

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Bejaia
Faculté de Technologie
Département d'Hydraulique

POLYCOPIE DE COURS

Module :

« HYDRAULIQUE APPROFONDIE »

Master 1

Responsable du module :

Dr. AMOURA Zouhir

Sommaire

Préambule	1
Chapitre I : Cinématique des fluides.....	2
1) Modèle du fluide :	3
1.1) Milieu continu :	3
a) Notion du libre parcours moyen :	3
b) Milieu continu :	3
1.2) Les trois échelles :	4
1.3) La particule fluide :	4
2) Le champ des vitesses :	5
2.1) définition :	5
2.2) description lagrangienne et description eulérienne du mouvement d'un fluide :	5
a) description du mouvement d'un fluide :	5
b) point de vue lagrangien :	5
c) point de vue eulérien :	6
2.3) écoulement stationnaire :	7
2.4) trajectoire, lignes de courant, lignes d'émission :	7
a) lignes de courant :	7
b) la trajectoire :	8
c) ligne d'émission :	9
3) Accélération d'une particule de fluide, dérivée particulaire :	9
3.1) accélération en un point du fluide d'une particule de fluide :	9
3.2) dérivée particulaire :	10
3.3) écoulement incompressible :	11
4) Caractéristiques du champ des vitesses d'un fluide :	12
4.1) flux et divergence - incompressibilité :	12
4.2) circulation et rotationnel : tourbillons.	13
a) position du problème :	13
b) le vecteur tourbillon :	14
4.3) Etude de quelques écoulements particuliers :	14
a) Vecteur tourbillon :	14
b) Dilatation d'une particule de fluide :	15
c) Déformation d'une particule de fluide :	16

4.4) analyse du mouvement d'une particule de fluide :	16
4.5) Caractéristique d'un écoulement :	25
a) Écoulement stationnaire (ou permanent) :	25
b) Écoulement laminaire :	25
c) Écoulement incompressible :	25
d) écoulements tourbillonnaires (rotationnels) :	27
e) écoulements potentiels (irrotationnels) :	27
f) écoulements potentiels incompressibles :	28
5) conservation de la masse :	28
5.1) vecteur densité de courant de masse :	28
5.2) débit massique, débit volumique :	29
5.3) équation globale de conservation de masse :	30
5.4) équation locale de conservation de la masse : équation de continuité.....	31
6) condition aux limites :	32
6.1) position du problème :	32
6.2) loin d'un obstacle :	32
6.3) à la surface d'un obstacle :	32
6.4) à l'interface entre deux fluides :	33
Chapitre II : Dynamique des fluides réels.....	34
1) Les forces dans un fluide :	35
1.1) Les forces de volume :	35
1.2) Les forces de surface, tenseur des contraintes :	35
2) Conservation de la quantité de mouvement :	36
3) Analyse des forces de surfaces :	37
3.1) Tenseur de contrainte : définition.....	37
3.2) Représentation des forces de surface par le tenseur des contraintes :	38
4) Formulation locale du bilan de quantité de mouvement :	40
5) Lois de comportement, fluides Newtoniens :	41
5.1) Schéma de Newton :	41
5.2) Hypothèse de Stokes :	43
5.3) Loi de comportement de Navier-Stokes :	44
6) Les équations de Navier-Stokes :	44
7) Exemples d'écoulement incompressible « solution exacte » des équations de Navier-Stokes : ..	46
7.1) première application : Ecoulement de couette plan.	46

7.2) deuxième application : écoulement de Poiseuille cylindrique.....	48
Chapitre III : Turbulence.....	52
1) Nombre de Reynolds :.....	53
2) écoulement laminaire ou turbulent :.....	53
2-1) les deux régimes d'écoulement :.....	53
2-2) nombre de Reynolds critique :	54
3) caractéristiques et propriétés de la turbulence :	54
3-1) L'aspect irrégulier et aléatoire en temps ou en espace :	54
3-2) L'aspect tridimensionnel et rotationnel :.....	54
3-3) L'aspect dissipatif :.....	54
3-4) l'aspect diffusif :.....	54
4) décomposition de Reynolds :	54
4-1) principe :.....	54
5) équations de mouvement et tenseur de contraintes de Reynolds :.....	56
5-1) continuité du mouvement moyen :.....	57
5-2) dynamique du mouvement moyen : équation de Reynolds.....	57
6) les modèles de turbulence :	60
6-1) modèle de Boussinesq – viscosité turbulente :	60
6-2) modèle de longueur de mélange de Prandtl :.....	61
6-3) théorie de Karman – Betz (1930) :.....	64
7) modèle à une équation :	66
7-1) schéma de Prandtl-Kolmogorov :	66
7-2) équation modèle d'énergie cinétique de turbulence :	67
a) équation de transport de l'énergie cinétique turbulente :	67
b) schéma de production :.....	69
c) schéma de diffusion turbulente :	69
d) schéma de dissipation :.....	69
e) calage des constantes :.....	70
7-4) récapitulation du modèle à une équation (k) :	70
8) modèle à deux équations : modèle k, ϵ	70
8-1) le schéma de viscosité :.....	70
8-2) équation modèle d'énergie :	71
8-3) équation modèle de la dissipation :.....	71
a) Terme source de l'équation de dissipation :.....	74

b) Terme puits de l'équation de dissipation :	74
c) Schéma du terme de diffusion :	75
8-4) récapitulation du modèle à deux équations (k, ϵ) :	75
Chapitre IV : Couches limites.....	76
1) couche limite laminaire :	77
1-1) ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite :	78
1-2) équations de la couche limite : théorie de Prandtl.....	79
1-3) couplage fluide parfait - couche limite :	82
1-4) décollement :	84
1-5) équation de Blasius :	85
2) la couche limite turbulente :	91
2-1) approximation de la couche limite turbulente :	91
2-2) couche logarithmique et sous-couche visqueuse :	93
2-3) évolution spatiale de la couche limite :	99
Références bibliographiques :	103

Préambule

Ce cours est destiné aux étudiants de Master 1 hydraulique. Ce cours est subdivisé en quatre chapitres. Le premier chapitre, qui est de plus en plus occulté dans les universités, aborde la cinématique des fluides. Le chapitre sur la cinématique des fluides est très important car il prépare le chapitre sur la dynamique des fluides. La vitesse et l'accélération d'une particule de fluide sont introduites. La signification physique des différents termes sera développée. Avec ce chapitre, vous devrez vous familiariser avec le vocabulaire propre à la mécanique des fluides : vecteur tourbillon, tenseur des taux de déformation, écoulement rotationnel ou irrotationnel, écoulement à potentiel des vitesses...

Le deuxième chapitre traite la dynamique des fluides réels. La dynamique des fluides s'attache à décrire précisément le mouvement des particules fluides au sein d'un écoulement, en le reliant aux différentes forces en présence. L'objectif est donc de mettre en place une équation locale qui puisse rendre compte du lien entre vitesse, pression, forces de volume et de frottement (*viscosité*). La prise en compte de la viscosité dans le bilan de quantité de mouvement va permettre de dériver l'équation de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles. Des solutions de cette équation dans des géométries d'écoulement simples seront abordées dans ce chapitre.

La turbulence désigne l'état d'un fluide dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire : tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient constamment. Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée, un comportement difficilement prévisible et l'existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. De tels écoulements apparaissent lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer. Le troisième chapitre donne une introduction très générale de la turbulence et traite la fermeture du problème des tenseurs de Reynolds (inconnue supplémentaire).

