



Université A.Mira de Béjaïa

Faculté de Technologie

Département de Génie Electrique

COURS

Traitement de signal (analogique et numérique)

Master 1 EN AUTOMATIQUE

Spécialités

AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

AUTOMATIQUE ET SYSTÈME

BELLAHSENE NOURA REZIKA

Docteur en Automatique

2021

Préface

Ce cours de traitement de signal est avant tout destiné à l'étudiant désirent maîtriser les bases du traitement de signal. Il est accessible à un étudiant de master ($M1$).

L'étudiant devra posséder un prérequis, essentiellement des bases mathématiques et des notions de la théorie du signal étudiées en licence ($L3$).

Ce cours couvre, ainsi, les aspects essentiels du traitement de signal. Il débute par une partie consacrée aux notions fondamentales : classification des signaux, séries de Fourier, transformée de Fourier, théorème de Parseval, la convolution et la corrélation.

Ensuite, la transformée de Laplace utilisée dans le filtrage analogique mais aussi dans l'étude des systèmes linéaires invariants est abordée et des applications sont données.

Le chapitre 3 expose l'analyse des filtres analogiques : analyse temporelle et fréquentielle, les filtres passifs et actifs, les filtres passe bas du premier et second ordre, les filtres passe haut du premier et second ordre et les filtres passe bande. La seconde partie introduit le traitement du signal numérique (échantillonnage des signaux, reconstruction et quantification).

La transformée de Fourier discrète (TFD), la transformée de Fourier rapide (FFT) et la transformée en Z sont exposées au chapitre 5. Le dernier chapitre est consacré à l'analyse des filtres numériques : équation de récurrence, la transmittance et structure directe et simplifiée.

L'objectif étant la maîtrise et l'application des outils de représentation temporelle et fréquentielle des signaux et systèmes analogiques et numériques, dans ce support de cours succinct, toutes les notions sont illustrées par des exemples avec solutions et à la fin, des exercices de révision sont proposés et des manipulations de travaux pratiques, parfois avec les programmes et les résultats, sont données. Il est à noter que les notions données et présentées dans ce cours sont inspirées des références citées à la fin du manuscrit.

Table des matières

1	Généralités et rappels sur les signaux	7
1	Introduction	7
2	Classification des signaux	8
3	Caractéristiques d'un signal	10
4	Signaux particuliers	12
5	Signaux usuels	13
6	Produit de convolution	16
7	Fonctions de Corrélacion	17
2	Analyse de Fourier	
	Transformée de Laplace	19
1	Analyse de Fourier	20
1.1	Développement en série de Fourier	20
1.2	Transformée de Fourier	22
1.3	Exemples de TF	24
2	Transformée de Laplace	24
2.1	Définition	25
2.2	Transformée inverse	25
2.3	Propriétés de la Transformée de Laplace	26
2.4	Résolution des équations différentielles	27
2.5	Applications de la TL	27
2.6	Transformée de Laplace et transformée de Fourier	29

3	Filtres analogiques	31
1	Introduction	31
2	Caractéristiques d'un filtre	32
3	Types de filtres	33
4	Filtres passifs	35
4.1	Filtre passif passe-bas du 1 ^{er} degré	35
4.2	Filtre passif passe-bas du 2 nd degré	37
5	Filtres actifs	37
5.1	Filtre actif passe-bas du 1 ^{er} degré	38
6	Applications	39
4	Echantillonnage et quantification	41
1	Introduction	42
2	Principe d'échantillonnage	42
3	Reconstitution du signal	43
4	Quantification	44
4.1	Définition	45
4.2	Quantification uniforme	45
5	Applications	45
5	Transformée de Fourier discrète	
	Transformée en Z	47
1	Transformée de Fourier discrète (TFD)	49
1.1	Définition de la TFD	49
1.2	Propriétés de la TFD	49
1.3	Théorème de Parseval	50
1.4	Transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform FFT)	50
2	Transformée en Z	51
2.1	Définition de la transformée en Z	51
2.2	Propriétés de la TZ	52
2.3	TZ inverse	52
2.4	Relation entre la transformée en Z et transformée de Fourier	53
2.5	Applications	53

6	Filtres numériques	55
1	Définition d'un filtre numérique	55
2	Equation récurrente d'un filtre et fonction de transfert	55
3	Filtres RIF et RII	56
4	Applications	56
5	Structures des filtres numériques	57
5.1	Structure d'un filtre RIF	57
5.2	Structure d'un filtre RII	57
5.3	Filtre moyennneur	59
5.4	Filtre du 2nd ordre	59
5.5	Structure simplifiée	59
5.6	Applications	60

Chapitre 1

Généralités et rappels sur les signaux

Sommaire

1	Introduction	7
2	Classification des signaux	8
3	Caractéristiques d'un signal	10
4	Signaux particuliers	12
5	Signaux usuels	13
6	Produit de convolution	16
7	Fonctions de Corrélation	17

1 Introduction

Un signal est une grandeur physique accessible à la mesure. On attribue à un signal des propriétés élémentaires comme l'intensité, la fréquence, la puissance, l'énergie,...

Les signaux sont traités par des fonctions mathématiques ou des systèmes et des filtres dont le but est de les modifier pour leur conférer certaines propriétés ou d'en extraire des informations, on parle alors de traitement de signal. Le traitement du signal est une discipline qui a pour objectif l'étude, la détection et l'interprétation des signaux porteurs d'informations. Elle s'appuie sur la théorie du signal qui donne une description mathématique des signaux qui fait appel à l'algèbre linéaire, l'analyse fonctionnelle et les statistiques. Les domaines d'application du traitement de signal sont très variés, on peut citer :

- Automatique (Commande(boucles fermées réalisées par échantillonnage et filtrage de signaux issus de capteurs pour contrôle de position et de vitesse), identification,)
- Les télécommunications (détection de tonalité téléphonique par numérotation multifréquences, codage de la voix et traitement de la parole, modems à débit élevé, compression de l'information)
- Les systèmes radar et sonar (trajectographie, poursuite,...)
- Les systèmes de mesure électroniques (analyseurs de spectre, oscilloscopes numériques, générateurs de signaux programmables, appareils à base de microprocesseurs)
- L'analyse sismique (recherche pétrolière, détection de séismes, analyse de structures géologiques)
- L'analyse biomédicale (électrocardiogramme et électroencéphalogramme, mesure de débits sanguins, obstétrique, tomographie et intensification d'images)

radiologiques)

Certaines notions sont présentées succinctement afin de ne pas surcharger le polycopié mais abordées de façon plus détaillée avec des applications en présentiel.

2 Classification des signaux

Mathématiquement, on définira le signal au moyen d'une fonction (souvent continue et dérivable) $f(t)$ de la variable réelle t (le temps) et on dit, dans ce cas que le signal est déterministe et à temps continu (ou encore analogique). Pratiquement, la mesure du signal s'effectue avec une précision limitée. En théorie du signal, on peut appeler ça bruit de mesure. Ce bruit est de nature aléatoire et ne peut pas être représenté par une fonction du temps, mais uniquement par certaines propriétés statistiques (moyenne, variance, auto-corrélation,...). De plus, les appareils de mesure possèdent un temps de réponse fini et on ne dispose en fait que d'une valeur moyenne (ou parfois d'une valeur crête) sur un intervalle de temps. Ceci est négligeable si les variations du signal mesuré sont lentes par rapport au temps de mesure.

On peut classer les signaux selon la nature de leur évolution, on distingue la catégorie des signaux déterministes et les signaux aléatoires. Les mesures sont alors prises à des instants régulièrement espacés dans le temps. Les signaux ainsi obtenus sont représentés par des séries de nombres. On les désigne par le vocable de signaux à temps discret ou numériques. Les signaux numériques résultent souvent de l'échantillonnage de signaux analogiques, mais il peuvent aussi être générés directement dans la mémoire d'un ordinateur dans le cadre de simulations.

Signal déterministe : Un signal parfaitement décrit par une expression ou un modèle mathématique (figure 1.2). Les signaux déterministes se répartissent en deux classes : **périodiques** et **apériodiques**.

Signal aléatoire : Un signal dont l'évolution temporelle n'est pas connue. Il ne peut pas être décrit par une représentation analytique. Il est caractérisé par ses propriétés statistiques (figure 1.3). Les signaux aléatoires peuvent être répartis en deux classes : les signaux stationnaires et non stationnaires. Un signal est dit stationnaire si ses propriétés statistiques restent inchangées quelque soit l'origine du temps.

Une autre classification des signaux peut-être faite. Les **signaux continus** et les **signaux discrets** (figure 1.5). Dans la première catégorie, le temps est considéré comme une variable continue et réelle ($t \in R$). Un signal continu est connu à chaque instant t sauf en un nombre de points de mesure nulle (discontinuités de première espèce). Dans la deuxième catégorie, la variable temps est un entier. Un signal discret n'est connu qu'à certains instants k soit un tableau de valeurs numériques.

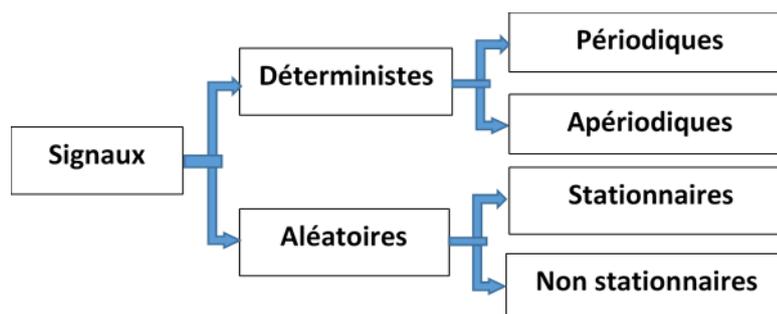


FIGURE 1.1 – Classification des signaux

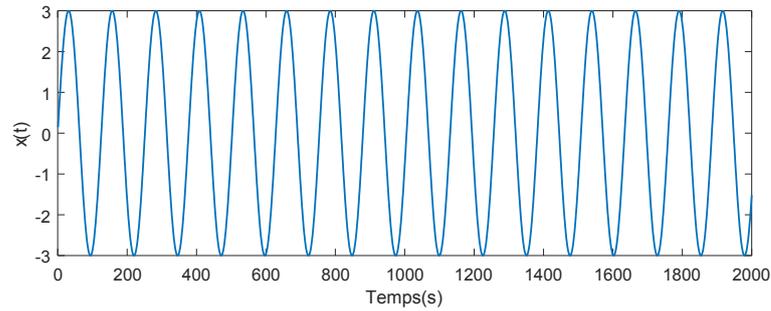
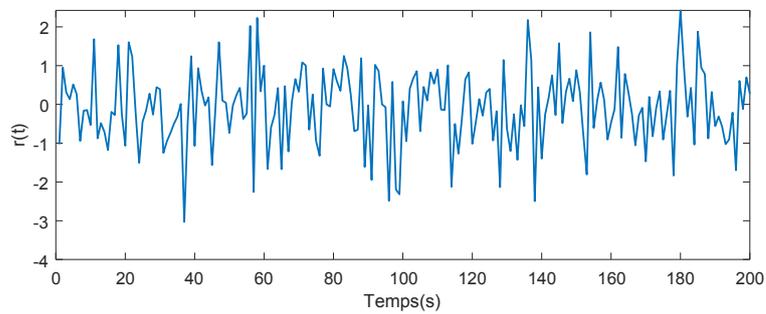
FIGURE 1.2 – Signal déterministe ($x(t) = 3\sin(0.05t)$)

FIGURE 1.3 – Signal aléatoire

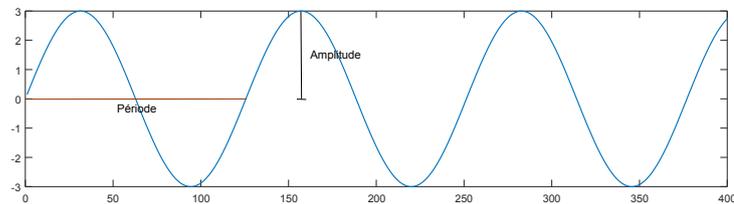


FIGURE 1.4 – Signal périodique

3 Caractéristiques d'un signal

Les caractéristiques d'un signal (figure 1.4) : Amplitude, période, amplitude crête-à-crête, valeur efficace, puissance, énergie,...

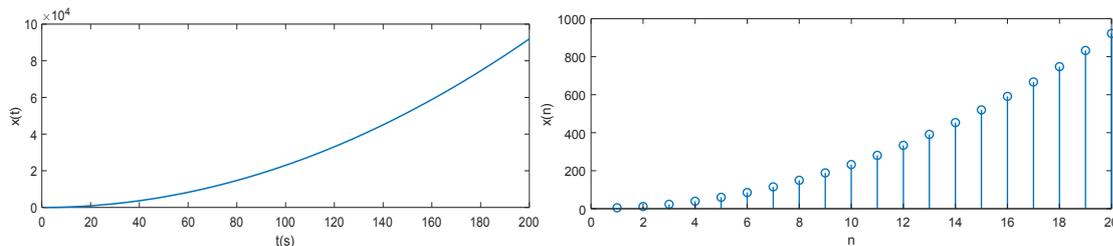


FIGURE 1.5 – Signaux continu et discret

Valeur moyenne La valeur moyenne d'un signal est donnée par

$$x_{moy} = \frac{1}{T} \int x(t) dt$$

Valeur efficace La valeur efficace d'un signal est donnée par

$$x_{eff} = \frac{1}{T} \int x^2(t) dt = \frac{x_{max}}{\sqrt{2}}$$

Pour un signal à composante continue $x(t) = I_0 + I_{max} \cos(\omega t + \phi)$

$$x_{moy} = I_0$$

$$x_{eff} = \sqrt{I_0^2 + I_{eff}^2} = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{max}^2}{2}}$$

Exemple de calcul de la valeur efficace soit le signal périodique $x(t)$ de période T donné par $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$:

$$x_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} A^2 \sin^2(\omega t + \phi) dt$$

$$x_{eff}^2 = \frac{A^2}{T} \int_t^{t+T} \frac{(1 - \cos 2(\omega t + \phi))}{2} dt = \frac{A^2}{2T} \int_t^{t+T} dt - \frac{A^2}{2T} \int_t^{t+T} \cos 2(\omega t + \phi) dt$$

$$x_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Energie L'énergie et la puissance d'un signal sont des propriétés importantes. Lors de la transmission d'un signal (de l'information), cela implique un transfert d'énergie. On parle alors de signaux à énergie finie ($E < \infty$). L'énergie est définie par $E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$.

Théorème de Parseval L'énergie peut être déterminée dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$ avec $X(f)$ la transformée de Fourier de $x(t)$ (voir au chapitre 2)

Puissance moyenne totale $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$

Pour un signal périodique de période T_0 , la puissance $P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$. On dit qu'un signal est à énergie finie si ($P \ll \infty$).

4 Signaux particuliers

D'autres propriétés permettent de classer les signaux. Une première propriété est la durée d'un signal. On distingue ainsi des signaux de durée finie, semi-infinie ou infinie. Une seconde propriété est la périodicité. On peut aussi citer la propriété de la causalité, la symétrie par rapport aux axes,...

Signal causal Un signal est dit causal si $x(t) = 0$ pour $t < 0$

Signaux pairs ou impairs Si $x(-t) = x(t)$ alors $x(t)$ est un signal pair (ex : $\cos(\omega t)$)

Si $x(-t) = -x(t)$ alors $x(t)$ est un signal impair (ex : $\sin(\omega t)$)

Signal périodique Un signal à temps continu est dit périodique ou T-périodique (figure 1.4) si :

$$\exists T \text{ tel que } f(t + kT) = f(t); \forall t, k \in \mathbb{Z}.$$

Le plus petit des nombres T satisfaisant la condition ci-dessus est alors appelé période du signal.

