Université A. Mira de Béjaia
Département de Technologie
1ère Année Technologie

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Année Universitaire 2023-2024

Examen de l'algèbre 1 — Parcours Ingénieur — Durée :1h30

Remarque *Les étapes nécessaires de la résolution seront prises en compte.*

Exercice 1 *(08 points)*

Soient $z_1 = \sqrt{3} - i$ *et* $z_2 = -1 + i$ deux nombres complexes.

1. Donner les formes trigonométriques des nombres complexes suivants:
$$z_1 \ , \ z_2 \ , \ z_1 z_2 \text{ et } \frac{z_2}{z_1}.$$
2. En déduire les valeurs exactes de
$$\cos\frac{11\pi}{12} \ et \ \sin\frac{11\pi}{12}.$$
3. Trouver les racines carrées de: $z = -3 + 4i$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante:
$$z^2 - (3+4i)z + (-1+5i) = 0.$$

Exercice 2 *(05 points)*

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{N}$ comme suit:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: y = nx$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
2. L'ordre est il total ?

Exercice 3 *(07 points)*

Soit l'application $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par : $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

1. Calculer $f(5), f(-1)$, f est-elle injective ?
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10 + f(x) = 0$, f est-elle surjective ?
3. Déterminer l'image directe de $[0 \ \ 4]$, $\mathbb{R}$ par f.
4. Déterminer l'image réciproque de $[-5 \ \ \ 7]$ par f.
5. Donner des intervalles I et J, tels que l'application $f: I \to J$, soit bijective, puis déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Bonne chance
Pr. BOUKOUCHA

Corrigé de l'Examen de l'Algèbre I

Exercice 1. *Solution.* (8 points)

1) Donnons la forme trigonométrique des complexes suivants:

La forme trigonométrique de $z_1 = \sqrt{3} - i$.

On a: $z_1 = \sqrt{3} - i$, *donc* $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Soit $\theta_1 \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* z_1, *donc on a:*

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{x_1}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\theta_1 = \dfrac{y_1}{|z_1|} = \dfrac{-1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}.$$

1

Alors, $z_1 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$ *est la forme trigonométrique de* z_1.

La forme trigonométrique de $z_1 = -1 + i$.

On a: $z_2 = -1 + i$, *donc* $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Soit $\theta_2 \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* z_2, *donc on a:*

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{x_2}{|z_2|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\theta_2 = \dfrac{y_2}{|z_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}.$$

1

Alors, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ *est la forme trigonométrique de* z_2.

La forme trigonométrique de $z_1 z_2$.

On a: $z_1 z_2 = \left[2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right]\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ *est la forme trigonométriques de* $z_1 z_2$.

0,75

La forme trigonométrique de $\dfrac{z_2}{z_1}$

On a: $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ *est la forme trigonométriques de* $\dfrac{z_2}{z_1}$.

0,75

2) ***En déduisons les valeurs exactes de*** $\cos\dfrac{11\pi}{12}$, $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

On a: $\dfrac{11\pi}{12}$ est l'argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$, on écrit d'abord $\dfrac{z_2}{z_1}$ sous la forme algébrique.

On a: $\dfrac{z_2}{z_1} = \left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}-i}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}i-1}{3+1}$ 0,5

$= \dfrac{-1-\sqrt{3}}{4} + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}i$ est la forme algébrique de $z_1 z_2$.

Par identification la forme algébrique et la forme trigonométrique de $\dfrac{z_2}{z_1}$, on obtient:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \cos\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$ 1

3) Trouvons les racines carrées de: $z = -3+4i$.

On pose $\delta = a+ib$ une racine carrée de z, donc:

$$\delta^2 = -3+4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \ldots\ldots (1) \\ 2ab = 4 \qquad \ldots\ldots (2) \\ a^2 + b^2 = 5 \quad \ldots\ldots (3) \end{cases}$$ 0,5

De (1) + (3) on a: $2a^2 = \acute{e}$ où $a = 1$ ou $a = -1$, de l'équation (2) on aura:

Si $a = 1$ on obtient $b = \dfrac{4}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$ et Si $a = -1$ on obtient $b = \dfrac{4}{2a} = \dfrac{4}{-2} = -2$ 1

Donc, $\delta = 1+2i$ ou $\delta = -1-2i$ sont les racines carrées de $-3+4i$.

4) Résolvons l'équation $z^2 - (3+4i)\,z + (-1+5i) = 0$.

Le discriminant vaut $\triangle = (3+4i)^2 - 4\,(1)\,(-1+5i) = 9-16+24i+4-20i = -3+4i$. 0,5

On a : $\triangle = -3+4i = (1+2i)^2$ (Car $\delta = 1+2i$ est une racine carrée de $-3+4i$). Alors,

$z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a} = \dfrac{(3+4i)-(1+2i)}{2\,(1)} = 1+i$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a} = \dfrac{(3+4i)+(1+2i)}{2\,(1)} = 2+3i$

Donc, $S = \{1+i, 2+3i\}$ est l'ensemble de solution de l'equation.

0,5 0,5

Exercice 2. ***Solution.*** (05points)

1) Montrons que R ***est une relation d'ordre.***

Réflexivité de $\mathcal{R}$? : $(\forall x \in \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}x)$?

