightarrow \eta = \frac{t}{t'} * \frac{\rho}{\rho'} * \eta' \dots \dots \dots (3)$$

Autre méthode:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{(liquide de référence)} \rightarrow Q'_V = \frac{\pi r^4 \cdot \Delta P'}{8 \eta' L} \Rightarrow \eta' = \frac{\pi r^4 \cdot \Delta P'}{8 \cdot Q'_V \cdot L} = \frac{g \cdot \pi r^4}{8 \cdot V} \cdot \rho' \cdot t' = K \cdot \rho' \cdot t' \\
 \text{avec } \Delta P' = \rho' g \cdot L \\
 \text{et } Q'_V = \frac{V}{t'} \\
 K = \frac{g \cdot \pi r^4}{8 \cdot V} \\
 \\
 \text{(liquide inconnue)} \rightarrow Q = \frac{\pi r^4 \cdot \Delta P}{8 \eta L} \Rightarrow \eta = \frac{\pi r^4 \cdot \Delta P}{8 \cdot Q_V \cdot L} = \frac{g \cdot \pi r^4}{8 \cdot V} \cdot \rho \cdot t = K \cdot \rho \cdot t \\
 \\
 \Delta P = \rho g \cdot L \\
 Q_V = \frac{V}{t}
 \end{array} \right\}$$

$K = \frac{g \cdot \pi r^4}{8 \cdot V}$: une constant caractéristique du viscosimètre utilisé.

Elle est donnée par le constructeur).

D'où, les expressions simplificatrices,

$$\left. \begin{array}{l} (\text{liquide de référence}) \rightarrow \eta' = K \cdot \rho' \cdot t' \dots \dots (4). \\ (\text{liquide inconnue}) \rightarrow \eta = K \cdot \rho \cdot t \dots \dots (5) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\rho' \cdot t'}{\rho \cdot t} \Rightarrow$$

$$\eta = \frac{t}{t'} \cdot \frac{\rho}{\rho'} \cdot \eta' \dots (6)$$

À retenir

1 -L'application de l'équation de Poiseuille permet de déduire l'expression du le coefficient de viscosité η en fonction :

- Du temps de vidange du réservoir (A) à travers le tube capillaire, et la masse volumique du liquide (en utilisant l'équation 4 et 5).

2 - Le viscosimètre d'Oswald donne **une mesure relative** de la viscosité en fonction du temps de vidange (en utilisant l'équation 3 ou 6).

3- On peut facilement trouver la valeur de la viscosité η du liquide à partir de l'expression suivante : $\eta = K \cdot \rho \cdot t$ avec $K = \frac{g \cdot \pi r^4}{8 \cdot V}$.

Lorsque la constante K est donnée par le constructeur, c-à-d, le rayon du tube capillaire r et le volume du réservoir V sont connus.

4- Dans le cas où cette donnée (K) n'est pas donnée, il est possible de déduire η en utilisant un liquide de référence préalablement connue (η', ρ') .

Exemple1

Le butanol parcourt le tube capillaire d'un viscosimètre d'Oswald en 464.4 s à 20 °C, l'eau parcourt le même volume en 128.4s. Quelle sera la viscosité du butanol à 20 °C si on donne $\rho_{\text{but}}(20\text{ °C}) = 0.80961\text{ g/ml}$?

on donne : $\rho_{\text{eau}}^{20\text{ °C}} = 0,9982\text{ g/cm}^3$ et $\eta_{\text{eau}}^{20\text{ °C}} = 1,005\text{ centipoise}$

Solution :

La loi de poiseuille nous a conduits à la relation suivante :

$$\eta = \eta_0 \frac{t \rho}{t_0 \rho_0} = 1,005 \frac{464,4 \times 0.80961}{128,4 \times 0,9982} = 2,95$$

$$\eta = 2,95\text{ centipoise}$$

9.2 Viscosimètre de Hoppler (à chute de bille) – sédimentation (Loi de Stokes)

Le viscosimètre de Hoppler appelé également à chute de bille, est basé sur la mesure du temps de chute d'une bille sphérique. La chute se fait dans un tube cylindrique bien calibré renfermant (contenant) le liquide visqueux.

Sous l'effet de la gravité, la vitesse de la bille (v) augmente progressivement jusqu'à atteindre, après un parcours de quelques centimètres, une vitesse limite (v_{lim} ou v_{max}) appelée également vitesse de sédimentation, avec laquelle elle va poursuivre sa chute.