On peut remarquer que la durée d'un signal périodique est en toute rigueur infinie. Un signal périodique est défini par sa fréquence $f = \frac{1}{T}$, T étant sa période (exemples : Courant électrique de fréquence $f = 50\text{Hz}$; signal audible de bande passante $f \in [20\text{Hz} - 20\text{KHz}]$).

5 Signaux usuels

Echelon unitaire La fonction échelon unité ou fonction de Heaviside (figure 1.6), notée $u(t)$ ou $\varepsilon(t)$, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$u(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad u(t - \tau) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > \tau \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases}$$

Si l'on applique ce signal à l'entrée d'un système linéaire stationnaire à temps continu, on obtient en sortie la réponse indicielle du système. En pratique, on essaie de passer de la valeur 0 à la valeur 1 en un temps aussi bref que possible, appelé temps de montée. La transition de la valeur 0 vers la valeur 1 se fait idéalement en suivant un segment de droite, mais ceci correspond à des discontinuités de la dérivée. Le début et la fin de la transition suivent donc des courbes arrondies assurant la continuité de la dérivée. L'échelon unité permet de définir l'impulsion rectangulaire. On verra aussi que la fonction signe est liée à l'échelon ($\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$).

Impulsion ou distribution de Dirac Le second signal particulier est l'impulsion de Dirac $\delta(t)$, qui n'est pas représentée par une fonction mathématique, mais par une distribution (figure 1.8). Nous utilisons la notion de Dirac à la fois pour les signaux à temps continu et pour les signaux à temps discret. Si l'on applique ce signal à l'entrée d'un système linéaire stationnaire à temps continu,

on obtient en sortie la réponse impulsionnelle du système. L'impulsion ou distribution de Dirac est définie par :

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 \quad \text{si } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{si } t = 0 \\ \delta(t - t_0) &= 0 \quad \text{si } t \neq t_0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad \text{si } t = t_0 \end{aligned}$$

Tout se passe comme si $\delta(t)$ est nul partout sauf en $t = 0$ et que $\delta(t)$ est nul partout sauf en $t = t_0$. Ainsi, on peut écrire que $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$.

Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

Cette propriété sera utilisée par la suite pour exprimer la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac ($Tf(\delta(t)) = 1$). Le peigne de Dirac est une suite d'impulsions de Dirac :

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

On verra plutard comment cette fonction est utilisée pour l'échantillonnage des signaux.

Rampe La fonction rampe notée $r(t)$ (figure 1.7), est une fonction réelle de la variable réelle (t) définie par : $r(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$

Fonction Sign La fonction signe (figure 1.8), notée sgn est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$sgn(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

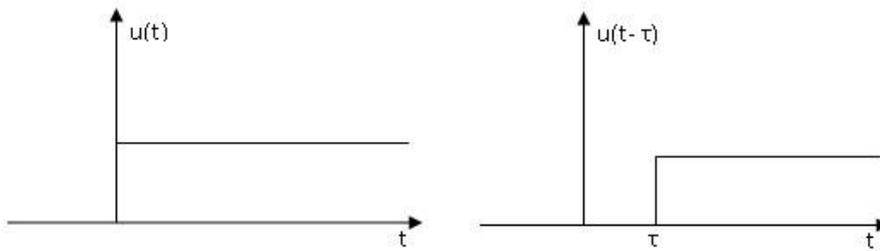


FIGURE 1.6 – Echelon unitaire

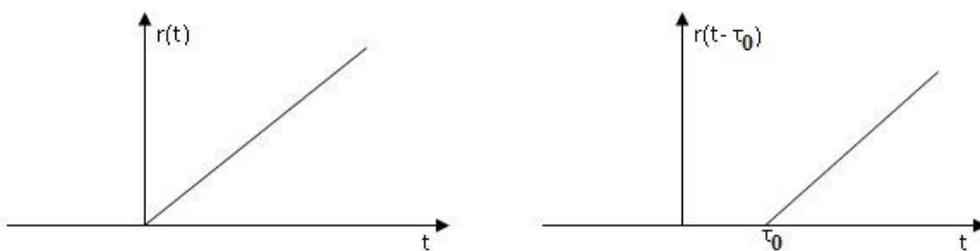


FIGURE 1.7 – Rampe

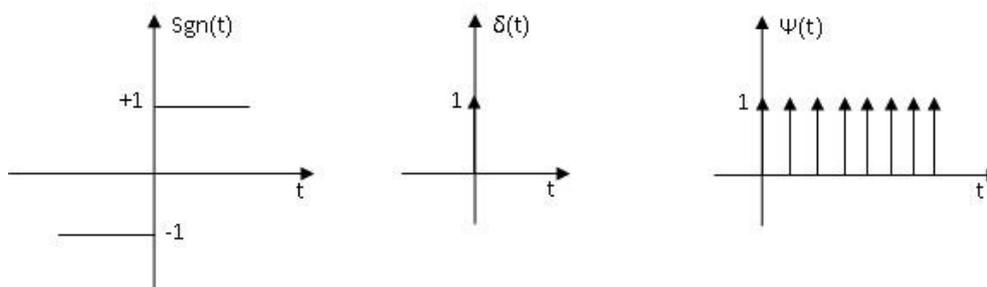


FIGURE 1.8 – Fonctions signe, impulsion et peigne de Dirac

Fonction rectangle (Porte) La fonction rectangle ou fonction porte (figure 1.9), de largeur 1 notée *rect*, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$rect(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Fonction Triangle La fonction Triangle notée Tri (figure 1.10) est une fonction réelle de la variable réelle définie par : $Tri(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } t < |T| \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

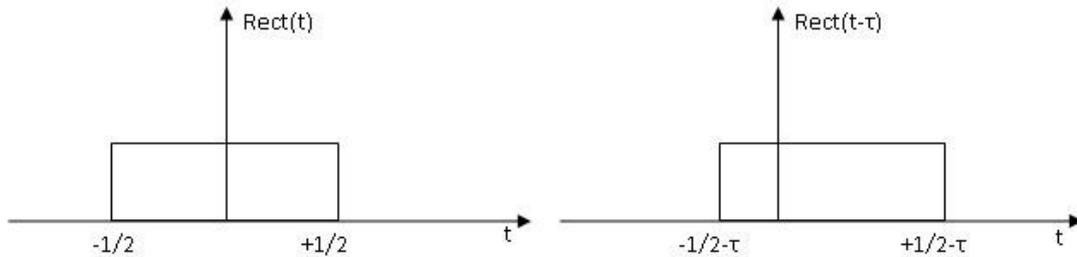


FIGURE 1.9 – Fonction Porte

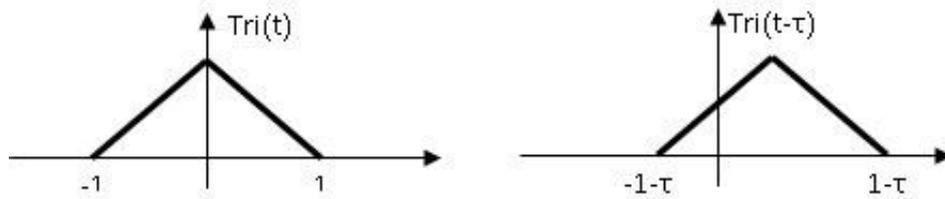


FIGURE 1.10 – Fonction Triangle

Fonction sinc La fonction *sinc* définie par :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{ou} \quad \text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Une fonction souvent rencontrée dans les domaines de l'optique, de l'électromagnétisme ou encore des télécommunications (figure 1.11).

6 Produit de convolution

Le produit de convolution de deux fonctions $e(t)$ et $h(t)$, est donné par :

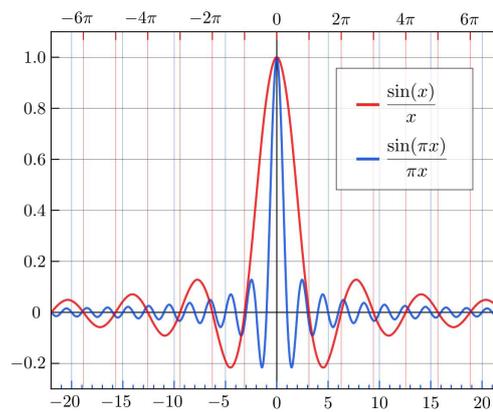


FIGURE 1.11 – Fonction sinc

$$h(t) * e(t) = e(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)e(t - \tau)$$

Le produit de convolution représente la moyenne de h pondérée par e . Physiquement, h est l'influence de l'instrument de mesure sur l'entrée e (figure ??). En traitement de signal, on parle de filtrage. La convolution d'un signal par une impulsion donne ce même signal, l'impulsion de Dirac est donc un élément neutre pour le produit de convolution.

7 Fonctions de Corrélation

Les fonctions de corrélation ou d'intercorrélation sont utilisées pour comparer des signaux distincts. Elles permettent d'étudier la ressemblance des signaux considérés dans le domaine temporel et de comparer la répartition de l'énergie dans le domaine fréquentiel en passant, généralement, par la transformée de Fourier.

Les fonctions de corrélation interviennent dans le traitement des signaux aléatoires. Elles sont données par les expressions suivantes :

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt$$

$$R_{xx} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

Pour des signaux à puissance finie, le domaine d'intégration est réduit à l'intervalle de définition $[T]$.

La valeur de $R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ représente l'énergie du signal ou la puissance du signal. Elle représente aussi le maximum de la fonction de corrélation.

On peut alors écrire :

$$|R_{xy}| \leq R_{xx}(0)$$

Il est important de remarquer que la fonction de corrélation est une convolution dans laquelle $y(t)$ est retourné dans le temps et conjugué ($y(-t)^*$ noté $y^{(-)*}$). On peut écrire que $R_{xy} = x * y^{(-)*}$. Par cette particularité, toutes les propriétés de la convolution s'appliquent sur la corrélation. Si le signal est réel et pair alors $y^{(-)*} = y(t)$, dans ce cas la corrélation et la convolution sont confondues.

Chapitre 2

Analyse de Fourier

Transformée de Laplace

Sommaire

1	Analyse de Fourier	20
2	Transformée de Laplace	24

1 Analyse de Fourier

La série de Fourier et la transformée de Fourier constituent les principaux outils nécessaires au traitement de signal. Pour une représentation fréquentielle des signaux, on fait appel à des fonctions dans le domaine temporel et dans le domaine discret. Pour les signaux analogiques, on utilise la série de Fourier et la transformée de Fourier, on parle alors d'analyse de Fourier. Pour les signaux discrets ou numériques, on fait appel à la TFD (Transformée de Fourier discrète).

1.1 Développement en série de Fourier

Tout signal périodique, de période T , est décomposable en une somme de termes harmoniques, de pulsations multiples de la pulsation fondamentale $\omega = 2\pi/T$.

1.1.1 Développement en série de Fourier réelle

Le développement en série de Fourier d'un signal $x(t)$ de fréquence f_0 , est donné par :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Le coefficient $\frac{a_0}{2}$, qui correspond à l'harmonique $n = 0$, est appelé composante continue ou valeur moyenne du signal, il est donné par :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Les coefficients de Fourier. a_n et b_n sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt \text{ et } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt$$

En considérant le développement en série de Fourier, on peut montrer que, pour un signal pair, $b_n = 0 \quad \forall n$, alors que pour un signal impair, $a_n = 0, \quad \forall n$.

Spectre Le spectre est donné par : $A_0 = \frac{a_0}{2}$

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2};$$

$$A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2};$$

...

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

1.1.2 Développement en série complexe

Le développement en série complexe est parfois plus utile en traitement du signal dans lequel les termes de pulsations opposées se combinent pour redonner des termes en sinus et cosinus.

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

Avec $C_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega t} dt$ et $C_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$

Les coefficients a_0 , a_n et b_n peuvent s'écrire en fonction de C_n et C_{-n} :

$$a_0 = \Re\{C_0\}, a_n = \Re\{C_n + C_{-n}\} \text{ et } b_n = \Re\{C_n - C_{-n}\}$$

Le spectre est représenté par les valeurs de $|C_k|$ (spectre bilatéral)(figure 2.1)

Remarque La puissance moyenne peut être calculée par :

$$P_{moy} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n^2 + b_n^2]$$

ou par notation complexe : $P_{moy} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$.

1.1.3 Application

Soit $f(t) = t^2$ pour $-1 \leq t \leq +1$ périodique ($T = 2s$), montrer que le développement de $f(t)$ s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi^2} \cos(2\pi t) + \dots$$

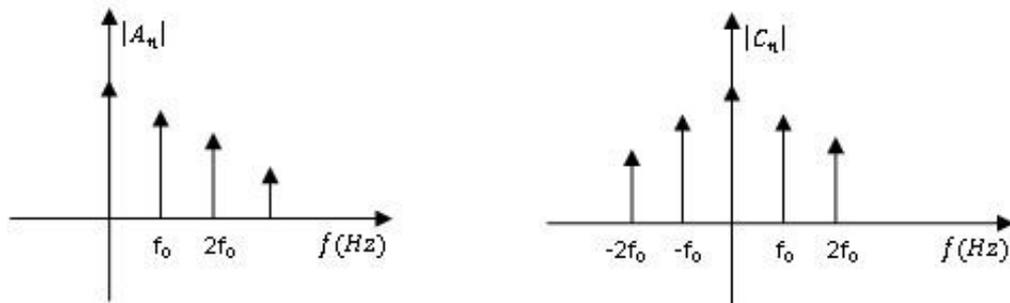


FIGURE 2.1 – Spectre unilatéral (série de Fourier réelle) et spectre bilatéral (série complexe)

1.2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier (TF) est une extension du développement en série de Fourier des signaux apériodiques. Elle est donc appliquée sur des signaux non périodiques pour lesquels, la série de Fourier n'est pas possible.

1.2.1 Définition

Soit un signal $x(t)$, sa TF est définie par

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

t : variable temporelle (s) et f : variable fréquentielle (Hz).

La transformée inverse (TFI), qui permet de retrouver le signal $x(t)$ à partir de sa TF, $X(f)$, est donnée par :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} dt$$

$X(f)$ et $x(t)$ la forment la paire de Fourier.

Parmi les conditions d'existence de la TF (conditions de Dirichlet), on a la condition importante : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt << \infty$.

1.2.2 Propriétés de la TF

Linéarité $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow aX_1(f) + bX_2(f)$

Retard temporel $x(t + t_0) \rightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0}$

Décalage fréquentiel $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow X(f - f_0)$

Dilatation temporelle $x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$

Différentiation $\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow j2\pi fX(f)$

Intégration $\int_{-\infty}^t x(t)dt \rightarrow \frac{1}{j2\pi f}X(f)$

Retournement temporel $x(-t) \rightarrow X(-f)$

Convolution $x(t) * y(t) \rightarrow X(f).Y(f)$

1.2.3 Module et phase

$X(f)$ est appelé spectre de $x(t)$.

Il s'agit d'une quantité complexe dont l'amplitude $|X(f)|$ est appelée spectre d'amplitude et la phase $\Phi(f)$ est appelée spectre de phase.