Le quatrième chapitre aborde la notion de couche limite (laminaire et turbulente). Pour les écoulements rapides (grands nombres de Reynolds), il est parfois possible de négliger les effets de la viscosité, et d'utiliser le concept de fluide parfait (équation d'Euler, théorème de Bernoulli). Toutefois, même à très grand nombre de Reynolds, cette approximation posera toujours problème au voisinage d'une paroi : en effet, la condition d'adhérence (égalité entre vitesse du fluide et vitesse de la paroi au contact de celle-ci) fait que la viscosité y jouera toujours un rôle prépondérant, car le nombre de Reynolds local y sera nécessairement petit. Ainsi, il existe nécessairement une région près de la paroi, éventuellement très fine, dans laquelle les effets de la viscosité sont prédominants : c'est la couche limite.

Chapitre I : Cinématique des fluides

La cinématique est la description analytique d'un système en mouvement. Dans ce chapitre, nous allons donc nous intéresser aux mouvements des fluides par rapport aux temps, indépendamment des causes qui les provoquent, c'est-à-dire sans prendre en compte les forces qui sont à leur source.

Un milieu fluide étant en mouvement, comment l'observer, comment le décrire ?

1) Modèle du fluide :

1.1) Milieu continu :

a) Notion du libre parcours moyen :

Le mouvement d'une particule d'un fluide en écoulement résulte de la superposition de deux mouvements : le mouvement d'agitation thermique incessant et désordonné et le mouvement d'ensemble traduisant l'écoulement du fluide.

Au cours de son mouvement, à cause de l'agitation thermique, une molécule du fluide subit des chocs avec les autres molécules. On appelle « libre parcours moyen » la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs.

Dans un gaz, le libre parcours moyen est approximativement proportionnel à la température et inversement proportionnel à la pression. Il est de l'ordre de quelques centaines de nanomètres à température ambiante et sous pression atmosphérique.

Dans un liquide, le libre parcours moyen est beaucoup plus faible. Il est de l'ordre de quelques fois la taille d'une molécule, soit de l'ordre de quelques nanomètres.

b) Milieu continu :

Pour décrire le mouvement d'un fluide, nous allons bien sûr pas suivre le mouvement individuel de chaque molécule. Nous considérons un volume $d\tau$ de taille caractéristique d ($d\tau$ est donc de l'ordre de d^3). Le milieu apparaîtra comme continu si l'échelle caractéristique d est choisie de telle sorte que la fluctuation du nombre de molécules contenues dans le volume $d\tau$ est négligeable devant le nombre moyen des molécules dans ce volume. Cette condition est remplie si le libre parcours moyen l est négligeable devant d .

Un milieu est considéré comme continu quand on l'étudie à une échelle de longueur grande devant le libre parcours moyen des molécules.

1.2) Les trois échelles :

Nous voyons apparaître trois échelles de longueur :

- L'échelle microscopique : la taille caractéristique de cette échelle est le libre parcours moyen l des molécules.
- L'échelle macroscopique : la taille caractéristique de cette échelle est l'échelle de longueur L caractéristique du système étudié (par exemple, si on étudie l'écoulement de l'eau d'un fleuve, L est la largeur du fleuve, si on étudie l'écoulement d'un fluide dans un tuyau cylindrique, L est le rayon du cylindre...).
- L'échelle mésoscopique : c'est une échelle intermédiaire dont la taille caractéristique d est très grande devant le libre parcours moyen et très petite devant l'échelle de longueur L caractéristique du système étudié, c'est-à-dire :

$$l \ll d \ll L$$

1.3) La particule fluide :

L'élément de base de l'étude du mouvement d'un fluide se situe à l'échelle mésoscopique. C'est un volume $d\tau \approx d^3$ tel que $l \ll d \ll L$. On l'appelle « particule de fluide ».

Si les échelles caractéristiques au niveau microscopique et au niveau macroscopique sont telles que le modèle de la particule de fluide est utilisable, le milieu peut être considéré comme continu.

Dans un gaz aux températures et pressions ordinaires, les particules de fluide sera par exemple un cube de **10 μm** de coté. Le volume molaire d'un gaz dans ces conditions de température et de pression est de l'ordre **22 litres**. Ce cube contient donc environ **$6 \cdot 10^{23} \frac{(10^{-5})^3}{22 \cdot 10^{-3}} \approx 3 \cdot 10^{10}$ molécules**. Il contient environ mille fois plus de molécules dans le cas d'un liquide.

Le nombre de molécules dans une particule de fluide est suffisamment important et ses fluctuations suffisamment faibles pour que la notion de valeur moyenne ait un sens.

2) Le champ des vitesses :

2.1) définition :

Il est bien évident que la vitesse que nous étudierons dans la suite du cours de mécanique des fluides n'est pas la vitesse individuelle d'une molécule de fluide.

La description d'un fluide en tant que milieu continu permet de définir la vitesse du fluide en un point M à l'instant t comme la vitesse de la particule de fluide qui se trouve en ce point à cet instant, c'est-à-dire comme la moyenne des vitesses des molécules qui se trouvent à l'intérieur de la particule de fluide située au point M à l'instant t .

2.2) description lagrangienne et description eulérienne du mouvement d'un fluide :

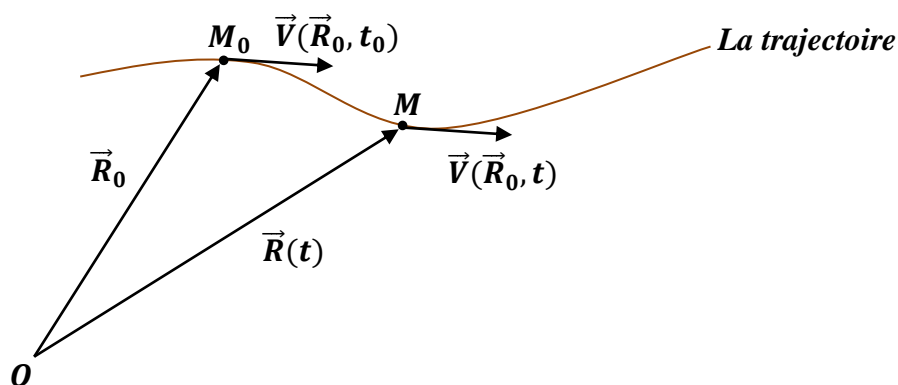
a) description du mouvement d'un fluide :

Pour décrire le mouvement d'un fluide, deux points de vue différents sont possibles :

- On suit le mouvement d'une particule de fluide, c'est le point de vue lagrangien.
- En chaque point de l'espace, on suit l'évolution au cours du temps des grandeurs macroscopiques locales comme le vecteur vitesse, la masse volumique, la pression, ..., c'est le point de vue eulérien

b) point de vue lagrangien :

On suit le mouvement de la particule de fluide située à la position \vec{R}_0 à l'instant t_0 , où sa vitesse était $\vec{V}(\vec{R}_0, t_0)$. A l'instant t ultérieur, elle se trouve en $\vec{R}(t)$ avec la vitesse $\vec{V}(t)$ que nous noterons $\vec{V}(\vec{R}_0, t)$ pour préciser la position initiale de la particule de fluide étudiée.