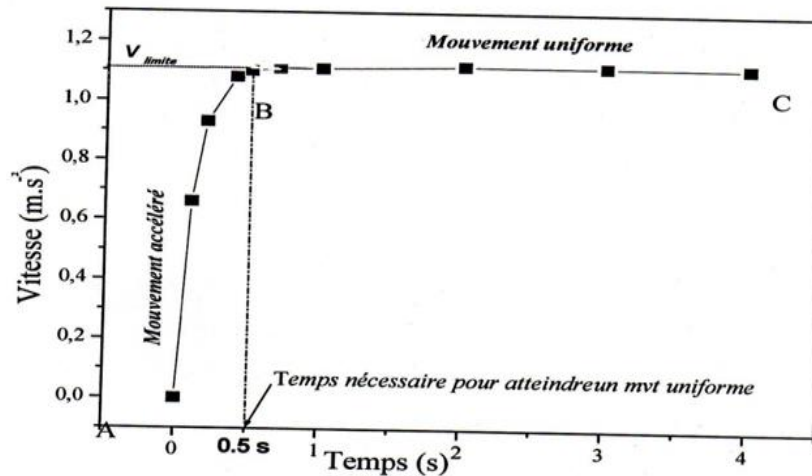


Figure : Vitesse de chute d'une bille dans un liquide visqueux vs le temps

L'allure de la courbe de vitesse (v) (instantanée) en fonction du temps (t), montre que, le mouvement de la bille est initialement accéléré, suivi par un mouvement rectiligne uniforme où la vitesse est constante est égale à v_{lim} .

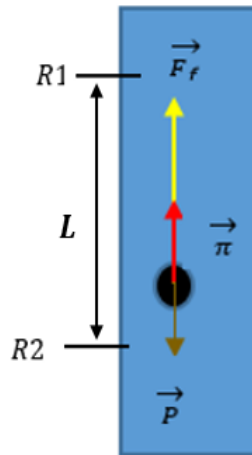
On s'intéresse au régime permanent, où le mouvement de la bille entre les repères R1 et R2, est rectiligne uniforme: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow v = v_{lim}$ (voir figure).

$$\sum \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

La bille est soumise à trois forces :

- ✓ Le poids de la bille : $P = m \cdot g = \rho_{bille} \cdot V_{bille} \cdot g$
 V : volume de la bille ($V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$) et g : gravitation terrestre
- ✓ Poussée d'Archimède : $\pi = \rho_{liq} \cdot g \cdot V_{bille} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_{liqui} \cdot g$
- ✓ La force de viscosité du liquide exprimée par la loi de Stokes :
 $F_v = f \cdot v_{lim} = 6\pi\eta \cdot r \cdot v_{lim}$ (stokes)

Stokes : considère la bille est de forme sphérique d'où Le coefficient de frottement : $f = 6\pi\eta.r$
 v_{lim} : la vitesse limite de la bille dans le liquide visqueux.



$$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{F}_v = \vec{0}$$

Après projection sur l'axe vertical

$$P - \pi - F_v = 0 \Rightarrow P - \pi = F_v$$

$$V_{bille} \cdot (\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \cdot g = F_v \dots \dots \dots (1)$$

$$F_v = f \cdot v_{lim} = 6\pi\eta.r \cdot v_{lim} \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{de (1) et (2)} \Rightarrow v_{limite} = \frac{2 \cdot (\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \cdot g \cdot r^2}{9 \cdot \eta_{liquide}}$$

Cette vitesse limite est également appelée vitesse de sédimentation :

$$v_{sédimentation} = v_{limite} = \frac{2 \cdot (\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \cdot g \cdot r^2}{9 \cdot \eta_{liquide}}$$

Sachant que, le mouvement étant rectiligne uniforme : $v_{limite} = \frac{L}{t}$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{limite} = \frac{2 \cdot (\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \cdot g \cdot r^2}{9 \cdot \eta_{liquide}} \\ v_{limite} = \frac{L}{t} \end{array} \right. \Rightarrow \eta_{liquide} = \frac{2 \cdot (\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \cdot g \cdot r^2}{9 \cdot L} \cdot t = k \cdot t$$

Avec : $k = \frac{2 \cdot (\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \cdot g \cdot r^2}{9 \cdot L}$ (dépend du liquide utilisé)

À retenir :

- En mouvement rectiligne uniforme, la particule est soumise à la force visqueuse (de frottement) équivalente à la force de sédimentation ($F_v = F_s$) où,

$$F_{séd} = P - \pi = V_{bille} \cdot (\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \cdot g$$

$$F_v = V_{bille} \cdot (\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \cdot g$$