La TF peut-être décrite sous la forme : $X(f) = |X(f)|e^{j\theta(f)} = A(f) + B(f)$

Module : $|X(f)| = \sqrt{A^2(f) + B^2(f)}$ et la phase : $\theta(f) = \arctan\left(\frac{B(f)}{A(f)}\right)$

1.3 Exemples de TF

App1 $Tf \{ \delta(t) \} = 1; \quad Tf \{ 1 \} = \delta(f);$

$Tf \{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T)$

App2 $TF \{ u(t) \} = \int_0^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{j2\pi f_0};$

App3 $TF \{ e^{-j2\pi f_0 t} \} = \delta(f)$

App4 En utilisant les propriétés de la TF, montrer que la Tf de $\{ 3 \cos(j2\pi f_0 t) \}$ avec $f_0 = 0.02Hz$ est $3(\delta(f - 0.02) + \delta(f + 0.02))$ (figure 4.2);

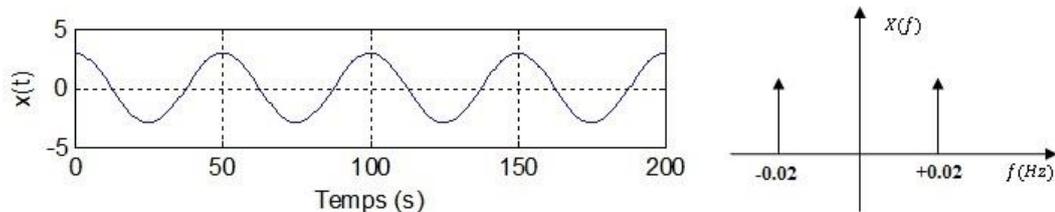


FIGURE 2.2 – Transformée de Fourier de $x(t) = 3\cos(2\pi f_0 t)$ ($f_0 = 0.02Hz$)

2 Transformée de Laplace

L'étude des systèmes continus nécessitent des opérations pouvant être complexes dans le domaine temporel comme la résolution des équations différentielles, dérivation, l'intégration, le produit de convolution,... Pour cela, on fait appel à des fonctions qui permettent de simplifier ces opérations. Parmi ces fonctions, il y a la transformée de Laplace. C'est un outil mathématique utilisé en automatique continue pour :

- La résolution des équations différentielles
- Le calcul de la fonction de transfert d'un système
- L'analyse de la réponse d'un système
- L'analyse des performances d'un système

La Transformée de Laplace permet de transformer un problème différentiel en un problème algébrique.

2.1 Définition

Soit une fonction f définie pour $t \geq 0$. On définit sa transformée de Laplace (TL) par : $F(p) = TL[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$. On admettra qu'il existe une transformée de Laplace pour toutes les fonctions que nous rencontrerons. En pratique, on utilisera souvent la table des transformées.

2.2 Transformée inverse

L'inverse de la Transformée de Laplace consiste à déterminer la fonction originale $f(t)$ à partir de sa transformée de Laplace $F(p)^{-1}$. On peut distinguer trois méthodes :

- En principe, la transformée inverse de Laplace est obtenue en solutionnant cette intégrale : $f(t) = TL^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(p)e^{pt} dp$

- Décomposition en éléments simples et utilisation de la table :

Le principe de cette méthode consiste à écrire la fonction $F(p)$ sous forme d'éléments simples pouvant être identifiés dans la table donnant les transformées de Laplace des fonctions usuelles.

- Méthode des résidus :

Calcul des pôles de $F(p) = N(p)/D(p)$:

les valeurs qui annulent le dénominateur de $F(p)$ ($D(p) = 0$).

Calcul des résidus :

soit a un pôle de $F(p)$

Si a est un pôle simple : $r_a = \lim_{p \rightarrow a} (p - a)F(p)e^{pt}$

Si a est un pôle multiple : $r_a = \lim_{p \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} (p - a)^n F(p)e^{pt}$

Calcul de $f(t)$:

Pour chaque pôle a de $F(p)$, calculer le résidu r_a , $f(t) = \sum \text{residus}$

2.3 Propriétés de la Transformée de Laplace

Les transformées de Laplace que nous rencontrerons, seront la plupart du temps des fonctions rationnelles. Pour évaluer leurs originales (transformée inverse de Laplace), il suffit souvent de décomposer cette fonction en éléments simples, puis d'utiliser la table des transformées. La fonction $u(t)$ (échelon unitaire) intervient systématiquement dans ces tables.

Linéarité $TL[a.f(t) + b.g(t)] = a.F(p) + b.G(p)$

Dérivation $TL\left[\frac{df}{dt}\right] = pF(p) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$

Pour la dérivée seconde :

$TL\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = p^2F(p) - p \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{df}{dt}$

$f(t)$ et les dérivées successives de $f(t)$ sont souvent nulles à l'instant initial.

A l'ordre n , $TL\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} f^{(i)}(0)$

Intégration $TL[\lim_{t \rightarrow \tau} f(t)dt] = \frac{F(p)}{p}$

Retard $TL[f(t - \tau)dt] = e^{-p\tau}F(p)$

Théorème de la valeur initiale $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$

Théorème de la valeur finale $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot F(p)$

Translation de la variable de Laplace $F(p+a) = TL[e^{-at} f(t)]$

2.4 Résolution des équations différentielles

La résolution d'équations différentielles en utilisant la transformée de Laplace consiste à transformer l'équation différentielle en équation algébrique par l'application de la propriété de la dérivation de la transformée de Laplace :

$$(TL[\frac{d^n f}{dt^n}] = p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} f^{(i)}(0))$$

La transformée inverse permettra de retrouver la solution.

soit l'équation différentielle :

$$a_0 \frac{dy^n}{dt^n} + a_1 \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y(t) = f(t); CI = 0$$

Par la TL, on a l'équation auxiliaire suivante :

$$a_0 P^n Y(p) + a_1 P^{n-1} Y(p) + \dots + a_{n-1} p Y(p) + a_n Y(p) = F(p)$$

$$(a_0 P^n + a_1 P^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) Y(p) = F(p)$$

$$\rightarrow \Phi Y(p) = F(p) \rightarrow Y(p) = \frac{F(p)}{\Phi}$$

Par la TL^{-1} , on retrouve $y(t) = TL^{-1}[\frac{F(p)}{\Phi}]$

2.5 Applications de la TL

2.5.1 Calcul de TL

App1 Soit $f(t)$ une fonction échelon unitaire : $f(t) = u(t)$

Rep : Calcul de la TL : $TL[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} = -\frac{e^{-pt}}{p} /_0^{\infty} = \frac{1}{p}$

App2 Soit $f(t) = e^{-2t}$ avec $t > 0$

Rep : $TL[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} = \int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-pt} = -\frac{e^{-(2+p)t}}{p+2} /_0^{\infty} = \frac{1}{p+2}$

App3 $f(t) = \cos(t) - u(t)$

Rep : $TL[\cos(t)] = \frac{p}{p^2+1}$ et $TL[u(t)] = \frac{1}{p} \Rightarrow TL[\cos(t) - u(t)] = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p}$

App4 $f(t) = \sin'(t)$

Rep : $TL[f(t)] = pTL[\sin(t)] = \frac{p}{p^2+1}$ (Propriété de la dérivation)

App5 $f(t) = \int \sin(t)dt$

Rep : $TL[f(t)] = \frac{TL[\sin]}{p} = \frac{1}{p(p^2+1)}$ (Propriété de l'intégrale)

App6 $f(t) = e^{3t} \cos(t)$

Rep : $TL[\cos(t)] = \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow TL[f(t) = e^{3t} \cos(t)] = \frac{p-3}{(p-3)^2+1}$

2.5.2 Calcul de TL inverse

App7 Déterminer par la décomposition en éléments simples, la TL^{-1} de :

$$F(p) = \frac{1}{p^2+3p+2}$$

Rep : $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} + \frac{-1}{p+2}$ donc $TL^{-1}(F(p)) = e^{-t} - e^{-2t}$

App8 Déterminer par la méthode des résidus, la TL^{-1} de $F(p)$ donnée par :

$$F(p) = \frac{p+2}{p(p+1)^2}$$

Rep : Calcul des résidus :

Pôle simple $p = 0$:

$$r_0 = \lim_{p \rightarrow 0} (p - 0) \frac{p+2}{p(p+1)} e^{pt} = 2$$

Pôle simple $p = -1$:

$$r_{-1} = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}} (p+1)^2 \frac{p+2}{p(p+1)^2 e^{pt}} = (-2-t)e^{-t}$$

$$TL^{-1}(F(p)) = r_0 + r_{-1} = 2 + (-2-t)e^{-t}$$

2.5.3 Equations différentielles

App9 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 16y(t) = 1 \text{ et } CI = 0$$

Rep : Avec la TL : $p^2 Y(p) + 16Y(p) = \frac{1}{p} \rightarrow Y(p) = \frac{1}{p(p^2+16)} \rightarrow y(t) = TL^{-1}Y(p)$
(à calculer).

2.6 Transformée de Laplace et transformée de Fourier

Pour passer de transformée de Laplace(TL) $H(p)$ à la transformée de Fourier (TF) $H(f)$, on pose $p = j\omega = j2\pi f$ (cas particulier).

Soit $H(p) = \frac{1}{p^2+p+1}$. Trouver le module et la phase de $H(f)$.

Pour retrouver $H(f)$, on pose $p = j\omega = j2\pi f$

$$H(f) = \frac{1}{(j2\pi f)^2 + j2\pi f + 1} = \frac{1}{1 - 4\pi^2 f^2 + j2\pi f}$$

$$\text{Module : } |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{(1-4\pi^2 f^2)^2 + 4\pi^2 f^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4\pi^2 f^2 + 16\pi^4 f^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-4\pi^2 f^2(1-4\pi^2 f^2)}}$$

$$\text{Argument : } \theta(f) = -\arctan\left(\frac{4\pi f}{1-4\pi^2 f^2}\right)$$

Pour $f = 0$, $|H(f)| = 1$ et $\theta(f) = k\pi$

Chapitre 3

Filtres analogiques

Sommaire

1	Introduction	31
2	Caractéristiques d'un filtre	32
3	Types de filtres	33
4	Filtres passifs	35
5	Filtres actifs	37
6	Applications	39

1 Introduction

L'analyse du comportement de circuits en termes de fréquence en étudiant les tensions et courants lorsque la fréquence est variable nous permet de comprendre le comportement des éléments composant le circuit lorsque la fréquence varie. Le choix de ces composants est crucial tant le circuit peut bloquer ou laisser passer des signaux de certaines fréquences. On appelle ce genre de circuit un filtre.

Cependant, en pratique, un filtre réel ne permet pas d'éliminer complètement certaines fréquences : il y a plutôt une atténuation. Les signaux des fréquences non voulues sont atténués de façon assez significative. Il permet ainsi de privilégier ou d'éliminer certaines fréquences d'un signal.

Le terme filtre est souvent utilisé pour désigner des systèmes linéaires, invariants et à réponse en fréquence sélective. De tels filtres permettent la transmission d'une partie du spectre sans modification, alors que d'autres parties peuvent être atténuées. Des exemples familiers incluent les filtres passe-bas, passe-haut, coupe-bande et passe-bande.

Exemple d'application du filtrage : Lors d'un appel téléphonique, l'utilisateur crée, par l'intermédiaire du micro, un signal électrique de fréquence comprise entre 300Hz et 4000Hz (fréquence audibles). Une ligne téléphonique transporte ces signaux. Mais, à cause de parasitages (ondes électromagnétiques ...), on retrouve également sur la ligne des signaux supplémentaires de fréquences élevées.

Ces signaux parasites peuvent dégrader la qualité de la communication et que seuls les signaux de fréquences audibles sont nécessaires en réception. L'opérateur téléphonique a donc à l'époque, ajouté un filtre que l'on nomme passe-bas (filtre conservant les basses fréquences et éliminant les hautes fréquences) afin

d'éliminer les signaux parasites en plaçant un simple condensateur.

2 Caractéristiques d'un filtre

Un filtre est souvent caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ ou $H(s)$ définie par $H(p) = U_s(p)/U_e(p)$. Il peut être aussi caractérisé par sa bande passante ou sa bande atténuée.

Fonction de transfert On caractérise un filtre par sa fonction de transfert (rapport grandeur de sortie sur grandeur d'entrée) (figure 1.8), le plus souvent en tension et en fonction de la fréquence (ou pulsation) $H(\omega) = \frac{U_s}{U_e}$. A partir de



FIGURE 3.1 – Caractéristique d'un filtre

la fonction de transfert, on définit le gain (en décibel : dB) du filtre, donné par $G_{dB}(\omega) = 20 \log(H(\omega))$ et la phase est donnée par $\phi = \text{Arg}(H(\omega))$.

On préfère parfois définir le rapport à l'atténuation $A(\omega) = \frac{1}{H(\omega)}$ et $A_{dB}(\omega) = -G_{dB}(\omega)$.

Bande passante La bande passante est l'intervalle ou l'étendue de fréquences où le signal d'entrée passe en sortie sans subir d'atténuation ou une petite atténuation inférieure à un seuil (filtre réel).

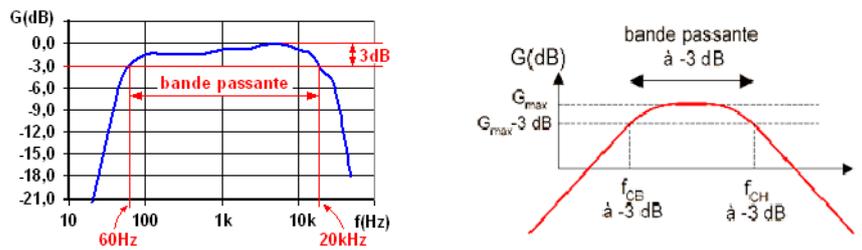


FIGURE 3.2 – Exemples de bande passante

3 Types de filtres

Le filtrage est une forme de traitement de signal, obtenu en envoyant le signal à travers un ensemble de circuits électroniques, qui modifient son spectre de fréquence et/ou sa phase et donc sa forme temporelle.

Il peut s'agir soit :

- d'éliminer ou d'affaiblir des fréquences parasites indésirables
- d'isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles.

Les filtres sont caractérisés par leur réponse en fréquence. La variation de l'amplitude en fonction de la fréquence est le critère le plus important. La fréquence qui sépare les deux bandes est appelée la fréquence de coupure. On distingue quatre (4) types de filtres fondamentaux :

- passe bas : Il garde les signaux ayant une basse fréquence $BP = [0 : f_c]$
- passe haut : Il garde les signaux ayant une haute fréquence $BP = [f_c : +\infty[$
- passe bande : Il conserve les signaux ayant une fréquence comprise entre deux seuils $BP = [f_{c1} : f_{c2}]$
- Coupe bande (ou réjecteur) : Il coupe les signaux ayant une fréquence comprise entre deux seuils $BP = [0 : f_{c1}, f_{c2} : \infty]$

Le nom de ces filtres vient de la région dans laquelle les fréquences passent de l'entrée à la sortie : pour un passe-bas, ce sont les fréquences plus faibles que

la fréquence de coupure qui passent, tandis que pour le passe-haut, ce sont les fréquences plus élevées qui passent. Les termes bas et haut sont relatifs ici ; ils ne font référence qu'à la fréquence de coupure. Les deux autres types de filtres ont deux fréquences de coupure. Le filtre passe-bande permet de passer seulement les fréquences entre les deux fréquences de coupure ; le filtre à rejet (ou filtre coupe-bande) laisse passer tout sauf ce qui est entre les deux fréquences de coupure. Un filtre idéal présente (figure 3.3) :

- un affaiblissement nul dans la bande de fréquence que l'on désire conserver
- un affaiblissement infini dans la bande que l'on désire éliminer

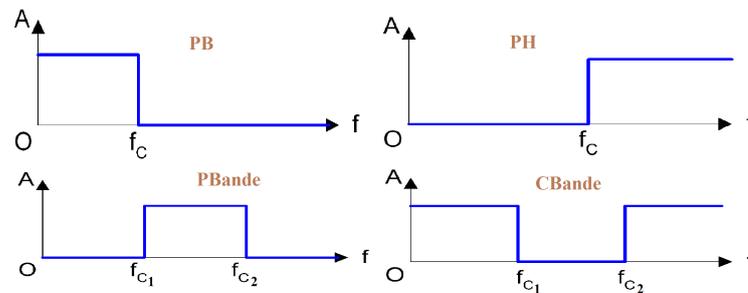


FIGURE 3.3 – Types de filtres (gabarits)

Il est impossible pratiquement, de réaliser de tels filtres. On parle alors de filtre réel (figure 3.4). Aussi, se contente-t-on d'approcher cette réponse idéale en :

- conservant l'atténuation inférieure à une valeur maximale dans la bande passante
- conservant l'atténuation supérieure à une valeur minimale dans la bande atténuée

Il est à noter que la fréquence de coupure correspond à l'amplification maximale divisée par $\sqrt{2}$ ($H_{max}/\sqrt{2}$). Nous distinguons, par ailleurs des filtres passifs et des filtres actifs.