Les variables lagrangiennes sont les temps t et la position initiale de la particule de fluide \vec{R}_0 . La vitesse $\vec{V}(\vec{R}_0, t)$ représente la vitesse à l'instant t de la particule de fluide qui se trouvait à l'instant t_0 à la position \vec{R}_0 . Elle est reliée au vecteur position $\vec{R}(t)$ par :

$$\vec{V}(\vec{R}_0, t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt}$$

La courbe $t \rightarrow \vec{M}(t)$ où $\vec{OM}(t) = \vec{R}(t)$ est la trajectoire de la particule de fluide.

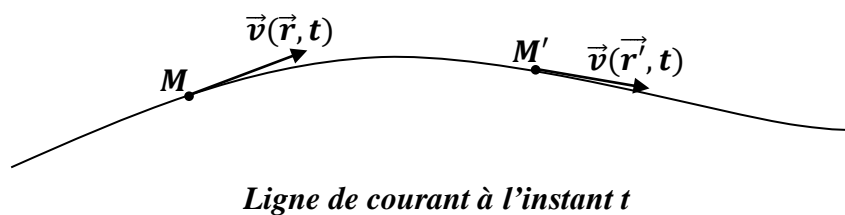
Si l'on veut réaliser des mesures, les instruments de mesures doivent se déplacer avec le fluide.

Ce point de vue est le point de vue implicitement adopté en mécanique du point, mais il est peu pratique en mécanique des fluides, domaine où l'on préfère en générale le point de vue eulérien.

c) point de vue eulérien :

On suit l'évolution au cours du temps des grandeurs macroscopiques locales comme le vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ en un point M donné où $\vec{r} = \vec{OM}$. Ce vecteur concerne une particule de fluide différente à chaque instant. Les variables eulériennes sont le temps t et la position du point d'observation \vec{r} . Dans la description eulérienne, les variables d'espace et de temps sont des variables indépendantes.

On définit ainsi les lignes de champ de vitesses, appelées « lignes de courant », tangentes en chaque point au champ des vitesses à l'instant t .



Les vitesses $\vec{v}(\vec{r}, t)$ et $\vec{v}(\vec{r}', t)$ représentent les vitesses à l'instant t des particules de fluide qui se trouvent respectivement au point M et au point M' à cet instant-là. Il s'agit des vitesses de deux particules de fluide différentes.

Si l'on veut réaliser des mesures, les instruments de mesures doivent être fixes par rapport au référentiel d'étude.

La description eulérienne est plus pratique pour décrire l'écoulement d'un fluide mais elle présente l'inconvénient de rendre compliquées les expressions décrivant l'évolution d'un champ eulérien au cours du mouvement d'une particule de fluide. Par exemple, comment exprimer l'accélération d'une particule de fluide à partir du champ des vitesses ?

Avec une description lagrangienne, il n'y a aucun problème, c'est

$$\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

2.3) écoulement stationnaire :

Un écoulement est stationnaire ou permanent si les champs eulériens (champ des vitesses $\vec{v}(\vec{r}, t)$, champ des pressions $p(\vec{r}, t)$, champs des masses volumiques $\rho(\vec{r}, t)$) ne dépendent pas du temps.

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, la particule de fluide qui passe en un point M donné a toujours la même vitesse, quelque soit l'instant t . Les lignes de courant et les trajectoires sont alors confondues.

2.4) trajectoire, lignes de courant, lignes d'émission :

a) lignes de courant :

Pour tout champ vectoriel, on peut définir les lignes de champ associées, tangentes en tout point au champ vectoriel. Pour le champ de vitesses (eulérien) $\vec{v}(\vec{r}, t)$ d'un écoulement, ces lignes de champ sont appelées lignes de courant.

Une ligne de courant, à un instant donné, est définie telles qu'en tout point, le déplacement élémentaire $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ le long de cette ligne doit être colinéaire à $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$. Cette colinéarité peut s'exprimer sous la forme $d\vec{r} \wedge \vec{v} = \mathbf{0}$, ce qui donne les égalités :

$$d\vec{r} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ dx & dy & dz \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$d\vec{r} \wedge \vec{v} = (v_z dy - v_y dz)\vec{e}_x + (v_x dz - v_z dx)\vec{e}_y + (v_y dx - v_x dy)\vec{e}_z = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} v_z dy - v_y dz = 0 \\ v_x dz - v_z dx = 0 \\ v_y dx - v_x dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_z dy = v_y dz \\ v_x dz = v_z dx \\ v_y dx = v_x dy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{v_z}{dz} = \frac{v_y}{dy} \\ \frac{v_x}{dx} = \frac{v_z}{dz} \\ \frac{v_y}{dy} = \frac{v_x}{dx} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{v_x}{dx} = \frac{v_y}{dy} = \frac{v_z}{dz}$$

On obtient ainsi **2** équations différentielles à **3D**, ou **1** équation différentielle à **2D**. Les lignes de courant s'obtiennent alors en intégrant cette (ces) équation(s) étant donné un jeu de conditions initiales $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Les lignes de courant ne peuvent jamais se croiser, sauf en un point de stagnation, point en lequel on a $\vec{v} = \vec{0}$.

b) la trajectoire :

C'est l'ensemble des positions occupées successivement par la particule de fluide au cours du temps.

Soit $\vec{v}(\vec{r}, t)$ la vitesse d'une particule de fluide dont le vecteur position, à l'instant t , est \vec{r} par rapport à un référentiel galiléen.

La vitesse de particule, définie par

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

fournit sa trajectoire à tout autre instant t . On désignera par (x_0, y_0, z_0) la position de la particule de fluide à l'instant $t = 0$.

c) ligne d'émission :

Ce sont les lignes formées par la position successive de points émis d'une source fixe, expérimentalement, ces lignes peuvent être simplement visualisées par l'injection continue d'un colorant en un point fixe de l'écoulement. Pour un écoulement stationnaire, les lignes d'émission coïncident avec les lignes de courant et les trajectoires des particules.

3) Accélération d'une particule de fluide, dérivée particulaire :

3.1) accélération en un point du fluide d'une particule de fluide :

Considérons une particule de fluide située au point M à l'instant t (on pose $\overline{OM} = \vec{r}$ où O est une origine fixe). Sa vitesse est alors $\vec{v}(\vec{r}, t)$. A l'instant $t' = t + \delta t$, elle se trouve au point M' tel que :

$$\overline{OM'} = \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}(\vec{r}, t) \delta t + \mathcal{O}(\delta t)$$

Avec la nouvelle vitesse $\vec{v}(\vec{r}', t')$

On pose :

$$\vec{v}(\vec{r}', t') = \vec{v}(\vec{r}, t) + \delta \vec{v}$$

L'accélération de la particule de fluide située au point M à l'instant t est, par définition, égale à :

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{v}}{\delta t}$$

C'est l'accélération mesuré par un observateur qui suit la particule de fluide au cours de son mouvement. Pour bien comprendre les causes de l'accélération de la particule de fluide, nous pouvons écrire :

$$\delta \vec{v} = \vec{v}(\vec{r}', t') - \vec{v}(\vec{r}, t) = [\vec{v}(\vec{r}', t') - \vec{v}(\vec{r}', t)] + [\vec{v}(\vec{r}', t) - \vec{v}(\vec{r}, t)]$$

Le terme $[\vec{v}(\vec{r}', t') - \vec{v}(\vec{r}', t)]$ est non nul si l'écoulement est non permanent.

Le terme $[\vec{v}(\vec{r}', t) - \vec{v}(\vec{r}, t)]$ est non nul si l'écoulement est non uniforme.

