Université A/Mira de Bejaia
Département de Recherche opérationnelle
Bejaia 2021/2022

L2 Section B

Examen d'Analyse 3

Questions de cours. (5pts)

1. Donner une condition nécessaire mais pas suffisante pour la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$.
2. Pour une suite de fonctions $(f_n)_n$ intégrables sur $[a,b]$ qui converge simplement vers f, dans quel cas peut-on écrire $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
3. Pour une série de fonctions, on peut définir plusieurs type de convergence. Enumérer les, puis donner le lien entre ces différents types de convergence.

Exercice 1. (7.5pts)

1. Déterminer la nature des séries numériques suivantes : $\sum_{n>0} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+2}}$, $\sum_{n>0} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.
2. Montrer que les séries numériques suivantes sont convergentes, puis calculer leur somme.

$$\sum_{n\geq 0} e^n \left(\frac{7}{2}\right)^{-n}, \quad \sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Exercice 2. (7.5pts)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = \frac{e^{-2nx}}{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

   On considère la série de fonctions de terme général $g_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-2nx}}{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
3. Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

$\ast\ast\ast$ **Bon courage** $\ast\ast\ast$