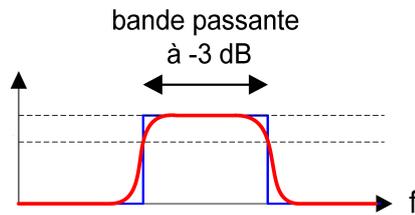


FIGURE 3.4 – Gabarit d'un filtre réel

4 Filtres passifs

Un filtre passif comprend des résistances, des bobines et des condensateurs. Nous allons traiter le cas d'un filtre passif passe-bas du 1^{er} ordre et donner un aperçu sur un filtre passif passe bas du second ordre.

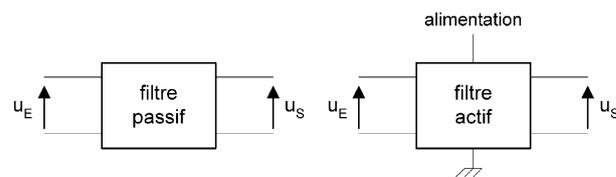


FIGURE 3.5 – Filtre passif et filtre actif

4.1 Filtre passif passe-bas du 1^{er} degré

La forme canonique d'un filtre passif passe-bas est $\frac{A}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$. Il s'agit d'un filtre RC ou RL . Soit le filtre RC donné sur la figure 3.6, $H(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$. Par identification à la forme canonique, $A = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Pulsation (ou fréquence) à $-3dB$

On a $|H(\omega_0)| = \frac{H_{max}(\omega)}{\sqrt{2}}$ ou $|\frac{H(\omega_0)}{H_{max}(\omega)}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

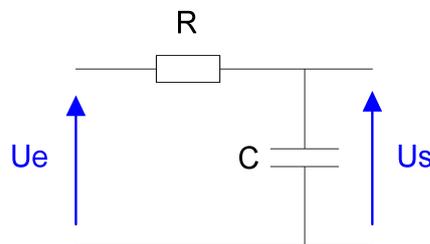
$20\log|\frac{H(\omega_0)}{H_{max}(\omega)}| = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$. On parle alors de pulsation à $-3dB$, notée ω_c .

Calcul de ω_0

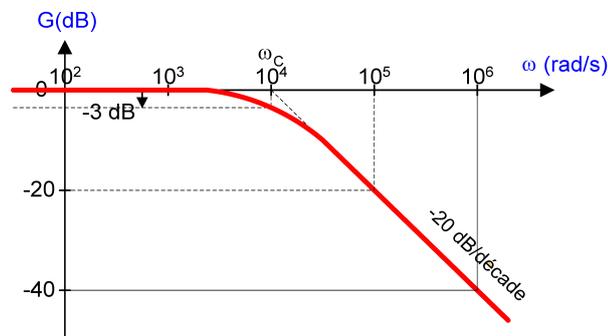
$$|H(\omega_0)| = \left| \frac{H_{max}(\omega)}{\sqrt{2}} \right|$$

Or $|H_{max}(\omega)| = |H(\omega \rightarrow 0)| = 1 \implies \left| \frac{1}{1+jRC\omega_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ (pour $R = 10k\Omega$ et $C = 10nF$, la fréquence de coupure $f_c = 1.6kHz$).

L'atténuation de tension est donnée par $\left| \frac{1}{1+jRC\omega_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega_0)^2}}$. Le gabarit (diagramme de Bode) d'un filtre passif du 1^{er} degré est donné sur la figure suivante. **Remarque**

FIGURE 3.6 – Filtre passif du 1^{er} degré

$$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log_{10} T(\omega) = -20 \cdot \log_{10} \left(\sqrt{1 + (RC\omega)^2} \right)$$

FIGURE 3.7 – Gabarit d'un Filtre passif passe bas du 1^{er} degré

Le gabarit d'un filtre est déterminée sur Matlab par la fonction 'bode'

Exemple : si $H(p) = \frac{p+11}{p+31}$ on construit la fonction de transfert avec :

`sys = tf([1,11],[1,31]);`Fonction de transfert

`bode(sys);`Gabarit

4.2 Filtre passif passe-bas du 2nd degré

Le schéma d'un filtre passif passe bas du 2nd degré est donné sur la figure suivante : La forme canonique est donnée par $\frac{A}{1+2\delta j\frac{\omega}{\omega_0}+(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$.

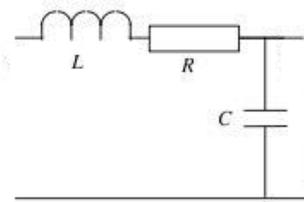


FIGURE 3.8 – Filtre passif passe bas du 2nd degré

Où δ désigne le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre (ou pulsation centrale) qui correspond au cas où la fonction de transfert est purement réelle.

Pour le filtre de la figure 3.8, la fonction de transfert est donnée par :

$$H(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega-LC\omega^2}.$$

Par identification, $\delta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Pour retrouver la fréquence de coupure, on pose comme pour le 1^{er}, $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (A faire comme devoir maison).

5 Filtres actifs

Un filtre actif est composé d'une alimentation externe, des transistors et des ampli-Opérationels.

5.1 Filtre actif passe-bas du 1^{er} degré

Soit le filtre actif du 1^{er} degré donné sur la figure suivante. Sa fonction de transfert est définie par $H(\omega) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 - \frac{j}{RC\omega}}$ ce qui donne $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$. Son gabarit est donné sur la figure 3.9

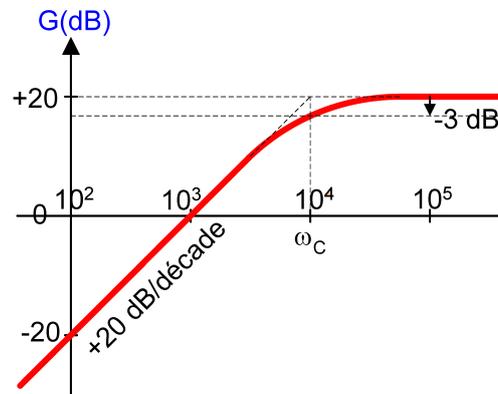


FIGURE 3.9 – Gabarit d'un Filtre actif passe bas du 1^{er} degré

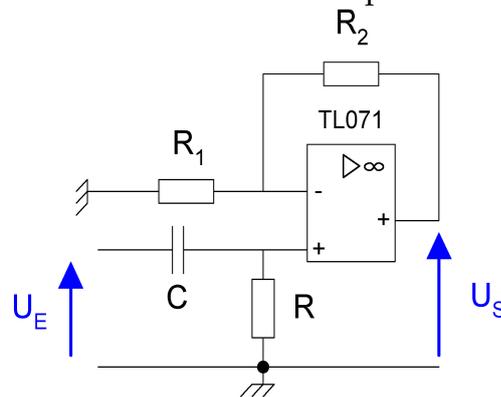


FIGURE 3.10 – Filtre actif passe bas du 1^{er} degré

6 Applications

App1 Reprendre le circuit du filtre de la figure 3.6. Remplacer le condensateur par une inductance et retrouver la fréquence de coupure f_c ($L=1H$).

Rep $f_c = 1.6KHz$.

App2 Reprendre le circuit du filtre de la figure 3.6. Permuter la capacité et la résistance et calculer la fréquence de coupure. Quel type de filtre obtient-on ?

Rep $f_c = 1.6KHz$

App3 Soit le filtre donné sur la figure 3.11. De quel type de filtre s'agit-il ? Donner l'expression de sa fréquence de coupure.

Rep $f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C}$.

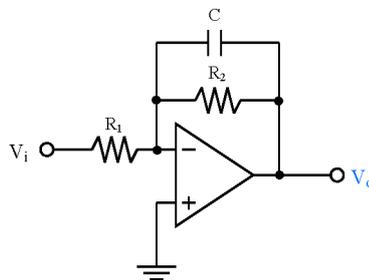


FIGURE 3.11 – Filtre de l'app3

App4 soit le filtre avec charge donné sur la figure 3.12.

- Donner la fonction de transfert du filtre sans charge
- Retrouver R si on veut un filtre de fréquence $10KHz$ ($L=6mH$).

Rep $R = 60\Omega$.

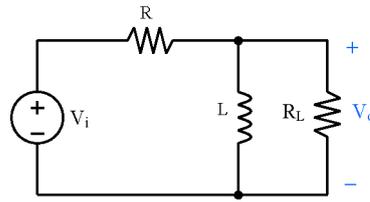


FIGURE 3.12 – Filtre de l'app4

– Quelle est la fonction de transfert avec la charge ? Comparer les amplitudes maximales dans les 2 cas (Prendre $R_L = R$).

Rep amplitude max dans le cas avec charge est la moitié de l'amplitude sans charge.

App5 soit le filtre avec charge donné sur la figure 3.13. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire l'étude et retrouver l'expression de sa fréquence de coupure. **Rep**

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

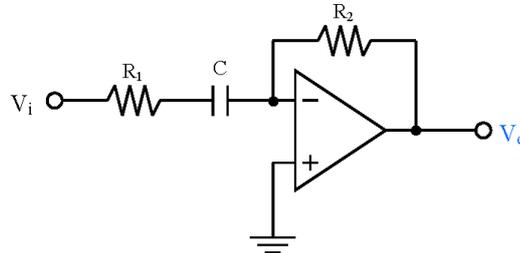


FIGURE 3.13 – Filtre de l'app5

App6 le filtre de la figure 3.8 et permuter le condensateur et l'inductance. Faire l'étude de ce filtre (fonction de transfert, fréquence propre et fréquences de coupure).

Chapitre 4

Echantillonnage et quantification

Sommaire

1	Introduction	42
2	Principe d'échantillonnage	42
3	Reconstitution du signal	43
4	Quantification	44
5	Applications	45

1 Introduction

Nous pouvons utiliser des capteurs électroniques pour convertir de la même façon la pression, le son, la température, etc..., en signaux électriques, mais nous devons ensuite transformer ces informations en nombres digitaux (binaires) susceptibles d'être envoyés à un ordinateur digital pour les traiter. Cette opération est appelée conversion analogique-numérique (ADC : Analog to Digital Conversion). Le traitement à appliquer au signal est effectué par le ordinateur digital et est appelé traitement numérique du signal (DSP : Digital Signal Processing). Pour numériser un signal, il faut répondre aux questions suivantes :

- A quelle fréquence échantillonner les signaux ?
- Quel type de quantification choisir ?
- Sur combien de bits numériser ?

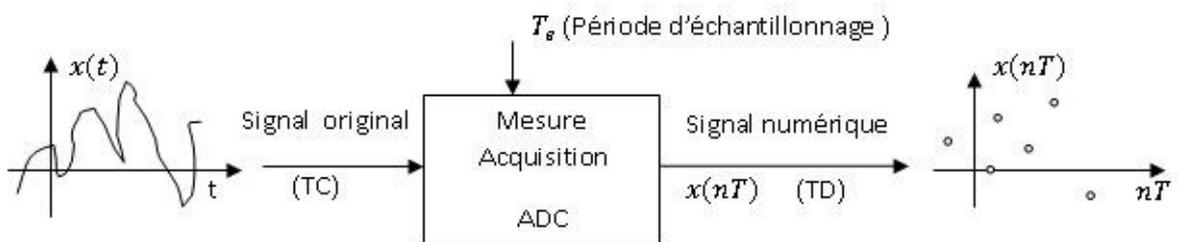


FIGURE 4.1 – Principe de numérisation

2 Principe d'échantillonnage

Soit un signal analogique à échantillonner et F_e la fréquence d'échantillonnage. L'échantillonnage par impulsions (mathématique) consiste à effectuer une multiplication du signal $x(t)$ par un peigne de Dirac $\psi(t)$ de période T_e pour obtenir

le signal échantillonné $\hat{x}(t)$:

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot \psi(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

Dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_e) e^{-j2\pi f n T_e} = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f + \frac{n}{T_e})$$

Ce qui donne ; $\hat{X}(f) = X(f) + X(f - F_e) + X(f - 2F_e) + \dots$

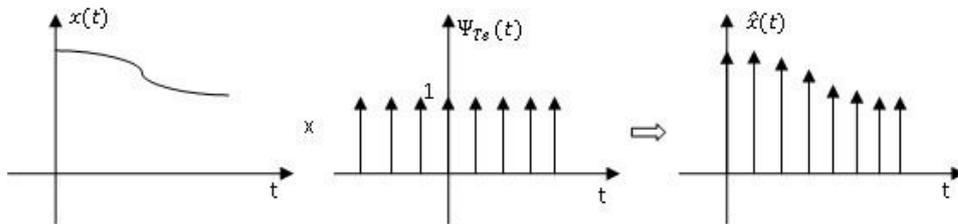


FIGURE 4.2 – Principe d'échantillonnage

Il s'agit donc d'une fonction périodique équivalente à une somme de répliques décalées en fréquence de $X(f)$.

Théorème de Shannon Pour échantillonner un signal à support borné $[-f_{max}, +f_{max}]$ sans perdre d'informations, la fréquence d'échantillonnage doit vérifier la condition suivante : $f_e \geq 2f_{max}$.

3 Reconstitution du signal

Si $X(f)$ est un spectre à bande limitée ($X(f) = 0$ si $|f| > f_{max}$), il est évident que si $f_e > 2f_{max}$, le spectre $X(f)$ est reproduit fidèlement autour des fréquences multiples de f_e , de sorte que $x(t)$ peut être reconstruit de façon exacte en appliquant un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c telle que $f_{max} \leq f_c \leq f_e - f_{max}$.

Si $H(f)$ désigne la réponse en fréquence de ce filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ alors :

$$H(f) = \begin{cases} +1 & \text{si } |f| < f_c \\ 0 & \text{si } |f| > f_c \end{cases} \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$$

Le signal $x(t) = h(t) * \hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \frac{\sin(2\pi f_c(t-nT_e))}{\pi(t-nT_e)}$

Cette formule d'interpolation permet de retrouver le signal à partir des échantillons acquis à des instants nT_e .