(F_s :force de sédimentation,
la vitesse limite est appelée vitesse de sédimentation.

$$v_{sédimentation} = v_{limite} = \frac{2 \cdot (\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \cdot g \cdot r^2}{9 \cdot \eta_{liquide}}$$

- La viscosité dynamique d'un liquide est proportionnelle au temps de chute de la bille).
- La Sédimentation est un processus, qui a tendance à concentrer les molécules au fond du récipient

Exemple 01: Sédimentation (application de la loi de Stokes)

Le sang étant une suspension de globules rouges supposés sphériques dans le plasma, quel est le rayon moyen des globules rouges sachant que la vitesse de sédimentation est de 4,14 mm/heure et leur densité est de 1,1 ? On donne :

$$d_{plasma} = 1,02$$

$$\eta_{pl} = 1.082 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$$

Solution :

$$v_{séd} = \frac{2 \cdot (\rho_{GR} - \rho_{plasma}) \cdot g \cdot r^2}{9 \cdot \eta_{plasma}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9 \cdot \eta_{pl} \cdot v_{séd}}{2 \cdot g \cdot (\rho_{GR} - \rho_{plasma})}}$$

Application numérique:

$$r = \sqrt{\frac{9 \cdot 1.082 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4.14 \cdot 10^{-3}}{3600}}{2 \cdot 10 \cdot (1100 - 1020)}} = 2.64 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2.64 \text{ } \mu\text{m}$$

Exemple 02: Sédimentation (application de la loi de Stokes)

On mesure le temps de chute d'une bille d'aluminium de densité

$d_{bille} = 2.7$ entre deux graduations d'un viscosimètre, dans deux liquides différents.

dans l'eau à $T = 20^\circ C \rightarrow \eta_{eau} = 10^{-3} Pl \rightarrow t_0 = 40 s$

dans le plasma à $T = 20^\circ C \rightarrow d_{pl} = 1.02 \rightarrow t = 43.8 s$

Quelle est la viscosité du plasma ?

Solution :

✓ la vitesse de sédimentation de la bille $\left\{ \begin{array}{l} \text{dans l'eau: } v_{eau} = \frac{L}{t_0} \\ \text{dans le plasma: } v_{pl} = \frac{L}{t} \end{array} \right.$

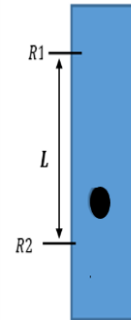
Le rapport des vitesses :

$$\frac{v_{eau}}{v_{pl}} = \frac{t_{pl}}{t_{eau}} \dots\dots (1)$$

✓ La vitesse de sédimentation (vitesse limite de chute) de la bille dans un liquide visqueux (Loi de STOCKES) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{dans l'eau} \rightarrow v_{sed \text{ bille dans(eau)}} = \frac{2.g.(\rho_{bille} - \rho_{eau}).r^2}{9.\eta_{eau}} \\ \text{dans le plasma} \rightarrow v_{séd (pl)} = \frac{2.g.(\rho_{bille} - \rho_{pl}).r^2}{9.\eta_{pl}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v_{eau}}{v_{pl}} = \frac{(\rho_{bille} - \rho_{eau})}{(\rho_{bille} - \rho_{pl})} \cdot \frac{\eta_{pl}}{\eta_{eau}} \dots\dots (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \frac{t_{pl}}{t_{eau}} = \frac{(\rho_{bille} - \rho_{eau})}{(\rho_{bille} - \rho_{pl})} \cdot \frac{\eta_{pl}}{\eta_{eau}} \Rightarrow \eta_{pl} = \frac{t_{pl}}{t_{eau}} \cdot \frac{(\rho_{bille} - \rho_{pl})}{(\rho_{bille} - \rho_{eau})} \cdot \eta_{eau}$$



Application numérique:

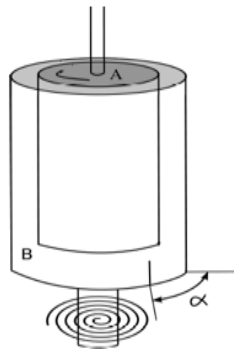
$$\left. \begin{array}{l} t_{eau} = 40s \\ t_{pl} = 43.8 s \\ \rho_{eau} = 10^3 \text{ Kg. m}^{-3} \\ \rho_{pl} = 1.02 * 10^3 \text{ Kg. m}^{-3} \\ \rho_{bille} = 2.7 * 10^3 \text{ Kg. m}^{-3} \\ \eta_{eau} = 10^{-3} \text{ Pa.s} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta_{pl} = 1.082 * 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

9.3 Viscosimètre rotatif ou viscosimètre de Couette

Viscosimètre de Couette comporte un cylindre plein (A) tourne à vitesse constante dans un liquide contenu dans un récipient cylindrique (B) ; celui-ci, mobile autour de son axe de révolution, est entraîné par le liquide. Un ressort, exerçant un couple de torsion après avoir tourné d'un angle α , retient (B) en équilibre.