Exprimons $\delta\vec{v}$ au premier ordre en δt , en travaillant en coordonnées cartésiennes :

$$\delta\vec{v} = \vec{v}(x + v_x \delta t, y + v_y \delta t, z + v_z \delta t, t + \delta t) - \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$\delta\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} v_x \delta t + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} v_y \delta t + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} v_z \delta t + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \delta t + \mathcal{O}(\delta t)$$

$$\frac{\delta\vec{v}}{\delta t} = v_x \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

Nous en déduisons :

$$\vec{a} = v_x \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

Tous les termes étant calculés en \vec{r} à l'instant t , nous pouvons alors écrire :

$$\vec{a} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

Le calcul précédent a été effectué en coordonnées cartésiennes. Le résultat final, écrit sous forme vectorielle, ne dépend bien évidemment pas du système de coordonnées choisi.

Le terme $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ est l'accélération locale. Il est non nul si l'écoulement est non permanent. Le terme $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ est l'accélération convective. Il est non nul si l'écoulement est non uniforme. La somme de ces deux termes est appelée dérivée particulière de la vitesse. On note :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

On peut écrire aussi :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

3.2) dérivée particulière :

La notion de dérivée particulière s'adapte à d'autres champs que le champ des vitesses.

Prenons l'exemple de la masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$. La quantité

$$\delta\rho = \rho(\vec{r} + \vec{v}(\vec{r}, t) \delta t, t + \delta t) - \rho(\vec{r}, t)$$

représente la variation de la masse volumique d'une particule de fluide au cours de son mouvement. A partir de $\delta\rho$, nous pouvons définir la grandeur

$$\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(\vec{r} + \vec{v}(\vec{r}, t)\delta t, t + \delta t) - \rho(\vec{r}, t)}{\delta t}$$

qui représente la dérivée de la masse volumique d'une particule de fluide au cours de son mouvement.

On la calcule en effectuant un développement limité de $\delta\rho$ comme précédemment :

$$\delta\rho = \rho(x + v_x \delta t, y + v_y \delta t, z + v_z \delta t, t + \delta t) - \rho(x, y, z, t)$$

$$\delta\rho = \frac{\partial\rho(x, y, z, t)}{\partial x} v_x \delta t + \frac{\partial\rho(x, y, z, t)}{\partial y} v_y \delta t + \frac{\partial\rho(x, y, z, t)}{\partial z} v_z \delta t + \frac{\partial\rho(x, y, z, t)}{\partial t} \delta t$$

$$\delta\rho = \left[v_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial\rho}{\partial z} \right] \delta t + \frac{\partial\rho}{\partial t} \delta t$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} = \left[v_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial\rho}{\partial z} \right] + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} = \left[v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} = [\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}] \rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Soit :

$$\frac{D\rho}{Dt} = [\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}] \rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

3.3) écoulement incompressible :

Un fluide est en écoulement incompressible si les particules de fluide ont un volume constant au cours de leur déplacement. Une particule de fluide étant par définition un système fermé, sa masse reste constante. Si son volume est lui-même constant au cours du mouvement, c'est que la particule de fluide conserve sa masse volumique au cours de son mouvement, donc la dérivée particulière de la masse volumique est nulle.

« Pour un fluide en écoulement incompressible, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ »

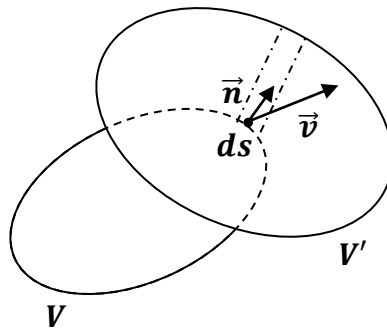
Remarque :

Il ne faut pas confondre fluide en écoulement incompressible et fluide incompressible. Un fluide est incompressible si son coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$ est nul, ce que nous traduisons le plus souvent par le fait que la masse volumique du fluide est une constante. Un fluide incompressible est toujours en écoulement incompressible, mais la réciproque est fautive

4) Caractéristiques du champ des vitesses d'un fluide :

4.1) flux et divergence - incompressibilité :

Isolons au sein d'un fluide en écoulement une masse M de fluide contenue à l'instant t dans un volume V . Cette même masse M , du fait de son déplacement, occupe à l'instant $t + dt$, le volume V' .



Celui-ci est engendré à partir du volume initial par le déplacement des parois. Un élément de paroi ds engendre dans son déplacement le volume élémentaire

$$\delta\tau = ds \cdot v_n dt = ds \vec{v} \cdot \vec{n} dt = \vec{v} \cdot \vec{n} ds dt$$

Globalement la variation dV du volume occupé par M s'écrit alors :

$$dV = \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} ds dt$$

Soit

$$\frac{dV}{dt} = \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

Le flux du champ des vitesses à travers la surface fermée limitant un volume V associée à une masse donnée de fluide est directement lié à la variation de ce volume

On a :

$$\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \text{div}(\vec{v}) \, d\tau$$

D'où :

$$\frac{dV}{dt} = \iiint_V \text{div}(\vec{v}) \, d\tau$$

La variation du volume élémentaire $\delta\tau$ d'une particule donnée de fluide de masse invariable δm est liée à la divergence des vitesses au point où se trouve la particule à l'instant t selon la formule :

$$\frac{d(\delta\tau)}{dt} = \text{div}(\vec{v})$$

Or, cette variation, si elle est non nulle, implique que la masse a été comprimée ou dilatée.

Nous définissons alors deux types d'écoulement :

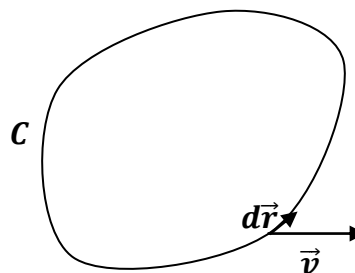
- Les écoulements incompressibles pour lesquels $\text{div}(\vec{v})$ est identiquement nulle en tout point de l'écoulement ($\text{div}(\vec{v}) = 0$).
- Les écoulements compressibles pour lesquels cette identité n'est pas respectée ($\text{div}(\vec{v}) \neq 0$).

4.2) circulation et rotationnel : tourbillons.

a) position du problème :

Intéressons nous à présent à la circulation du champ des vitesses le long d'une courbe fermée C , c'est-à-dire à une intégrale du type :

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$$



Il apparait intuitivement que si cette circulation est non nulle sur un contour fermé donné, c'est que le fluide tourne autour d'un axe enlacé par le contour C .

b) le vecteur tourbillon :

Exprimons à présent le cas d'un champ des vitesses de la forme $\vec{v} = \omega r \vec{e}_\theta$. C'est aussi le champ des vitesses d'un solide en rotation autour de l'axe Oz , à la vitesse angulaire ω . Remarquons alors que, pour ce champ des vitesses

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r \cdot r\omega & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} [2r\omega] \vec{e}_z = 2\omega \vec{e}_z = 2\vec{\Omega}$$

C'est en raison de cette analogie que, par définition, on appelle vecteur tourbillon, le vecteur :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\vec{v})$$

Le vecteur tourbillon, comme $\overrightarrow{rot}(\vec{v})$ dont il ne diffère que par le facteur 2 , nous renseigne donc sur le caractère local tournant de l'écoulement.

Le vecteur $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\vec{v})$ est appelé vecteur tourbillon : il indique une rotation locale du fluide autour de sa direction.