Le filtre passe-bas idéal n'est pas réalisable physiquement. On fait appel à l'in-

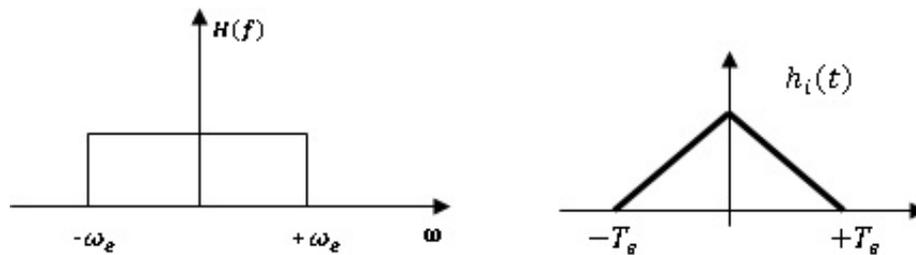


FIGURE 4.3 – Filtre passe-bas et interpolateur linéaire

terpolation linéaire (d'ordre 1) tel que : $x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)h_i(t - nT_e)$, avec :

$$H_i(f) = \begin{cases} 1 - |t|/T_e & \text{si } |t| < T_e \\ 0 & \text{si } |t| > T_e \end{cases} \quad \text{et} \quad h_i(t) = \frac{\sin^2(\pi f t_e)}{\pi^2 f^2 T_e^2}$$

La TF d'un signal interpolé $x_i(t)$ est alors égale à :

$$X_i(f) = \frac{\sin^2(\pi f t_e)}{\pi^2 f^2 T_e^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_e)$$

4 Quantification

La quantification est généralement scalaire, on distingue la quantification uniforme et la quantification non uniforme comme la conversion logarithmique.

4.1 Définition

Quantifier une valeur réelle x appartenant à un intervalle $[-x_{max}, x_{max}]$ consiste à remplacer x par une valeur $Q(x) = x_n$. La plus proche de x choisie dans un ensemble fini de N valeurs réelles de x_n .

4.2 Quantification uniforme

Si tous les intervalles $[x_n, x_{n+1}]$ ont la même longueur, la quantification est dite uniforme et la constante γ , définie par $\gamma = |x_n - x_{n+1}|$ est appelée pas de quantification ou quantum, tel que $\gamma = \frac{2x_{max}}{2^N}$. Où N est le nombre de valeurs (bits) de quantification. La valeur quantifiée de x , $Q(x)$ est donné par :

$$\forall x \in [x_n, x_{n+1}] \quad n = 0 : N - 1$$

$$\text{Si } |x - x_n| < |x - x_{n+1}| \quad Q(x) = x_n$$

$$\text{Si } |x - x_n| > |x - x_{n+1}| \quad Q(x) = x_{n+1}$$

$$\text{Si } x = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \quad Q(x) = x_n \text{ ou } x_{n+1}$$

$$\text{Erreur de quantification } e = x - Q(x) = \frac{\gamma}{2}$$

Débit D Quantité de bits par seconde (bits/s)

Capacité La capacité $C = D \cdot \text{durée}$

5 Applications

App1 Si le quantum $\gamma = 2$ et $x_{max} = 8$. Quel est le nombre de bits nécessaires pour quantifier le signal correspondant ?

$$\text{Rep : } \gamma = |x_n - x_{n+1}| = \frac{2x_{max}}{2^N} = \frac{x_{max}}{2^{N-1}} = 2 \rightarrow 2^N = x_{max} = 8 \rightarrow N = 3$$

App2 Si un signal a été quantifié sur 5bits. quelles sont les valeurs du signal numérisé : 010111101000100

Rep : Les échantillons du signal sont : 01011 : 11; 11010 : 26; 00100 : 04

App3 Quel est le débit d'un signal de qualité studio (16bits, 16Khz)

Rep : $N = 16\text{bits}$ et $f_e = 16\text{Khz}$.

$f_e = \text{nombre d'échantillons/s} = 16.10^3\text{Ech/s}$ et chaque échantillon est codé sur 16bits \rightarrow le débit est donné par : $D = 16.10^3.16 = 256\text{kbits/s}$

App4 Calculer la taille que prendrait en mémoire, 1h d'enregistrement en qualité téléphonique (8bits, 8Khz).

$D = f_e.8 = 1568\text{kbits/s} \rightarrow C = D.\text{durée} = 1568\text{kbits/s}.60 = 56.444\text{M.bits}$

Chapitre 5

Transformée de Fourier discrète

Transformée en Z

Sommaire

1	Transformée de Fourier discrète (TFD)	49
2	Transformée en Z	51

1 Transformée de Fourier discrète (TFD)

La transformée de FOURIER discrète est utilisée dans beaucoup d'applications (calcul de la réponse fréquentielle d'un système FIR, estimation spectrale, convolution de signaux,...).

1.1 Définition de la TFD

On appelle transformée de Fourier discrète d'une suite de N termes $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, la suite de N termes $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$. La transformée de Fourier discrète (TFD) est définie par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \text{ avec } k = 0 : (N-1)$$

En pratique, les N termes $x(n)$ peuvent être N échantillons d'un signal analogique échantillonné $x_n = x(nTe)$, et les N termes $X(k)$ correspondent à une approximation (à un facteur multiplicatif Te près) de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence $f_k = kfe/N$, avec k entre 0 et $N-1$.

La transformée de Fourier discrète inverse (TFDI) est donnée par :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N} \text{ avec } n = 0 : (N-1)$$

Les fréquences utilisées sont les fréquences réduites comprises entre 0 et 1, multiples de $1/N$. La transformée d'une sinusoïde complexe est une raie spectrale discrète, la transformée de $x(n)$ est un jeu de raies spectrales.

1.2 Propriétés de la TFD

Déplacement temporel $TFD(x(n-n')) = X(k)e^{j2\pi kn'/N}$

Déplacement fréquentiel $TFD(x(n)e^{j2\pi nk'/N}) = X(k - k')$

Fonction paire ou impaire Par définition, la TFD est fonction de $e^{-j2\pi kn/N}$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}.$$

Posons : $e^{-j2\pi kn/N} = \cos(2\pi nk/N) - j\sin(2\pi nk/N)$.

La partie réelle s'écrit : $R_e = \sum_{k=0}^{N-1} x(n)\cos(2\pi nk/N)$.

La partie imaginaire s'écrit : $I_m = -\sum_{k=0}^{N-1} x(n)\sin(2\pi nk/N)$.

Si $x(n)$ représente une fonction paire alors sa TFD est paire et réelle, elle est donnée par :

$$X(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n)\cos(2\pi nk/N).$$

Si $x(n)$ représente une fonction impaire alors sa TFD est donnée par :

$$X(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n)\sin(2\pi nk/N).$$

1.3 Théorème de Parseval

L'égalité de Parseval dite parfois théorème de Parseval ou relation de Parseval est une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Application Soit une suite d'échantillons d'un signal donnée par : $x(0) = 1$, $x(1) = 1$ et $x(2) = 2$. Calculer sa TFD.

Sol : $X(0) = 4$; $X(1) = 1 + e^{-j2\pi/3} + 2e^{-j4\pi/3}$; $X(2) = 1 + e^{-j4\pi/3} + 2e^{-j8\pi/3}$

1.4 Transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform FFT)

La transformée de Fourier rapide (FFT) est une TFD calculée selon un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations.

Pour calculer la TFD donnée par : $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$, le nombre d'opérations, pour $k = 0 : (N - 1)$ est donnée par :

- N^2 multiplications (N pour k et N pour n)
- $N(N - 1)$ additions complexes ($N - 1$ pour chaque k)

Il existe de nombreux algorithmes de FFT, mais le plus connu est l'algorithme de Cooley-Turkey qui permet de réduire le nombre d'opérations à $\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$ multiplications et $\frac{N^2}{2}$ additions

2 Transformée en Z

La transformées en Z constitue un outil de base pour la conception des filtres numériques. La transformée en z est une généralisation de la transformée de Fourier, utilisée principalement dans le cas des systèmes récurrents. C'est en fait l'analogie de la transformée de Laplace des systèmes linéaires continus.

2.1 Définition de la transformée en Z

On définit la transformée en z de la suite $x(n)$, la fonction de la variable z , définie par : $X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$.

Pour des valeurs de z prises dans une couronne de la forme $\{C, R_1 < |z| < R_2\}$ que nous désignons par "domaine de convergence".

La TZ sous forme rationnelle La TZ se met souvent sous la forme d'un rapport de 2 polynômes en Z, $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$. Les valeurs de z qui annulent $N(z)$ sont les zéros et les racines du dénominateur sont les pôles. $X(z)$ diverge quand le dénominateur n'annule.

- Si les pôles sont à l'intérieur de la couronne de convergence alors les séquences sont causales.
- Si les pôles sont à l'extérieur de la couronne de convergence alors les séquences sont anti-causales.

2.2 Propriétés de la TZ

Linéarité $TZ(ax(n) + by(n)) = aX(z) + bY(z)$

Valeur initiale $\lim_{n \rightarrow 0} x(n) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z)$

Valeur finale $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$

Propriété du retard $Z\{x(n - k)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - k)z^{-n}$

Posons $n = m - k$;

$$Z\{x(n - k)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m)z^{-m-k} = z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m)z^{-m} = z^{-k}Z\{x(n)\}$$

Ainsi z^{-1} représentera un retard unité équivalent à une période d'échantillonnage.

2.3 TZ inverse

La TZ inverse est définie par l'expression suivante : $x(n) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\Gamma} X(k)z^{k-1}dz$
où Γ est un contour fermé qui entoure l'origine du plan de z .

2.4 Relation entre la transformée en Z et transformée de Fourier

La transformée de Fourier est obtenue en évaluant la transformée en z aux points $z = \exp(j\omega)$ (soient tous les points du cercle unité du plan complexe z) et la transformée de Fourier discrète est obtenue à partir de la transformée en z aux points $z = \exp(j2\pi k/N)$.

2.5 Applications

App1 Soit $y(n) = \delta(n)$, **Rep** $Y(z) = 1$

App2 $y(n) = u(n)$, **Rep** $Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, une progression géométrique

App3 $x(n) = [1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 0 \ 2]$, **Rep** $X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 2z^{-5}$

App4 $y(n) = \delta(n - n_0)$, **Rep** $Y(z) = z^{-n_0}$

Chapitre 6

Filtres numériques

Sommaire

1	Définition d'un filtre numérique	55
2	Equation récurrente d'un filtre et fonction de transfert	55
3	Filtres RIF et RII	56
4	Applications	56
5	Structures des filtres numériques	57

1 Définition d'un filtre numérique

Un filtre numérique ou filtre à temps discret est un système dont la sortie $y(n)$ est une suite décrite par :

$$y(n) = h(n) * x(n) = x(n) * h(n) \quad (1.1)$$

(* est la convolution)

Cas particulier : $y(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m)$; $y(n)$ ne dépend pas de $y(n-1)$

Dans la plupart des cas, on fait l'hypothèse de la linéarité et de l'invariance (les caractéristiques du filtre ne changent pas dans le temps).

2 Equation récurrente d'un filtre et fonction de transfert

Dans le cas général, l'équation (1.1) est équivalente à :

$$y(n) + a_1y(n-1) + \dots + a_p y(n-p) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_mx(n-m) \quad (2.1)$$

n, m et p sont des variables discrètes de temps.

En passant à la TZ, l'équation (2.1) devient :

$$Y(z) + a_1z^{-1}Y(z) + \dots + a_pz^{-p}Y(z) = b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) + \dots + b_mz^{-m}X(z) \quad (2.2)$$

La sortie du filtre est définie par : $Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}} X(z)$

La fonction de transfert du filtre ou transmittance s'écrit :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (2.3)$$

3 Filtres RIF et RII

En considérant l'équation (2.3) :

Si les $a_i = 0$ alors le filtre est un **RIF** (*réponse impulsionnelle finie*)

Si les $a_i \neq 0$ alors le filtre est un **RII** (*réponse impulsionnelle infinie*)

4 Applications

App1 Soit $y(n) = 1/2(x(n) + x(n-1))$. Calculer la TZ de $y(n)$

Rep la TZ de $y(n)$ est $Y(z) = 1/2(x(z) + z^{-1}X(z))$ et $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}$; le filtre est un RIF

App2 Soit $y(n) = 1/2(x(n) + y(n-1))$

Rep En appliquant la TZ, on aura $Y(z) = 1/2(x(z) + z^{-1}Y(z))$ et $H(z) = \frac{1/2}{1+1/2z^{-1}}$; le filtre est un RII

App3 Soit $y(n) = x(n)/2 + x(n-1)$

donner la réponse impulsionnelle du filtre $h(n)$

Rep $y(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m)$

$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + \dots$

$h(0) = 1/2$ et $h(1) = 1$ ou $h(n) = [1/2; 1]$

App4 Soit $x(n) = [0 : 3]$ et $h(n) = [11]$

Retrouver la sortie du filtre $y(n)$

Rep $y(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m)$

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + \dots$$

$$y(n) = x(n) + x(n-1)$$

$$y(0) = x(0) + x(-1) = x(0) = 0$$

$$y(1) = x(1) + x(0) = 1$$

$$y(2) = x(2) + x(1) = 3$$

$$y(3) = x(3) + x(2) = 5$$

La sortie $y(n)$ est donnée par $y(n) = [0; 1; 3; 5]$

5 Structures des filtres numériques

Prenons l'équation générale d'un filtre (équation (1.1)).