On montre que la viscosité dynamique η est proportionnelle à l'angle α :

$$\eta = K \cdot \alpha$$



10 Ultracentrifugation

Pour les macromolécules sphériques ayant un rayon de 100 Å (Angströms), ce qui équivaut à 10^{-8} mètre ($1 \text{ Å} = 10^{-10}$ mètre), la vitesse de sédimentation est généralement extrêmement faible, ce qui complique la mesure empirique en laboratoire. En théorie, une macromolécule de cette taille se déplace seulement de 20 µm en une journée. Afin d'augmenter cette vitesse de sédimentation, il devient nécessaire de substituer l'accélération gravitationnelle terrestre (g) par une accélération centrifuge (a_c). C'est ainsi que l'on obtient l'expression suivante :

$$v_{\text{séd}} = \frac{2 \cdot (\rho_{\text{macro}} - \rho_{\text{plasma}}) \cdot a_c \cdot r^2}{9 \cdot \eta_{\text{plasma}}} = \frac{2 \cdot (\rho_{\text{macro}} - \rho_{\text{plasma}}) \cdot \omega^2 \cdot x \cdot r^2}{9 \cdot \eta_{\text{plasma}}}$$



Fig : Centrifugeuse

Soit une macromolécule située à la distance "x" de l'axe de rotation, subit une **accélération centrifuge**

$$a_c = \omega^2 \cdot x$$

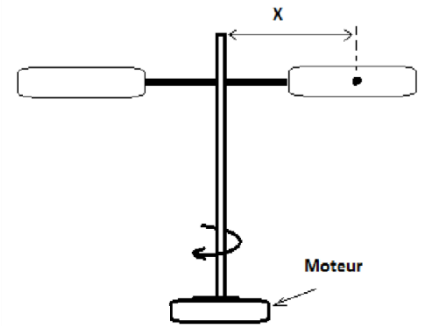
ω : la vitesse angulaire ($\omega = 2\pi N$),

N : nombre de tours/min.

Sous l'effet de cette accélération centrifuge, une macromolécule acquiert une vitesse (v), qui augmente jusqu'à atteindre une valeur limite ($v = v_{lim}$ ou v_{max}) avec laquelle la molécule va poursuivre sa centrifugation. Où son mouvement est rectiligne uniforme.

$$v = v_{lim} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \vec{0}$$

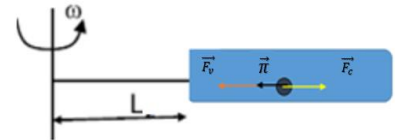
$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_c + \vec{\pi} + \vec{F}_v = \vec{0}$$



Après projection sur l'axe horizontal (ox)

$$F_c - \pi - F_v = 0$$

$$F_c - \pi = F_v$$



Ainsi, la force de frottement (F_v) est égale à la force ($F_c - \pi$).

$$\left. \begin{array}{l} \text{force de frottement : } F_v = f \cdot v_{lim} \\ \text{force centrifuge : } F_c = m \cdot a_c = m \cdot \omega^2 \cdot x \\ \text{force de Poussée : } \pi = m_0 \cdot a_c = m_0 \cdot \omega^2 \cdot x \\ a_c = \omega^2 \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow (m - m_0) \cdot a_c = f \cdot v_{lim} \dots (*)$$

$$(*) \Rightarrow V \cdot (\rho - \rho_0) \cdot a_c = f \cdot v_{lim}$$

Avec:

V : volume de la particule

masse de la particule : $m = \rho \cdot V$

masse du milieu déplacée : $m_0 = \rho_0 \cdot V$

$$\left. \begin{array}{l} f \cdot v_{lim} = V \cdot (\rho - \rho_0) \cdot a_c \\ V = \frac{m}{\rho} \\ m = \frac{M}{N_A} \\ N_A = 6.023 \cdot 10^{23} \end{array} \right\} \Rightarrow f \cdot v_{lim} = \frac{M}{N_A} \cdot \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho} \cdot a_c = \frac{M}{N_A} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \cdot a_c$$