Soit $x \in \mathbb{N}$. On a : $x = 1.x$, donc, $\exists k = 1 \in \mathbb{N} : x = 1.x$, d'où, $x\mathcal{R}x$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}x$, alors la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.......(i) 0,5

Antisymétrie de $\mathcal{R}$***?*** $(\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y)$?

Soient $x, y \in \mathbb{N}$. On suppose $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ et on démontre $x = y$.

$$On\ a: \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} : y = kx \\ \exists k' \in \mathbb{N} : x = k'y \end{cases}$$

0,5

$$\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : y = k\,(k'y)$$
$$\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : y = (kk')\,y.$$

Donc $kk' = 1$ ce qui implique que $k = k' = 1$ car $k, k' \in \mathbb{N}$ et par suite $x = y$. Alors $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$. 1

D'où la relation $\mathcal{R}$ est antisymétrie........(ii)

Transitivité de $\mathcal{R}$? $\quad (\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z)$?

Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$. On suppose $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ et on démontre $x\mathcal{R}z$.

$$On\ a: \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} : y = kx \\ \exists k' \in \mathbb{N} : z = k'y \end{cases}$$

0,5

$$\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : z = k'\,(kx) = (k'k)\,x$$
$$\Longrightarrow \exists k'' = k'k \in \mathbb{N} : z = k''x \text{ donc, } x\mathcal{R}z.$$

1

Alors, $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$. D'où la relation $\mathcal{R}$ est transitive........(iii)

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2) L'ordre R est-il total?

L'ordre $\mathcal{R}$ est total si et seulement si: $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. 0,5

Prenons $x = 2$ et $y = 3$, on a:

$\nexists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $3 = k.2$ *donc* 2 *n'est pas en relation avec* 3 *et*

$\nexists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $2 = k.3$ *donc* 3 *n'est pas en relation avec* 2 1

Donc, l'ordre $\mathcal{R}_1$ n'est pas total, on dit que l'ordre $\mathcal{R}$ est partiel.

Exercice 3. *Solution.* (07 points)

1) Calculons $f(5)$, $f(-1)$, f est-elle injective ?

On a: $f\,(5) = (5)^2 - 4\,(5) - 5 = 0$ 0,25 *et* $f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) - 5 = 0.$ 0,25

f n'est pas injective car: $f(5) = f(-1)$ mais $5 \neq -1$. 0,5

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10 + f(x) = 0$, f est-elle surjective ?

$$On\ a: 10 + f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \quad (\Delta = 16 - 4\,(1)\,(5) = -4 < 0)$$

1

Donc, l'équation $10 + f(x) = 0$ n'admet pas de solutions réelles.

Surjectivité de f ? $\quad (\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x))$?

f *n'est pas surjective car* $y = -10$ *(par exemple) n'a pas d'antécédent.* 0,5

3) Déterminons l'image directe de $[0 \quad 4]$ ***par*** f.

(Utiliser le tableau de variation de l'application f*)*

$$f([0 \quad 4]) = \{f(x)/x \in [0 \quad 4]\} = \{f(x)/x \in [0 \quad 2]\} \cup \{f(x)/x \in [2 \quad 4]\}$$

$= [f(2) \quad f(0)] \cup [f(2) \quad f(4)]$ *car* f *croissante sur* $[0 \quad 2]$ *et* f *croissante sur* $[2 \quad 4]$

$= [-9 \quad -5] \cup [-9 \quad -5] = [-9 \quad -5]$. 1

$f(\mathbb{R}) = [-9 \quad +\infty[$. 0,5

4) Déterminer l'image réciproque de $[-5 \quad 7]$ ***par*** f.

On a: $f^{-1}([-5 \quad 7]) = [-2 \quad 0] \cup [4 \quad 6]$ 1 *(car* $f(x) = -5 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$*, d'où* $x = 0$ *ou* $x = 4$ 0,5

et $f(x) = 7 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = -2$ *ou* $x = 6$*).*

(Utiliser le tableau de variation de l'application f*).*

5) Donnons des intervalles I ***et*** J, ***tels que:*** $f : I \longrightarrow J$, ***soit bijective.***

Les intervalles I *et* J*, tels que l'application* $f : I \to J$*, soit bijective.*

On prends $I = [2, +\infty[$ *et* $J = [-9, +\infty[$. *L'application* $f : [2, +\infty[\to [-9, +\infty[$*, est bijective.* 0,5

Déterminons l'application réciproque f^{-1} .

Soit $y \in [-9, +\infty[$ *, on calcule* x *en fonction de* y*. On a :* $y = x^2 - 4x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 - y = 0$,

$\triangle = 16 - 4(-5 - y) = 4y + 36 = 4(y + 9) > 0$, *(car* $y \in [-9, +\infty[$*). Donc,*

$$x = \frac{4 - \sqrt{4(y+9)}}{2} = \left(2 - \sqrt{y+9}\right) \notin I, \quad x = \frac{4 + \sqrt{4(y+9)}}{2} = \left(2 + \sqrt{y+9}\right) \in I$$

Alors, $x = 2 + \sqrt{y+9}$*. Alors, l'application réciproque* f^{-1} *est* 1

$$f^{-1} : [-9, +\infty[\longrightarrow [2, +\infty[$$
$$y \longmapsto 2 + \sqrt{y+9}.$$