5.1 Structure d'un filtre RIF

Dans ce cas, $a_i = 0$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i x(n-i)$$

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{m-1} x(n-m+1)$$

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_{m-1} z^{-(m-1)} X(z)$$

La structure directe est donnée par la figure 6.1

5.2 Structure d'un filtre RII

$a_i \neq 0$ et $b_i \neq 0$

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{m-1} x(n-m+1) - a_1 y(n-1) - \dots - a_p y(n-p)$$

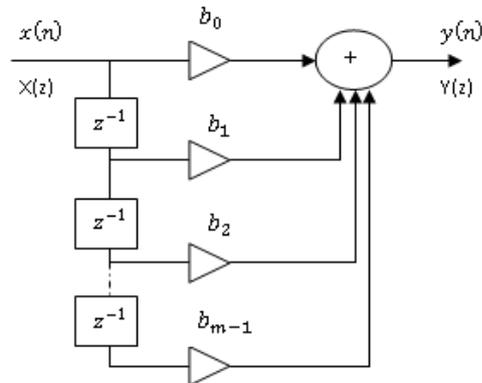


FIGURE 6.1 – Structure d'un filtre RIF

p)

$$\text{ou } y(n) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i x(n-i) - \sum_{j=1}^{P-1} a_j y(n-j)$$

$$\text{En passant à la TZ, } Y(z) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i z^{-i} X(z) - \sum_{j=1}^{P-1} a_j z^{-j} Y(z)$$

$$\text{Soit } Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_{m-1} z^{-m+1} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - \dots - a_p z^{-n+p} Y(z)$$

La structure est donnée sur la figure 6.2

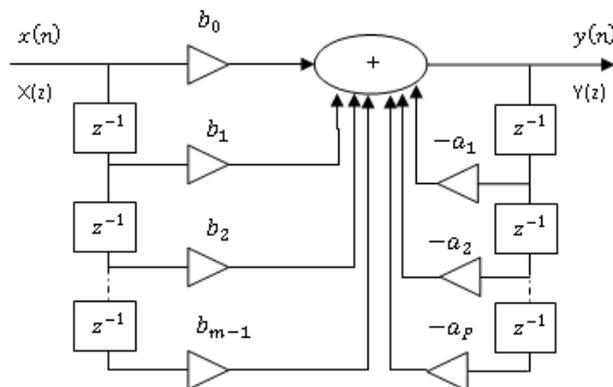


FIGURE 6.2 – Structure d'un filtre RII

5.3 Filtre moyennneur

L'équation d'un filtre moyennneur est (figure 6.3) :

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-N+1)}{N}$$

Le filtre moyennneur d'ordre 1 $y(n) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$

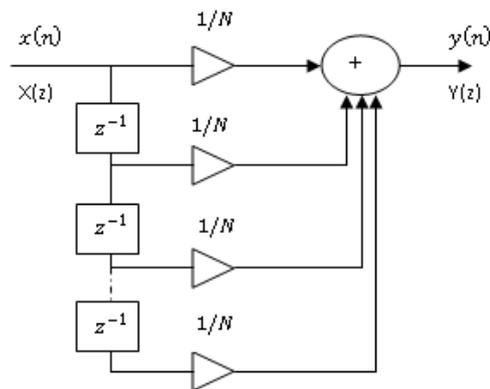


FIGURE 6.3 – Filtre moyennneur

5.4 Filtre du 2nd ordre

La forme du filtre (figure 6.4) du 2nd ordre s'écrit :

$$y(n) = \sum_{i=0}^2 b_i x(n-i) - \sum_{j=1}^2 a_j y(n-j)$$

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

$$\text{Soit } y(n) = 2x(n) + 3x(n-2) - y(n-1) - 4y(n-2)$$

5.5 Structure simplifiée

Soit le filtre (figure 6.5) du 2nd ordre d'équation de récurrence :

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z)$$

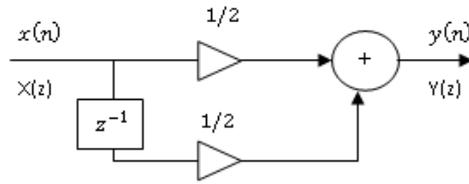
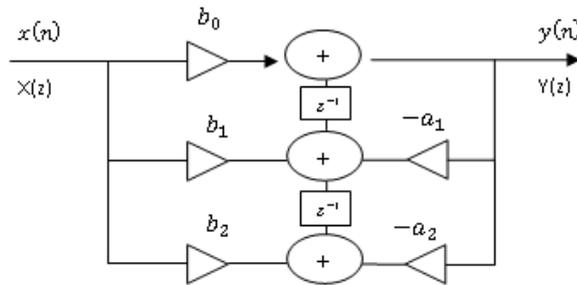


FIGURE 6.4 – Structure moyennneur d'ordre 2

$$Y(z) = b_0X(z) + [b_1X(z) - a_1Y(z)]z^{-1} + [b_2X(z) - a_2Y(z)]z^{-2}$$

$Y(z) = b_0X(z) + [[b_1X(z) - a_1Y(z)] + [b_2X(z) - a_2Y(z)]z^{-1}]z^{-1}$. Gain de 2 mémoires (retards)

FIGURE 6.5 – Structure simplifiée d'un filtre du 2nd ordre

5.6 Applications

App1 soit $y(n) = 0.25(x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3))$

– Trouver $H(z)$ (RIF ou RII). Est-il un RII ou RIF ?

– Donner la structure simplifiée du filtre

Rep $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{4} + \frac{z^{-1}}{4} + \frac{z^{-2}}{4} + \frac{z^{-3}}{4}$; Le filtre est un RIF

App2 $H(z)$ d'un filtre s'écrit : $H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-3}}{1+z^{-1}}$

Donner la structure directe et la structure simplifiée de ce filtre.

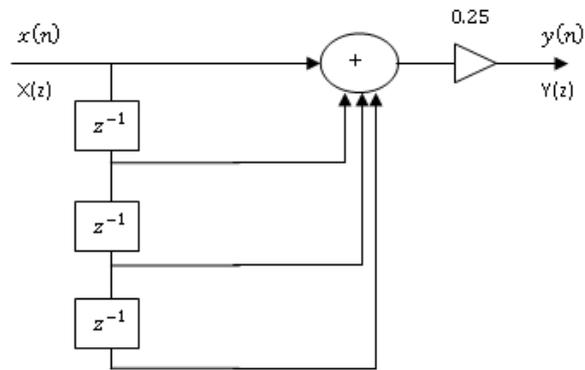


FIGURE 6.6 – Structure simplifiée App1

Rep

$$Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) + z^{-3}X(z) - z^{-1}Y(z) \quad (\text{figure 6.7})$$

$$Y(z) = X(z) + (2X(z) - Y(z))z^{-1} + z^{-3}X(z) = X(z) + [2X(z) - Y(z) + z^{-2}X(z)]z^{-1}$$

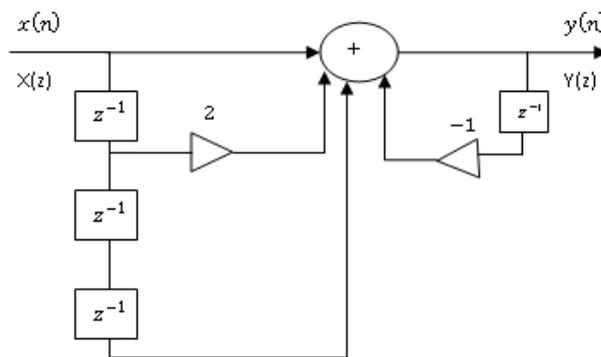


FIGURE 6.7 – Structure directe App2

Généralités sur les signaux analogiques

Exercice1 Tracer les signaux définis par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 & - g(t) = u(t+2) + 3u(t-2) \\
 & - \text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{si } t > 1 \end{cases} . \\
 & - \text{tri}(3t-2)
 \end{aligned}$$

Exercice2 Soit le signal $x(t)$ donné par la figure 1(a).

Tracer : $x(-t)$; $x(t+2)$; $x(2t+1)$; $x(1-3t)$; $x(t/3)$

Exercice3 Soit le signal $x(t)$ donné par la figure 1(b).

Tracer : $x(2t)$; $x(5t+3)$; $x(-t-1)$

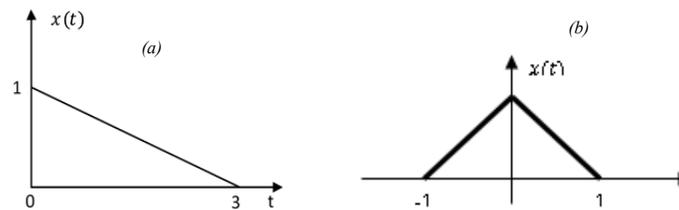


FIGURE 1 – Figure de l'exo2 et 3

Exercice4 Soit le signal donné par : $x(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 4 - 2t, & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Tracer $x(t)$; $x(t+1)$; $x(t/0.5)$; $x(-t+3)$
2. Calculer l'énergie E_x de $x(t)$

Exercice5 Soit le signal donné par $x(t) = \cos(\pi t)$.

Retrouver la valeur moyenne x_{moy} et x_{eff}

Exercice6 Soit le signal $v(t)$ dont la décomposition en série de Fourier est (en volts) :

$$v(t) = \cos(8) + 2[\sin\omega t + 13\sin(3\omega t) + 15\sin(5\omega t) + 17\sin(7\omega t) + \dots]$$

Dessiner son spectre en amplitude jusqu'à l'ordre 5 ?

Exercice7 Soient les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ donnés par ($f_0 = 1kHz$) :

$$x_1(t) = 6 - 2\cos(\omega_0 t) + 3\sin(\omega_0 t)$$

$$x_2(t) = 4 + 1.8\cos(2\omega_0 t) + 0.8\sin(6\omega_0 t)$$

Déterminer les harmoniques de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Exercice8 Soit le signal $x(t)$ présenté sur la figure 2 :

Donner la décomposition en série de Fourier du signal $x(t)$?

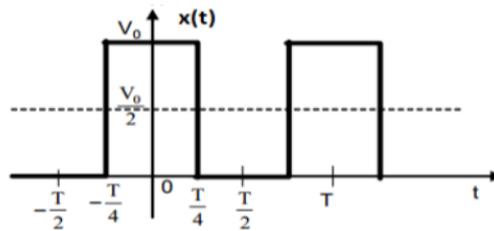


FIGURE 2 – Figure de l'exo8

Exercice9 Soit $x(t)$ donné par :

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$x(t)$ est-il périodique ? Calculer la transformée de Fourier (TF) de $x(t)$.

Exercice10 Considérons le signal carré périodique $x(t)$ représenté sur la figure 3. Retrouver le développement en série de Fourier complexe et tracer son spectre. Traiter les cas $a = T/4$ et

$a = T/8$. Déduire le développement de $y(t)$ (figure 3).

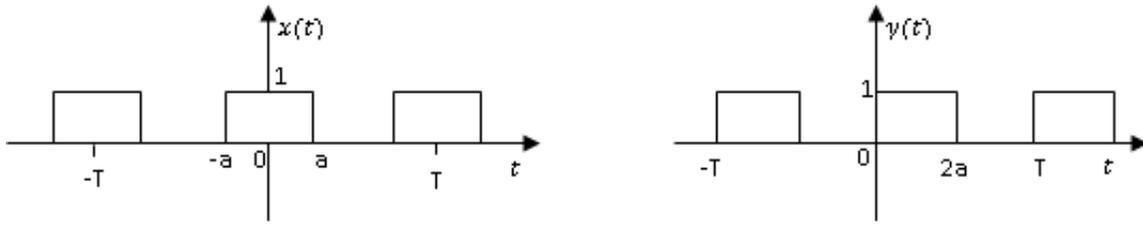


FIGURE 3 – Figure de l'exo10

Filtres analogiques

Exercice 1 Soit le filtre RC (figure 4).

1. Exprimer la fonction de transfert ($G(p) = U_s(p)/U_e(p)$) en fonction de R et C .
2. Déduire $G(f)$ (f : fréquence de U_e).
3. Quel est le type de ce filtre et quel son ordre ?
4. Exprimer la fréquence de coupure f_c en fonction de R et C .
5. Calculer la valeur du condensateur ainsi que la valeur de la tension de sortie du filtre pour $f_c = 627kHz$, $R = 6,8k\Omega$ et $U_e = 2V$

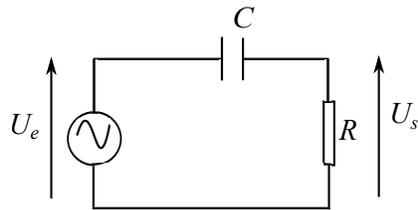


FIGURE 4 – Figure de l'exo1

Exercice 2

1. Donner le schéma d'un filtre RL passe-haut 1^{er} ordre.
2. Exprimer sa fonction de transfert $G(f) = \text{tension d'entrée} / \text{tension de sortie}$.
3. La résistance $R = 10k\Omega$ et $f_c = 3,5kHz$.

Une tension de $1,6V$ est mesurée à la sortie du filtre lorsqu'un signal de $7kHz$ est appliqué à l'entrée.

Calculer la valeur de la bobine ainsi que la valeur de la tension à l'entrée du filtre,

Exercice 3

1. Donner le schéma d'un filtre RL passe-bas 1^{er} ordre

2. Exprimer sa fonction de transfert $G(f) = \text{tension d'entrée} / \text{tension de sortie}$.
3. La résistance $R = 820\Omega$ et la fréquence de coupure $f_c = 10kHz$. Une tension de $1,91V$ est mesurée à la sortie du filtre lorsqu'un signal de $1kHz$ est appliqué à l'entrée. Calculer la valeur de la bobine ainsi que la valeur de la tension à l'entrée du filtre.

Exercice 4 Soit le circuit de la figure 5 $U_e = 10V$, $R = 10k$ et $L = 100mH$

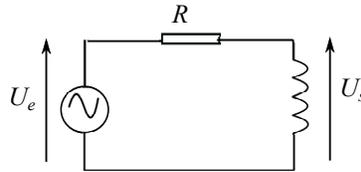


FIGURE 5 – Figure de l'exo4

1. Quelle est la fréquence de coupure du circuit ?
2. Que valent U_s , $Av(dB)$ et le déphasage Φ à la fréquence de coupure ?

Echantillonnage et quantification

Exercice 1 Soit le signal analogique donné par $x(t) = 5\sin(\omega_0 t)$ avec $f_0 = 50Hz$. On voudrait échantillonner ce signal à la fréquence $f_e = 110Hz$.

1. Retrouver l'expression du signal échantillonné.
2. Peut-on reconstituer le signal après échantillonnage? Pourquoi?
3. Ecrire l'expression $x(n)$ du signal après discrétisation.

Exercice 2 Quel est la fréquence d'échantillonnage et le nombre de bits nécessaires pour numériser un signal audio avec un convertisseur uniforme sachant que l'oreille humaine perçoit les sons jusqu'à $20Khz$ et que l'on souhaite une précision de 0.5% sur les amplitudes comprises entre $0.5\%Vfs$ et Vfs où Vfs représente l'amplitude pleine échelle du convertisseur? On supposera qu'il n'y a jamais écrêtage. On note N le nombre de bits du convertisseur uniforme.

Exercice 3 Soit le signal analogique donné par : $x(t) = 5\sin(\omega_1 t)$ et $y(x) = 3\cos(\omega_2 t)$ Avec $f_1 = 50hz$ et $f_2 = 52hz$. On voudrait échantillonner ces 2 signaux avec la fréquence $f_e = 500hz$ puis avec $f_e = 1,4Khz$.

1. Peut-on reconstituer les signaux après échantillonnage dans les deux cas? Pourquoi?
2. Ecrire l'expression de $x(n)$ et de $y(n)$ après discrétisation.

Exercice 4 On veut échantillonner le signal analogique $x(t) = 5\sin(\omega t)$

La fréquence du signal $f_0 = 50Hz$ et la fréquence d'échantillonnage est $f_e = 110Hz$.

1. Le théorème de Shannon est-il respecté? Justifier
2. Donner l'expression du signal discret obtenu $x(n)$.
3. Calculer les cinq (5) premières valeurs de $x(n)$.

Exercice 5 Quelle est la capacité mémoire nécessaire pour stocker une minute de signal téléphonique, sachant que ce signal a une fréquence maximale de $4Khz$ et qu'on le mémorise en respectant le théorème de Shannon et en utilisant la quantification uniforme à $8bits$ par échantillon?

Exercice 6 Soit le signal $x(t)$ causal donné par $x(t) = A \cos(\Theta(t))$ avec $\Theta(t) = 2\pi F_0 t + \pi \lambda t^2$ avec $F_0 = 1\text{kHz}$, $A = 5$ et $\lambda = 8.106$.

On échantillonne $x(t)$ avec la fréquence $F_e = 8\text{kHz}$.

1. Donner l'expression du signal échantillonné $x(n)$.
2. Calculer les valeurs de 6 échantillons de $x(n)$.

Transformée de Fourier Discrète (TFD) et Transformée en Z (TZ)

Exercice 1 Soit le signal analogique donné par : $x(t) = 5 \sin(\omega_1 t)$ et $y(t) = 3 \cos(\omega_2 t)$ Avec $f_1 = 50 \text{ Hz}$ et $f_2 = 52 \text{ Hz}$.

1. On voudrait échantillonner ces 2 signaux à la fréquence $f_e = 500 \text{ Hz}$ et $f_e = 1,4 \text{ KHz}$. Peut-on reconstituer les signaux après échantillonnage dans les deux cas ? Pourquoi ?
2. Ecrire l'expression de $x(n)$ et de $y(n)$ après discrétisation.