4.3) Etude de quelques écoulements particuliers :

Pour simplifier les calculs, nous nous limiterons dans cette partie à des champs stationnaires et bidimensionnels.

a) Vecteur tourbillon :

Considérons le champ des vitesses défini en coordonnées cartésiennes par :

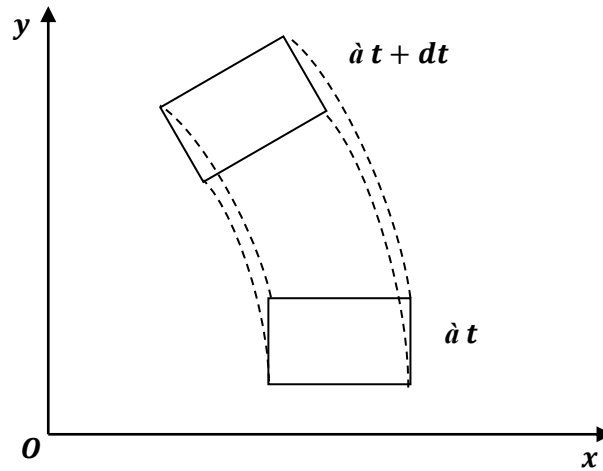
$$\vec{v} = -\Omega y \vec{e}_x + \Omega x \vec{e}_y$$

Où Ω est une constante réelle positive.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\Omega y & \Omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\Omega \vec{e}_z$$

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial(-\Omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\Omega x)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0$$

La particule de fluide tourne, son volume ne varie pas, elle ne se déforme pas.



b) Dilatation d'une particule de fluide :

Considérons le champ des vitesses défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{v} = (a + bx)\vec{e}_x$$

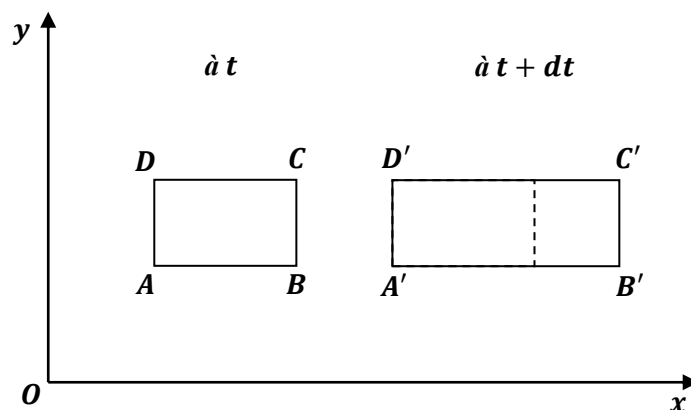
Où a et b sont des constantes réelles positives.

Ce champ vérifié :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (a + bx) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial(a + bx)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = b$$

Cette particule de fluide ne tourne pas, son volume varie (elle se dilate).



c) Déformation d'une particule de fluide :

Considérons le champ des vitesses défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{v} = ay \vec{e}_x + ax \vec{e}_y$$

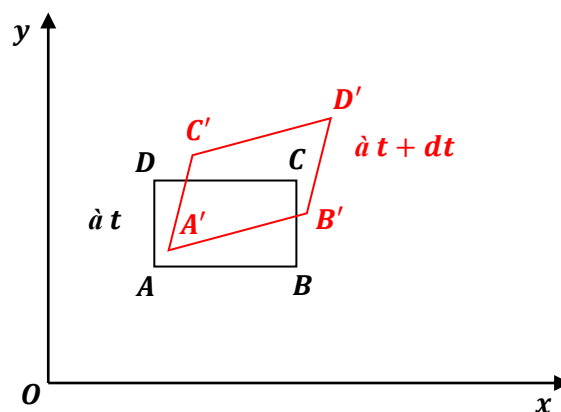
Où a est une constante réelle positive.

Ce champ vérifié :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay & ax & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial(ay)}{\partial x} + \frac{\partial(ax)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0$$

L'évolution d'une particule de fluide est représentée sur la figure.



4.4) analyse du mouvement d'une particule de fluide :

Au sein de l'écoulement, toute particule de fluide subit des changements de position, d'orientation et de forme.

Pour analyser ces changements, on considère deux points voisins appartenant à la même particule de fluide :

$$M(x, y, z) \quad \text{et} \quad M'(x + dx, y + dy, z + dz)$$

De vitesses respectives :

$$\vec{v}_M(u, v, w) \quad \text{et} \quad \vec{v}_{M'}(u', v', w')$$

Il est possible d'exprimer $\vec{v}_{M'}$ par :

$$\vec{v}_{M'} = \vec{v}_M + d\vec{v}_M$$

Par un développement limite au premier ordre :

$$\vec{v}_{M'} = \vec{v}_M + \frac{\partial \vec{v}_M}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}_M}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}_M}{\partial z} dz$$

Projetons cette équation suivant les **3** axes :

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$w' = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$



Tenseur des taux de déformation

$$\vec{v}_{M'} = \vec{v}_M + \bar{\bar{\nabla}} \vec{v}_M \cdot \overline{MM'}$$

Avec $\bar{\bar{\nabla}} \vec{v}_M$ est le tenseur des taux de déformation.

Toutes les informations concernant les déformations sont alors contenues dans les éléments du tenseur des taux de déformations. Il convient donc d'identifier chacun de ces éléments.

$$\bar{\nabla} \vec{v}_M = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Pour comprendre physiquement la signification des termes tensoriels, on va analyser une particule dans un écoulement plan (xOy), puis on généralisera dans l'espace ($3D$).

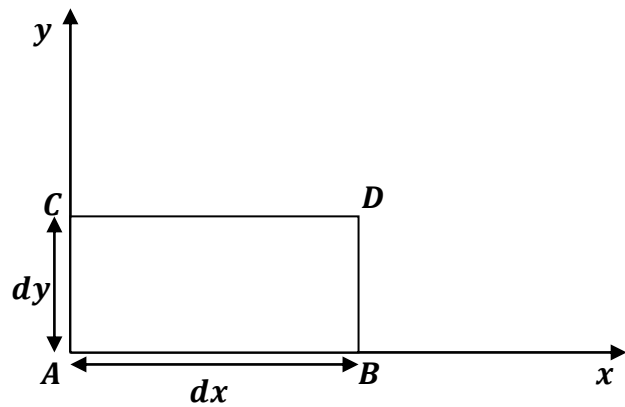
On va alors considérer une particule bidimensionnelle rectangulaire, de surface $ds = dx \cdot dy$, définie à l'instant t par les coordonnées de ses 4 sommets.

$A(0, 0)$

$B(dx, 0)$

$C(0, dy)$

$D(dx, dy)$



$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

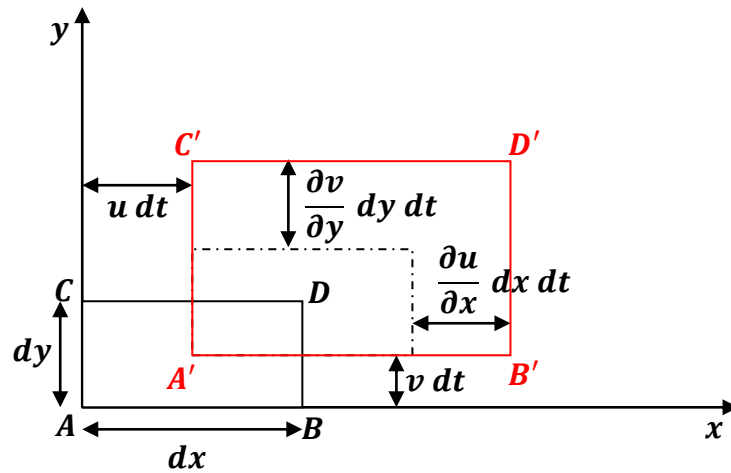
Signification des termes diagonaux :

On suppose que les termes non diagonaux sont nuls.