On écrit :

$$f \cdot v_{lim} = \frac{M}{N_A} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \cdot a_c \dots \dots \dots (1)$$

On regroupe les termes relatifs à la macromolécule :

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_{lim}}{a_c} &= \frac{M}{f \cdot N_A} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \\ \frac{v_{lim}}{a_c} &= S_v \dots (2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{M}{f \cdot N_A} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) = \frac{v_{lim}}{a_c} = S_v \dots (3)$$

S_v : est appelée constante de sédimentation d'une macromolécule ou constante de **Svedberg**. Elle traduit l'équilibre de la particule dans le milieu (liquide)

et ;

$$1 \text{ Svedberg} = 1 S_v = 10^{-13} \text{ secondes}$$

▪ **Constante de Svedberg. (Sédimentation) S_v :**

$$\rightarrow S_v = \frac{v_{lim}}{a_c}$$

$$\left\{ \begin{aligned} S_v &= \frac{v_{lim}}{a_c} = \frac{dx}{dt} \\ v_{lim} &= \frac{dx}{dt} \\ a_c &= w^2 \cdot x \end{aligned} \right. \Rightarrow S_v \cdot w^2 \cdot dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} S_v \cdot w^2 \cdot dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$S_v \cdot w^2 (t_2 - t_1) = \ln \frac{x_2}{x_1}$$

$$\rightarrow S_v \cdot w^2 (t_2 - t_1) = \ln \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow S_v = \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{w^2 (t_2 - t_1)} \dots (4).$$

A partir de l'équation (3) et Eq. (4), il est possible de déduire la masse molaire de la macromolécule.

c-à-d,

$$\rightarrow \frac{M}{f \cdot N_A} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) = S_v \Rightarrow M = \frac{f \cdot S_v \cdot N_A}{1 - \frac{\rho_0}{\rho}}$$

Remarque : la constante S_v est connue pour la plupart des macromolécules, à titre d'exemple :

$$\text{Hémoglobine} : S_v = 4,40 \cdot 10^{-13} \text{ secondes}$$

$$\text{Insuline} : S_v = 3,50 \cdot 10^{-13} \text{ secondes}$$

- la constante S_v permet de déterminer la masse molaire et de séparer les mélanges.
- L'usage de la centrifugation permet de déterminer les dimensions de la particule à savoir son rayon r et ce, en suivant les étapes suivantes :

$$V. (\rho - \rho_0). a_c = f. v_{lim}$$

$$V. (\rho - \rho_0). w^2. x = 6\pi\eta. r. \frac{dx}{dt}$$

$$V = \frac{4}{3}. \pi. r^3 \text{ (volume de la particule sphérique)}$$

$$\frac{4}{3}. \pi. r^3. (\rho - \rho_0). w^2. x = 6\pi\eta. r. \frac{dx}{dt}$$

On regroupe les termes relatifs aux positions de la particule

$$\frac{4}{3}. \pi. r^3. (\rho - \rho_0). w^2. dt = 6\pi\eta. r. \frac{dx}{x}$$

$$2. r^2. (\rho - \rho_0). w^2. dt = 9\eta. \frac{dx}{x}$$

Après intégration, on trouve que:

$$2. r^2. (\rho - \rho_0). w^2. \int_{t_1}^{t_2} dt = 9\eta. \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9\eta \ln \frac{x_2}{x_1}}{2.(\rho - \rho_0)w^2(t_2 - t_1)}} = \sqrt{\frac{9\eta S_v}{2.(\rho - \rho_0)}}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} dt = \Delta t = t_2 - t_1 \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \ln \frac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

Références bibliographiques

- [1] Henri broch, “Cours de Physique, Mécanique des fluides” université Sophia Antipolis; LSV, 1^{ère} année.
- [2] I. Prigogine et R. Defay, Tension superficielle et adsorption, Desoer, Liège (1951).
- [3] G. Bognolo, Tensioactifs non ioniques Mise en œuvre industrielle. Techniques de l'ingénieur J2265 (2004).
- [4] C. Larpent, Tensioactifs. Techniques de l'ingénieur, traité constantes physicochimiques K342 : 114 (1995).
- [5] Y. Thomas, Biophysique générale, Editions Hermann (20 septembre 2000).
- [6] Y. Thomas, Biophysique des solutions, Rosny-sous-bois : Bréal, 1992.
- [7] S. Belazreg, Perdrisot, Rémy Editeur: Ediscience: 2014
- [8] MS.Maalem, « Mécanique des fluides » Exercices corrigés avec rappel de cours, tome 1 : 2000