Exercice 2 Soient deux signaux $x(n)$ et $y(n)$ donnés par (figure 6). Calculer les TFD de $x(n)$ et $y(n)$

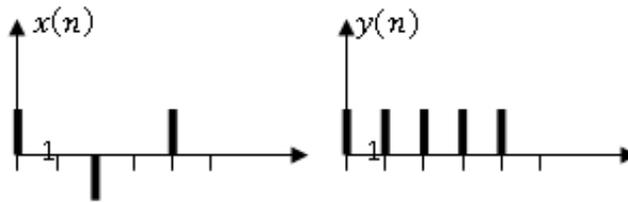


FIGURE 6 – Figure de l'exo2

Exercice 3 Soit le signal analogique donné par $x(t) = 5 \sin(\omega_0 t)$ avec $f_0 = 50 \text{ Hz}$. Calculer la TFD de ce signal pour un nombre d'échantillons $N=4$.

Exercice 4 Soit la transformée en z donnée par $X(z) = 9 + 0.5z^{-2} + 5z^{-4} + 2z^{-5}$. Retrouver $x(n)$.

Exercice 5 Soit la série d'échantillons d'un signal causal, donnée par : $x(n) = [011143]$. Calculer la TZ de $x(n)$

Exercice 6 Soit le signal $x(t)$ causal donné par : $x(t) = A \cos(\Theta(t))$ avec $\Theta(t) = \omega_0 t + \pi \lambda t^2$ avec $F_0 = 1\text{kHz}$, $A = 5$ et $\lambda = 8.106$. On échantillonne $x(t)$ avec la fréquence $F_e = 8\text{kHz}$. Calculer la TFD de $x(n)$ (4 échantillons). Calculer la TZ de $x(n)$ (pour 4 échantillons)

Filtres numériques

Exercice 1 Un filtre numérique est défini par sa transmittance.

Ecrire l'algorithme correspondant à ce filtre.

Exercice 2 On considère le filtre décrit par $y(n) = x(n) - x(n - 1)$

1. Donnez la fonction de transfert $H(z)$ du filtre
2. Donnez sa réponse impulsionnelle
3. Donnez sa réponse indicielle

Exercice 3 Un filtre numérique est caractérisé par l'algorithme

1. Retrouver sa transmittance $H(z)$
2. Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle infinie ?

Exercice 4 On considère le filtre décrit par : $y(n) = x(n) + x(n - 1) + x(n - 2) + \dots + x(n - 8)$

1. Donner la fonction de transfert en z , $H(z)$
2. Donner la réponse impulsionnelle
3. Montrez que cette équation s'écrit également $y(n) = y(n - 1) + x(n) - x(n - 9)$
4. En déduire une autre expression de $H(z)$
5. Donner la fonction de transfert $H(f)$ du filtre
6. Donner la sortie du filtre à une sinusoïde d'amplitude 1 et de fréquence réduite $f_0 = 1/9$

Exercice 5

I Soit le filtre donné par sa transmittance :

Donner la structure de ce filtre.

II Soit le filtre numérique représenté par sa structure directe donnée 7 :

1. Retrouver l'équation de récurrence de ce filtre.

2. Ecrire l'expression de la transmittance $H(z)$ du filtre.
3. Quelle est la nature de ce filtre (*RIF* ou *RII*) ? Justifier.
4. On injecte à l'entrée de ce filtre la séquence $x(n)$. Quelle sera la réponse $y(n)$ du filtre ?
(Donner 3 échantillons)

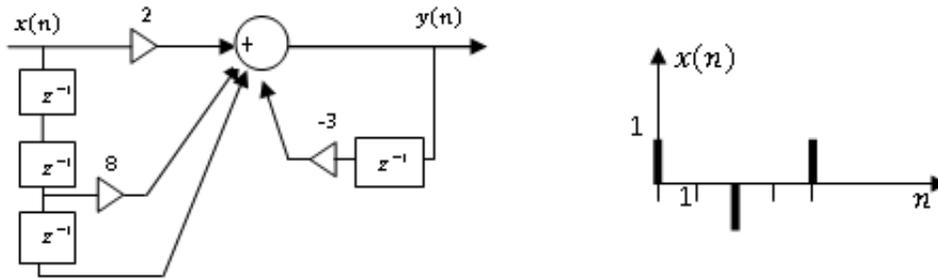


FIGURE 7 – Figure de l'exo5

Note

L'étudiant doit remettre un compte rendu à la fin de chaque TP. Le compte rendu doit contenir : But du TP, résultats (figures, images, valeurs), interprétation des résultats et conclusion. La duplication d'un compte rendu est strictement interdite et sera sanctionnée d'un zéro.

La note du TP est calculée comme suit (note de la pratique/10+note du compte rendu/10).

TP 1 de TNS – Généralités sur les Signaux

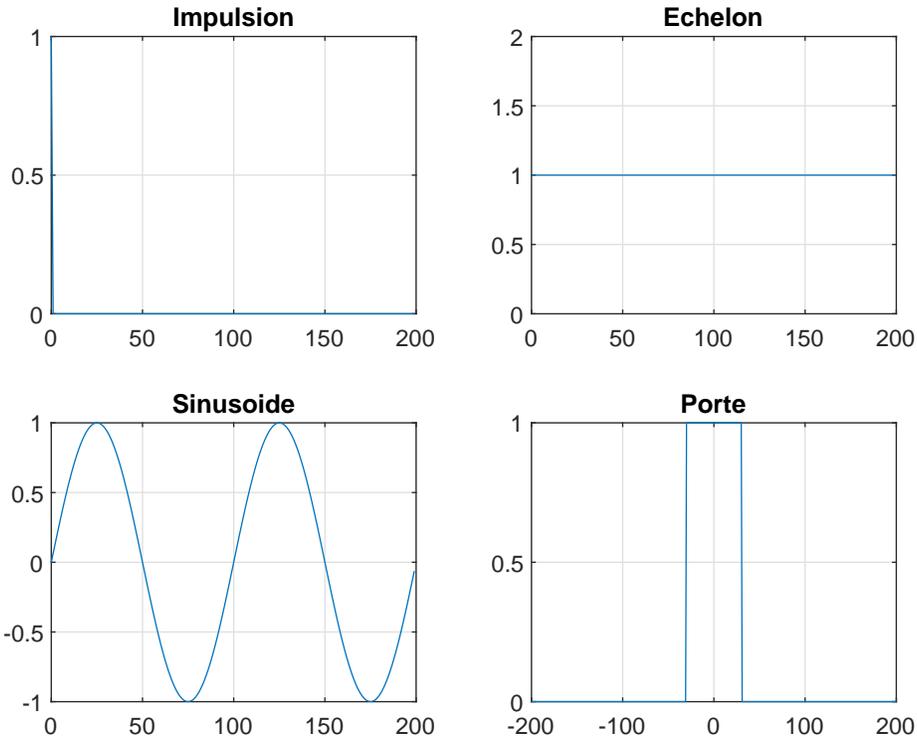
Manipulation 1

Ecrire un programme chargé d'engendrer et tracer sur la même figure, les signaux de base

- Sur l'intervalle $[0: N-1]$ avec $N=200$
 - Sinusoïde de fréquence 50Hz (Prendre d'autres valeurs de fréquence pour voir)
 - Impulsion Unité (utiliser `eye(1,N)`)
 - Echelon Unité (utiliser `ones(1,N)`)
- Une Porte de 2^*P+1 points avec $P=30$ sur l'intervalle $[-N : N]$. (utiliser `zeros(1,N-P)` et `ones(1, 2^*P+1)`)

```
clear all;
N= 200; temps = [0:N- 1];
impuls = eye (1,N); %impulsion éunit
echelu = ones (1,N); %echelon éunit
f0 = 0.01; fsin = sin (2*pi*f0*temps); % sinusoïde
P= 30; tps2 = [-N:N];
figure;
```

```
porteP = [zeros (1,N-P), ones (1,2*P+ 1), zeros (1,N-P)];
subplot (221); plot (temps ,impuls); grid;
title ('Impulsion ')
subplot (222); plot (temps ,echelu); grid;
title ('Echelon ')
subplot (223); plot (temps ,fsin); grid;
title ('Sinusoïde ')
subplot (224); plot (tps2 ,porteP); grid;
title ('Porte ')
```



Manipulation 2

Dans un même programme

Générer 128 points de la séquence : $x(n) = A \sin(\pi n/12)$ avec $A = 5$

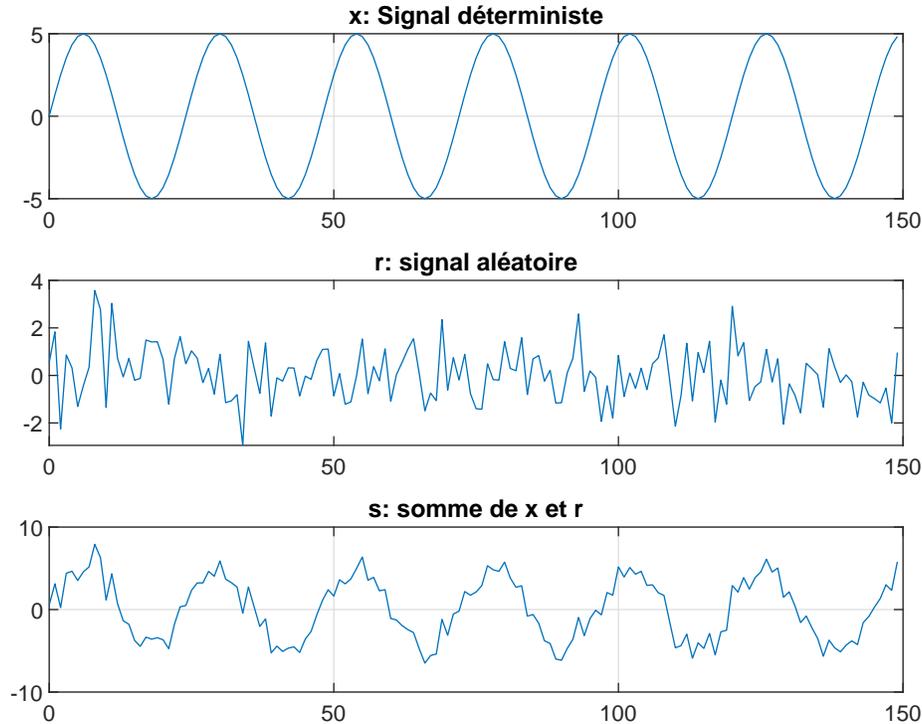
Puis à l'aide de la fonction **randn**, générer 128 points de la séquence $r(n)$ et tracer dans sur la même figure $x(n)$ et $s(n) = x(n) + r(n)$

Prendre des valeurs différentes pour A (0.05 et 50)

```
N = 150;
n = 0:N-1;
x = 5*sin(pi*n/12); % prendre A= 0.05 et A= 50
r = randn(1,N);
s = x + r;
figure;
subplot(311)
plot(n,x)
title('x: Signal édterministe ')
grid
subplot(312)
plot(n,r)
title('r: signal éalatoire ')

```

```
subplot(313)
plot(n,s)
title('s: somme de x et r')
grid
```



Manipulation 3

Considérons une sinusoïde de fréquence 100Hz . Réaliser un programme qui permet d'échantillonner ce signal sur une durée de 80ms (soit 0.08s) avec une fréquence d'échantillonnage égale à 200Hz et 1500 . Conclure

R* : Utiliser la fonction **plot** puis **stem** pour le tracé

```
f0 = 100;
% duree = 0.08;
Fe1 = 200; Fe2 = 1500;
tps1 = 0:1/Fe1:0.08; tps2 = 0:1/Fe2:0.08;
s1 = 3*sin(2*pi*f0*tps1); s2 = 3*sin(2*pi*f0*tps2);
figure;
subplot(211); stem(tps1,s1); title('pour f = 200hz'); ...
grid;
```

```
subplot(212); stem(tps2,s2); title('pour ...
f = 1500hz'); grid;
```

Manipulation 4

Considérons le signal $x(t)$ donné par : $x(t) = A\cos(\theta(t))$ avec $\theta(t) = 2\pi F_0 t + \pi\lambda t^2$

On échantillonne $x(t)$ avec la fréquence d'échantillonnage de $F_e = 8000\text{Hz}$ pendant une durée de 2s . $F_0 = 1000\text{Hz}$ et $\lambda = 1000$.

Ecrire le programme qui engendre les échantillons de $x(t)$ et qui convertit ces échantillons en un signal continu et sonore. Utiliser la fonction `soundsc(x, Fe)`.

```
lambda = 1000;
Fe = 8000;
F0 = 2310;
T = 2;
t = 0:0.00001:0.06;
y = cos(2*pi*F0*t);
figure;
% plot(t,y);
% it = (0:Fe*T-1)/Fe;
it = 0:1/Fe:2;
theta = 2*pi*F0*it + pi*lambda*(it.^2);
x = cos(theta);
figure;
plot(it,x,'b')
soundsc(x,Fe) % La fonction soundsc èègnre un signal ...
sonore
```

TP 2 (Transformée de Fourier Directe (TFD) / Transformée de Fourier Rapide (FFT))

Introduction

La transformée de Fourier est un outil mathématique de traitement du signal qui permet de passer d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle du signal. Cette théorie est basée sur le fait que toute fonction périodique est décomposable sur une base de sinus et de cosinus. Ainsi, on peut passer d'une représentation temporelle du signal (dans le repère temporel classique) à une représentation en fréquence sur une base de sinus et de cosinus (dans le repère fréquentiel). La puissance de cet outil réside dans le fait que cette transformée est réversible et qu'elle peut être étendue aux signaux non périodiques (qu'on considère alors comme de période infinie).

Le but de ce TP est de programmer et de simuler quelques concepts théoriques de l'analyse de Fourier.

Indications

La Transformée de Fourier Discrète d'un signal de N points est calculée par un algorithme rapide (Fast Fourier Transform FFT) : $X = \text{fft}(x)$

C'est également un signal (à valeurs complexes) de N points échantillonnés à la fréquence Nf_e . Le vecteur des fréquences qui lui est associé est : $f = (0 : N - 1) / N * f_e$

Rappelons que ce signal est de période f_e , on peut le représenter sur l'intervalle $[-f_e/2; 2; f_e/2]$ Grâce à la fonction `fftshift` (qui ne fait qu'un décalage des vecteurs et aucun calcul) : $Y = \text{fftshift}(X)$;

Le vecteur des fréquences qui lui est associé est alors : $f = (0 : N - 1) / N * f_e - f_e/2$;

Partie théorique

La TFD est un outil de base pour le traitement numérique du signal. Elle transforme une séquence de données du domaine temporelle en une séquence de données dans le domaine fréquentielle. La TFD est définie comme suit : $X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi kf}$ (I)

1. Transformer l'équation (I) sous forme matricielle pour $N=4$.
2. Donner l'algorithme et écrire le programme qui permet de calculer $X(k)$ pour une séquence quelconque $x(n)$.

Partie pratique

Manipulation 1

Reprendre l'expression de la TFD d'un signal donnée par

Ecrire le programme permettant de retrouver les échantillons de $x(n) = [0111001014201]$. Vérifier vos résultats en utilisant la fonction `fft`.

```
x = [0 1 1 1 0 0 1 0 1 4 2 0 1];
% s = [0 0 0 0 0 0];
N = 13;
r = zeros(1,N);
for k = 1:13
    for n = 1:13
        r(k) = r(k) + x(n)*exp(-j*2*pi*(n-1)*(k-1)/13);
    end
end
r;
s = fft(x);
```

Manipulation 2

Ecrire et exécuter le programme suivant :

```
% Génération du signal
Fe = 8e3;
N = 512;
t = (0:N-1)/Fe;
x = square(2*pi*Fe*t/50);
% TFD sur [0, Fe]
X = fft(x);
f = (0:N-1)/N*Fe;
% Affichage
figure;
subplot(1,2,1); plot(t,x);
xlabel('temps t'), ylabel('x(t)');
subplot(1,2,2); plot(f(1:N/2),abs(X(1:N/2)));
xlabel('fréquence f'), ylabel('X(f)');
```

1. Que calcule ce programme ?
2. Donner la valeur de la composante continue et de la fondamentale en précisant les fréquences correspondantes.