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ v' = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{cases}$$

Pour chaque point, on va écrire sa position initiale à l'instant t et sa vitesse \vec{v} . La distance parcourue par ce point pendant un temps dt et donnée par $\vec{v} dt$, ce qui permet alors de donner sa position à l'instant $t + dt$.



Position à l'instant t :

$$A(0, 0)$$

$$B(dx, 0)$$

$$C(0, dy)$$

$$D(dx, dy)$$

Vitesses à l'instant t :

$$\vec{v}_A = (u, v)$$

$$\vec{v}_B = (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, v)$$

$$\vec{v}_C = (u, v + \frac{\partial v}{\partial y} dy)$$

$$\vec{v}_D = (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, v + \frac{\partial v}{\partial y} dy)$$

Position à l'instant $t + dt$:

$$A'(u dt, v dt)$$

$$B'(dx + u dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt, v dt)$$

$$C'(u dt, dy + v dt + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt)$$

$$D'(dx + u dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt, dy + v dt + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt)$$

La particule subit donc une translation globale de $u dt$ suivant x et de $v dt$ suivant y .

La particule est globalement déformée : élongation ou contraction de

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx dt \text{ suivant } x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} dy dt \text{ suivant } y$$

L'accroissement relatif de longueur suivant x est donné par :

$$\frac{d(AB)}{AB} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt) - (dx)}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\underbrace{dx}_{\text{taux d'élongation suivant } x}} dt$$

Suivant y , le taux d'élongation (ou de contraction) sera alors de $\frac{\partial v}{\partial y}$

La variation relative de la surface est donnée par :

$$\frac{dS}{S} = \frac{S' - S}{S} = \frac{(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt)(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt) - (dx dy)}{dx dy}$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{\partial v}{\partial y} dt + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} dt^2}_{\approx 0}$$

$$\frac{dS}{S} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dt$$

En généralisant sur les 3 dimensions :

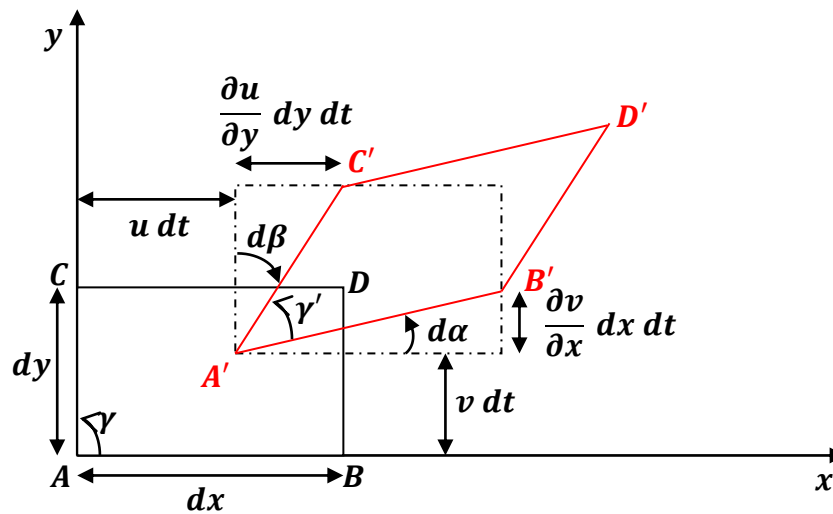
$$\frac{dV}{V} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt = \underbrace{\text{div}(\vec{v})}_{\text{taux d'expansion du volume}} dt$$

En conclusion, les éléments diagonaux du tenseur des taux de déformation correspondent aux taux d'élongation dans les trois directions de l'espace et permettent, à partir du calcul de la trace du tenseur, d'évaluer le taux d'expansion local du volume.

Signification des termes non diagonaux :

On suppose maintenant que seuls des éléments en dehors de la diagonale soient non nuls dans le tenseur des taux de déformation, et on raisonne encore une fois à deux dimensions à partir d'une particule rectangulaire $ABCD$.

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$



Position à l'instant t :

$$A(0, 0)$$

$$B(dx, 0)$$

$$C(0, dy)$$

$$D(dx, dy)$$

Vitesses à l'instant t :

$$\vec{v}_A = (u, v)$$

$$\vec{v}_B = (u, v + \frac{\partial v}{\partial x} dx)$$

$$\vec{v}_C = (u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, v)$$

$$\vec{v}_D = \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right)$$

Position à l'instant $t + dt$:

$$A'(u dt, v dt)$$

$$B'(dx + u dt, v dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx dt)$$

$$C'(u dt + \frac{\partial u}{\partial y} dy dt, dy + v dt)$$

$$D'(dx + u dt + \frac{\partial u}{\partial y} dy dt, dy + v dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx dt)$$

La particule subit une translation globale de $(u dt)$ suivant x et de $(v dt)$ suivant y .

Mais on a en plus une déformation angulaire de la particule.

Calcul de la déformation angulaire :

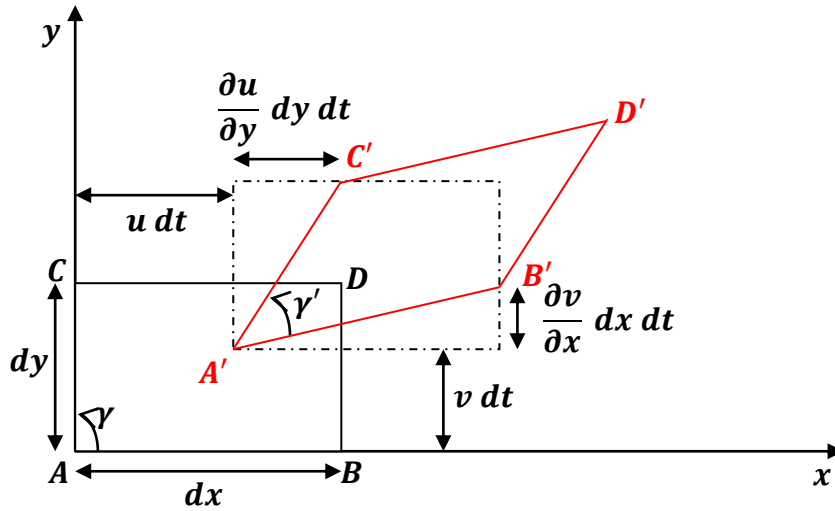
$$\begin{cases} d\alpha = \tan(d\alpha) = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt \\ d\beta = \tan(d\beta) = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy dt}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

On peut alors envisager deux cas particuliers :

1- Les deux angles sont égaux : $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ le tenseur est symétrique

Il s'agit d'une déformation angulaire pure au cours de laquelle l'angle $\gamma = \widehat{BAC}$ subit une variation.