Manipulation 3

Soit $x(t) = 5 \sin(8\pi t)$ échantillonné avec une fréquence $F_e = 16\text{Hz}$. Donner les valeurs de sa TFD pour un nombre d'échantillons égal à 8. Interpréter les résultats.

```
m = 0:7;
y1 = 5*sin(8*pi*m/16);
z = fft(y1);
figure;
stem(abs(z))
```

Manipulation 4

3/ Soit le signal composé donné par $x(t) = 2 \cos(100\pi t) + \cos(400\pi t)$ échantillonné à 1000Hz

4/ Faire le programme qui permet de calculer la fft de $x(t)$ sur un intervalle de temps $[0, 0.6]$

```
n = 0:1/1000:0.6;
x = 2*cos(100*pi*n) + cos(400*pi*n);
```

```
% plot(x)
y = fft(x);
Sign = y.*conj(y)/(600*600);
% figure;
figure;
plot(abs(y));
figure;
plot(Sign);
% figure;
% plot(angle(Sign));
```

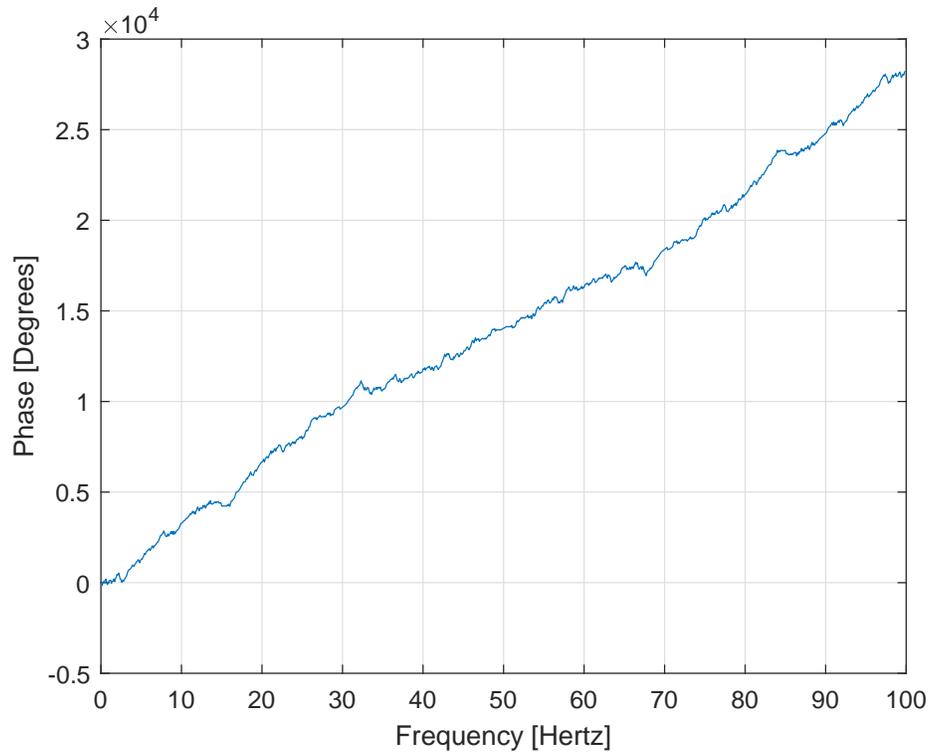
Manipulation 5

5/ Taper le programme suivant. Donner et interpréter les résultats obtenus.

```
n = 0:1/100:10-1/100;
x = sin(2*pi*15*n) + sin(2*pi*40*n);
y = fft(x);
m = abs(y);
p = angle(y);
f = (0:length(y)-1)'*100/length(y);
figure;
subplot(2,1,1), plot(f,m),
ylabel('Abs. Magnitude'), grid on
subplot(2,1,2), plot(f,p*180/pi)
ylabel('Phase [Degrees]'), grid on
xlabel('Frequency [Hertz]')
```

6/ Remplacer l'instruction $p = \text{angle}(y)$ par $p = \text{unwrap}(\text{angle}(y))$. Que corrige cette fonction ?

```
p1 = unwrap(angle(y));
f = (0:length(y)-1)'*100/length(y);
figure; plot(f,p1*180/pi);
ylabel('Phase [Degrees]'), grid on
xlabel('Frequency [Hertz]')
```



TP 3 (Filtres analogiques)

Introduction

Nous nous intéresserons ici uniquement aux fonctions utiles pour la représentation fréquentielle des systèmes linéaires et aux fonctions de filtrage et de synthèse de filtres analogiques.

La réponse en fréquence d'un système analogique est donnée par :

$$H = \text{freqs}(b, a, w);$$

H est la réponse en fréquence aux pulsations données dans le vecteur w (en radian par seconde). Si w_b est la pulsation basse de coupure et w_h la pulsation haute de coupure, alors la pulsation propre du filtre w_0 et la largeur de bande du filtre sont données par : $B = w_h - w_b$ $w_0 = \sqrt{w_b w_h}$.

Manipulation 1(Réponse d'un filtre analogique)

{ La réponse en fréquence d'un système analogique est donnée par :

```
%>> H=freqs(b,a,w);
```

H est la réponse en fréquence aux pulsations données dans le vecteur w (en rad/s).

{ La réponse en fréquence d'un système numérique est donnée par :

```
%>> H=freqz(b,a,f,fe);
```

H est la réponse du système aux fréquences données dans le vecteur f (en Hertz) et fe la fréquence d'échantillonnage.

Voir l'aide en ligne pour plus de détails. . .

Remarque : Matlab, travaille en pulsation pour les systèmes analogiques et en fréquence pour les systèmes numériques.

Manipulation 2 (Synthèse de filtres analogiques passe-bas)

Les fonctions suivantes renvoient les pôles (p) zéros (z) et gain (k) des filtres analogiques passe-bas normalisés (pulsation de coupure unité) :

% Filtre de Butterworth

```
%>> [z, p, k] = buttap(n) ;
```

% Filtre de Chebychev

```
%>> [z, p, k] = cheb1ap(n, Rp) ; %ou
```

```
%>> [z, p, k] = cheb2ap(n, Rs) ;
```

% R_p dB en bande passante

% de R_s dB en bande coupée

%Elliptique

```
%>> [z, p, k] = ellipap (n, Rp, Rs) ;
```

Pour obtenir une représentation de ces filtres analogiques en terme des numérateurs et dénominateurs de leur fonction de transfert (transformée de Laplace de leur réponse impulsionnelle) :

```
%>> [b, a] = zp2tf(z,p,k) ;
```

Pour $n=3$, générer les fonctions de transfert des filtres de Butterworth, de Chebychev et elliptique.

TP 4 (Filtrage numérique)

Introduction

Matlab et sa boîte à outils Signal Processing, contiennent un grand nombre de fonctionnalités concernant, la génération de signaux, la représentation des signaux, transformée de Fourier discrète FFT, l'analyse des signaux (statistique, analyse spectrale paramétrique), la représentation des systèmes linéaires (fonction de transfert, espace d'état), l'analyse des systèmes (réponse impulsionnelle, réponse en fréquence), le filtrage et la synthèse de filtres.

La réponse en fréquence d'un système numérique est donnée par : $H = \text{freqz}(b, a, f, fe)$;

H est la réponse du système aux fréquences données dans le vecteur f (en Hertz) et fe la fréquence d'échantillonnage.

Le filtrage du vecteur x par le filtre numérique défini par a et b est effectué par : $y = \text{filter}(b, a, x)$;

Manipulation 1(Filtre RIF)

On considère la réponse du filtre défini par l'algorithme $y(n) = 0.5x(n) + 0.3x(n-1) + 0.2x(n-2)$

1. Tracer la réponse du filtre au signal suivant :
 1. Tracer la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle de ce filtre
 2. Combien de termes non nuls comporte sa réponse impulsionnelle ?
 3. A partir de la réponse impulsionnelle, établir l'expression de sa transmittance $H(z)$
 4. A partir des valeurs du tableau ci-dessous, tracer le spectre $H(f)$. En déduire la fréquence de coupure et le type de filtre.

```
x1 = [ 1 0 0 0 0 0 0 ]; %impulsion
x2 = [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
n = 0:1:100;
x3 = sin(2*pi*50*n) + randn(1,101); %érponse du ...
      filtre à un signal sinusoidal ébruit
y1 = filter([0.5 0.3 0.2],1,x1);
y2 = filter([0.5 0.3 0.2],1,x2);
y3 = filter([0.5 0.3 0.2],1,x3);
subplot(211)
stem(x1)
subplot(212)
stem(y1)
figure;
subplot(211)
stem(x2)
```

```
subplot(212)
stem(y2)
figure
subplot(211)
plot(x3)
subplot(212)
plot(y3)
```

Manipulation 2 (Filtre RII)

Soit le filtre décrit par l'équation aux différences suivante :

$$Y(n) = 1.7654y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n) + 0.5x(n-1)$$

Retrouver la réponse impulsionnelle de ce filtre (20 échantillons).

```
x = eye(1,20); %impulsion
h = filter([1 0.5],[1 -1.7654 0.81],x); %érponse ...
      implulsionnelle
```

Manipulation 3 (fonction H(z) d'un filtre)

Soit le programme suivant :

```
%-----
```

```
clear

A = 1;
M = 4096;
Px = A * A / 3;
x = 2 * A * (rand(1, M) - 0.5);
% disp('Titre ');
b(1) = 1;
a(1) = 1;
% disp('numérateur ')
b(2) = 0.5;
b(3) = 1.5;
% disp('denominateur ')
a(2) = 0.25;
a(3) = 0.75;
[hx, w] = freqz(b, a, 512);
f = w / (2 * pi);
```

```

g = 20 * log10(abs(hx));
phas = 180 * unwrap(angle(hx)) / pi;
figure;
subplot(121)
plot(f, g)
title('Gain du filtre ')
xlabel('freq ')
ylabel('dB')
grid
subplot(122)
plot(f, phas)
title('Phase du système ')
xlabel('freq. ')
ylabel('deg. ')
grid

```

Vérifier les résultats et expliquer les différentes instructions. Supprimer quatre instructions inutiles.

Manipulation 4 (Structures de filtres)

Soit la structure suivante d'un filtre moyenneur :

Reproduire cette structure sur simulink. Visualiser les résultats sur les oscilloscopes.

Manipulation 5 (Construction d'images)

Ecrire et exécuter le programme suivant. Analyser les résultats. Modifier les valeurs surlignées

```

x1 = ones(6,1)*ones(1,6);
figure;
subplot(221); imagesc(x1)
h1 = [0 1 0 ; 1 1 1 ; 0 1 0];
h2 = [0 1 1 0 ; 1 1 1 1 ; 0 1 1 0];
h3 = [0 1 1 0 ; 1 1 1 1 ; 1 1 1 1 ; 0 1 1 0];
y1 = filter2(h1,x1); subplot(222); imagesc(y1)
y2 = filter2(h2,x1); subplot(223); imagesc(y2)
y3 = filter2(h3,x1); subplot(224); imagesc(y3)

```

Manipulation 6 (Filtrage d'images)

Soit le programme suivant qui permet de filtrer une image

```
I = imread('eight.tif');
J = imnoise(I,'salt & pepper',0.02);
K = medfilt2(J);
figure;
subplot(221); imshow(J)
subplot(222); imshow(K)
```

1. Exécuter ce programme
2. Décrire les différentes instructions
3. Quel filtre a été utilisé ?

Manipulation 7 (Application de la TF)

Soit le programme suivant qui fait appel à la transformée de Fourier directe et inverse (fft et ifft). Exécuter ce programme en apportant les modifications nécessaires. Que fait ce programme ?

```
close all
img = imread('C:\Users\Toshiba\Pictures\im3.jpg');
img = im2double(img);
figure; subplot(1,3,1); imshow(img)
fourier = fft2(img);
subplot(1,3,2); imshow(real(fourier));
```

```
a = input('introduire la valeur de a = ')
```

```
a = 123
```

```
if a == 123
retour = ifft2(fourier);
figure; imshow(real(retour));
end
```

-
- [1] Maurice Bellanger, Traitement numérique du signal : Théorie et pratique, 9ième édition, Dunod, Paris, 2012.
- [2] Etienne Tisserand Jean-François Pautex Patrick Schweitzer, Analyse et traitement des signaux méthodes et applications au son et à l'image 2ième édition, Dunod, Paris, 2008.
- [3] Patrick Duvaut, François Michaut, Michel Chuc, Introduction au traitement du signal - exercices, corrigés et rappels de cours, Hermes Science Publications, 1996.
- [4] Francis Cottet, Traitement des signaux et acquisition de données - Cours et exercices corrigés, 4ième édition, Dunod, Paris, 2015.
- [5] Tahar Neffati, Traitement du signal analogique : Cours, Ellipses Marketing, 1999.
- [6] Messaoud Benidir, Théorie et traitement du signal : Méthodes de base pour l'analyse et le traitement du signal, Dunod, 2004.
- [7] G. Binet. Traitement Numérique du Signal, Signaux et systèmes discrets. Ellipse, 2013.
- [8] M. Brancovan. Distributions transformation de Fourier et de Laplace. Les Presses de l'ENSTA, 1990
- [9] T. Dutoit and F. Marques. Applied Signal Processing, A MATLAB-Based Proof of Concept. Springer, 2009.
- [10] C. Gasquet and P. Witomski. Analyse de Fourier et applications, filtrage, calcul numérique, ondelettes. Sciences sup. Dunod, 2003
- [11] E.W. Kamen and B.S. Heck. Fundamentals of Signals and Systems using the WEB and MATLAB. Pearson Prentice Hall, 2007
- [12] J. Max and J.L. Lacoume. Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, tome 1. Masson, Paris, 1996.
- [13] E. Tisserand, J.F. Pautex, and P. Schweitzer. Analyse et Traitement des Signaux. Sciences sup. Dunod, 2004.
- [14] M. Benidir. Théorie et Traitement du signal, tome 1 : Représentation des signaux et des systèmes - Cours et exercices corrigés. Dunod, 2004.
- [15] Ph. Réfrégier. Théorie du bruit et applications en physique. Hermès (Lavoisier), 2002.
- [16] Guy Binet : Traitement numérique du signal - Signaux et systèmes discrets. Ellipses, 2013.
- [17] Maitine Bergounioux, Mathématiques pour le traitement du signal : Cours et exercices corrigés, Paris, Dunod, coll. « Sciences sup », 2014.
- [18] Maurice Bellanger (préf. Pierre Aigrain), Traitement numérique du signal : théorie et pratique, Paris, Dunod, coll. « Sciences sup », 2006.
- [19] A.W.M. Van Den Enden et N.A.M. Verhoeckx (trad. de l'anglais par B. Fridel), Traitement numérique du signal : une introduction, Paris, Dunod, 2003.
- [20] Jean-Noel Martin, Débuter en traitement numérique du signal : applications au filtrage et au traitement des sons, éditions Ellipses, 2005.