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma' - \gamma}{dt} = \frac{(\gamma - d\alpha - d\beta) - \gamma}{dt} = -\frac{d\alpha + d\beta}{dt} = -\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\right) = -2\frac{\partial u}{\partial y}$$



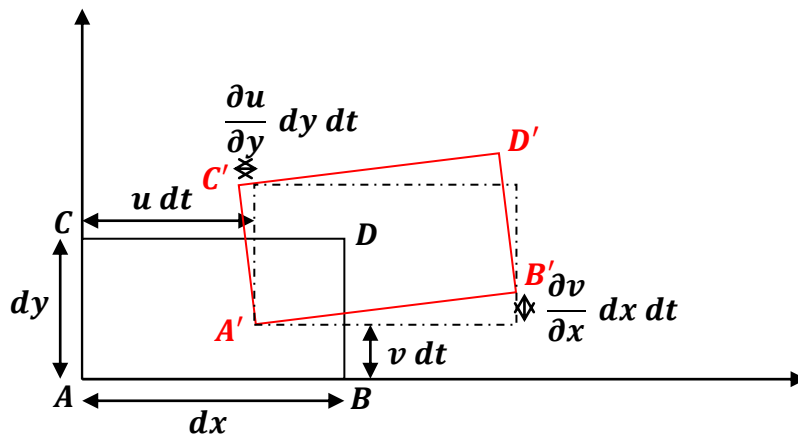
2- Les deux angles sont opposés : $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ le tenseur est antisymétrique

Il s'agit d'une rotation pure d'angle $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ autour de l'axe z.

Cet angle correspond à la moitié de la composante suivant z du vecteur rotationnel de la vitesse.

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\vec{\Omega}$ est appelé vecteur vitesse angulaire de rotation ou vecteur tourbillon. Il rend compte des rotations possibles de la particule fluide autour des 3 axes.



Bilan :

- $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ \Rightarrow translation globale.
- les termes diagonaux \Rightarrow élongation ou contraction pure.
- les termes non diagonaux \Rightarrow déformation angulaire pure et/ou rotation pure.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Quelque soit le tenseur, il est toujours possible de le décomposer en deux parties : une symétrique (déformation angulaire pure), et une antisymétrique (rotation pure).

$$\bar{\bar{\mathbf{v}}}(\bar{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{v}}}(\bar{\mathbf{v}}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}) & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}) & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\text{tenseur des taux de déformation pure } \bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}) \\ -\frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}) \\ -\frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}) & -\frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}) & 0 \end{pmatrix}}_{\text{tenseur des taux de rotation } \bar{\bar{\boldsymbol{\omega}}}}$$

A noter que :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\omega}}} \cdot \overline{\mathbf{MM}'} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega_z dy + \Omega_y dz \\ \Omega_z dx - \Omega_x dz \\ -\Omega_y dx + \Omega_x dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \bar{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overline{\mathbf{MM}'}$$

Alors on peut écrire :

$$\vec{\mathbf{v}}_{M'} = \underbrace{\vec{\mathbf{v}}_M}_{\text{translation}} + \underbrace{\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \overline{\mathbf{MM}'}}_{\substack{\text{déformation pure} \\ \text{(angulaire ou élongation/contraction)}}} + \underbrace{\bar{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overline{\mathbf{MM}'}}_{\text{rotation pure}}$$

Un écoulement sera qualifié d'irrotationnel lorsque $\vec{\Omega} = \vec{0}$. Dans ce cas les particules fluides ne subissent aucune rotation pure au sein de l'écoulement.

Un écoulement sera qualifié d'indéformable lorsque $\vec{\epsilon} = \vec{0}$. Dans ce cas les particules fluides ne subissent aucune déformation pure au sein de l'écoulement.

4.5) Caractéristique d'un écoulement :

a) Écoulement stationnaire (ou permanent) :

Un écoulement pour lequel le champ des vitesses eulérien du fluide $\vec{v}(M)$ est indépendant du temps est dit stationnaire.

b) Écoulement laminaire :

Dans un écoulement laminaire, l'accélération convective est identiquement nulle :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} = \vec{0}$$

c) Écoulement incompressible :

Un écoulement incompressible est un écoulement pour lequel $div(\vec{v})$ est partout nulle :

$$div(\vec{v}(M, t)) = 0 \quad \forall M$$

Cela signifie qu'en chaque point le champ de vecteurs \vec{v} ne peut ni diverger ni converger.

Dans ce cas, l'analyse vectorielle nous dit que le champ \vec{v} peut s'écrire comme le rotationnel d'un potentiel vecteur $\vec{\psi}$.

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi} \quad \text{ou bien} \quad \vec{v} = \overrightarrow{rot}(\vec{\psi})$$

Cette relation n'est pas très exploitable dans le cas **3D**. Mais pour les écoulements **2D**, elle devient très pratique. En effet, si $\vec{v} = (v_x, v_y)$ est un champ de vecteur **2D** dans le plan (x, y) , alors seule la composante selon \vec{e}_z de $\vec{\psi}$ est pertinente, et l'on peut écrire $\vec{\psi} = \psi(x, y)\vec{e}_z$.

La fonction scalaire $\psi(x, y)$ est appelée fonction de courant, et ses dérivées permettent de retrouver le champ de vitesses **2D** :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Fonction de courant :

On vient de voir que pour un écoulement incompressible : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Si on pose $\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}$, $\forall \vec{\psi}$ alors $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}) = 0$, $\vec{\psi}$ est appelé potentiel vecteur. En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

Si on considère un écoulement plan (\perp à l'axe Oz)

$$v_z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Alors :

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right) \vec{e}_x + \left(-\frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z$$

D'où :

$$v_x = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_y = -\frac{\partial \psi_z}{\partial x}$$

On pose alors :

$$\psi_z(x, y) = \psi(x, y)$$

La fonction ψ est appelée fonction de courant. Par conséquent :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Est le champ de vitesse en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques, ce champ des vitesses s'écrit :

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

d) écoulements tourbillonnaires (rotationnels) :

Un écoulement est dit tourbillonnaire s'il existe des points de l'écoulement où le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ est non nul.

e) écoulements potentiels (irrotationnels) :

Un écoulement non tourbillonnaire, nous l'avons vu, est tel qu'en tout point $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$. A \vec{v} peut être associé un scalaire ϕ tel que $\vec{v}(\mathbf{M}, t) = \overrightarrow{grad}(\phi(\mathbf{M}, t))$. Ce scalaire est appelé potentiel des vitesses. Il n'est défini qu'à une constante additive près. L'écoulement est alors appelé écoulement potentiel.

Un écoulement non tourbillonnaire est dit potentiel : en tout point de l'écoulement, $\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\phi)$ où ϕ est le potentiel des vitesses.

Potentiel des vitesses :

On appelle que pour un écoulement irrotationnel : $\vec{\Omega} = \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Or d'un point de vue mathématique $\vec{v} \wedge (\vec{v}\phi) = \vec{0}$, $\forall \phi$.

On peut donc poser : $\vec{v} = \vec{v}\phi$, ϕ appelé potentiel des vitesses. Dans le repère cartésien et en considérant un écoulement plan, on peut donc écrire que :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}\phi \\ v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y \\ \Rightarrow &\begin{cases} v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}\end{aligned}$$

Si de plus l'écoulement est incompressible :

$$\begin{aligned}div(\vec{v}) = 0 &\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ &\Rightarrow \Delta(\phi) = 0\end{aligned}$$

ϕ vérifie l'équation de Laplace. De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} & \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \\ & \Rightarrow \underbrace{\left(-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)}_{=0} \vec{e}_x + \underbrace{\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)}_{=0} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \vec{e}_z = \vec{0} \\ & \Rightarrow \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \vec{e}_z = \vec{0} \\ & \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \\ & \Rightarrow \Delta(\psi) = 0 \end{aligned}$$

ψ vérifie aussi l'équation de Laplace.

f) écoulements potentiels incompressibles :

Si, à la propriété précédente, on rajoute l'incompressibilité, caractérisée par $\text{div}(\vec{v}) = 0$, on obtient alors pour le potentiel des vitesses :

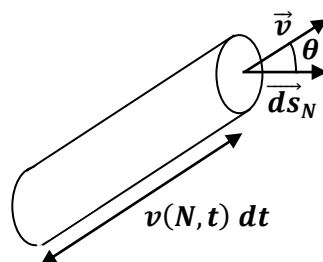
$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(\phi) = 0$$

Dans un écoulement potentiel incompressible, le potentiel des vitesses ϕ obéit à l'équation de Laplace : $\Delta(\phi) = 0$

5) conservation de la masse :

5.1) vecteur densité de courant de masse :

Considérons une surface élémentaire $d\mathbf{s}_N$ autour du point N . Les dimensions de cette surface étant faibles, on la confond avec son plan tangent, orthogonal au vecteur unitaire \vec{n}_N .



Le vecteur surface associe à cette surface élémentaire est :

$$\vec{ds}_N = ds_N \cdot \vec{n}_N$$

La masse δm qui traverse la surface ds_N entre t et $t + dt$ est la masse contenue dans le cylindre de longueur $v(N, t) dt$ représenté ci-dessus. Son volume est

$$d\tau = v(N, t) dt \cdot ds_N \cdot \cos \theta = (v(N, t) \cdot ds_N \cdot \cos \theta) dt = (\vec{v}(N, t) \cdot \vec{ds}_N) dt$$

La masse δm est donc égale à :

$$\delta m = \rho(N, t) \cdot d\tau = \rho(N, t) (\vec{v}(N, t) \cdot \vec{ds}_N) dt = (\rho \vec{v})(N, t) \cdot \vec{ds}_N dt$$

Elle est égale au flux du vecteur $\vec{J}_m = \rho \vec{v}$ à travers la surface ds_N multiplié par dt . Cette relation définit le vecteur densité de courant de masse qui est donc :

$$\vec{J}_m = \rho \vec{v}$$

5.2) débit massique, débit volumique :

Le débit massique à travers une surface S est par définition la masse de fluide qui traverse cette surface par unité de temps. Il s'exprime donc en kg/s . On le notera D_m dans la suite du cours. Il dépend de la surface et du temps.

$$D_m = \iint_{N \in S} \vec{J}_m(N, t) \cdot \vec{ds}_N = \iint_{N \in S} (\rho \vec{v})(N, t) \cdot \vec{ds}_N$$

Si la surface S est fermée, on définit en général le débit sortant (la normale \vec{ds}_N est orientée vers l'extérieur de la surface).

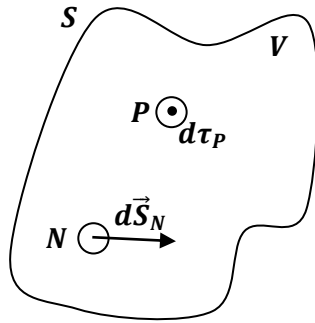
Le débit volumique à travers une surface S est par définition le volume de fluide qui traverse cette surface par unité de temps. Il s'exprime donc en m^3/s . On le notera D_v dans la suite du cours. Il dépend de la surface et du temps.

$$D_v = \iint_{N \in S} \vec{v}(N, t) \cdot \vec{ds}_N$$

Si le fluide est incompressible et homogène donc si la masse volumique est constante et indépendante du point, $D_m = \rho D_v$.

5.3) équation globale de conservation de masse :

Considérons un volume V quelconque, fixe et indéformable, délimité par la surface S .



Nous allons effectuer un bilan de masse pour le système ouvert V , entre les instants t et $t + dt$, en supposant qu'il n'y a ni création ni annihilation de masse.

A l'instant t , la masse de fluide contenue dans le volume V est :

$$M(t) = \iiint_{P \in V} \rho(P, t) d\tau_P$$

A l'instant $t + dt$, cette masse devient :

$$M(t + dt) = \iiint_{P \in V} \rho(P, t + dt) d\tau_P$$

Le volume V étant fixe et indéformable, le domaine d'intégration est le même aux deux instants.

La variation de la masse contenue dans le volume V est donc :

$$M(t + dt) - M(t) = \iiint_{P \in V} \rho(P, t + dt) d\tau_P - \iiint_{P \in V} \rho(P, t) d\tau_P$$

$$M(t + dt) - M(t) = \iiint_{P \in V} [\rho(P, t + dt) - \rho(P, t)] d\tau_P$$

$$M(t + dt) - M(t) = \iiint_{P \in V} \frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} d\tau_P dt$$

La masse qui sort du volume V entre t et $t + dt$ est égale au débit massique à travers la surface S multiplié par dt , c'est-à-dire au flux sortant du vecteur $\vec{J}_m = \rho\vec{v}$ à travers la surface S multiplié par dt , soit :

$$\delta M_{\text{sortant}} = \oint_{N \in S} (\rho\vec{v})(N, t) \cdot \vec{ds}_N dt$$

La conservation de la masse du volume V s'écrit :

$$M(t + dt) - M(t) = -\delta M_{\text{sortant}}$$

Soit, après simplification par dt :

$$\begin{aligned} \iiint_{P \in V} \frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} d\tau_P dt &= - \oint_{N \in S} (\rho\vec{v})(N, t) \cdot \vec{ds}_N dt \\ \iiint_{P \in V} \frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} d\tau_P + \oint_{N \in S} (\rho\vec{v})(N, t) \cdot \vec{ds}_N &= 0 \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\frac{dM}{dt} + D_m = 0$$

5.4) équation locale de conservation de la masse : équation de continuité

Le théorème d'Ostrogradski permet de transformer l'expression du flux de masse sortant de la surface S :

$$\oint_{N \in S} (\rho\vec{v})(N, t) \cdot \vec{ds}_N = \iiint_{P \in V} \text{div}(\rho\vec{v})(P, t) d\tau_P$$

L'équation de conservation de la masse devient :

$$\begin{aligned} \iiint_{P \in V} \frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} d\tau_P + \iiint_{P \in V} \text{div}(\rho\vec{v})(P, t) d\tau_P &= 0 \\ \iiint_{P \in V} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) \right) (P, t) d\tau_P &= 0 \end{aligned}$$

Cette relation étant vérifiée quelque soit le volume V , on en déduit l'équation locale de conservation de la masse, appelée également équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Remarque :

- 1- On peut établir directement l'équation de continuité en effectuant un bilan de masse sur un parallélépipède élémentaire.
- 2- Sachant que $\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\rho)$, l'équation de continuité est équivalente à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0$$

Nous reconnaissons la dérivée particulaire de la masse volumique dans les deux premiers termes de cette équation. Nous en déduisons :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0$$

6) condition aux limites :

6.1) position du problème :

La plupart des écoulements étudiés auront lieu dans une partie de l'espace limitée par des frontières. Par exemple, si nous étudions l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'un tuyau cylindrique, les frontières seront les parois intérieures du cylindre. Si en revanche nous étudions l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre dans un espace de grande dimension devant le rayon de ce cylindre, les frontières du domaine seront d'une part les parois extérieures du cylindre, d'autre part les limites du milieu que l'on supposera situées à l'infini (puisque les dimensions du milieu sont grandes devant le rayon du cylindre).

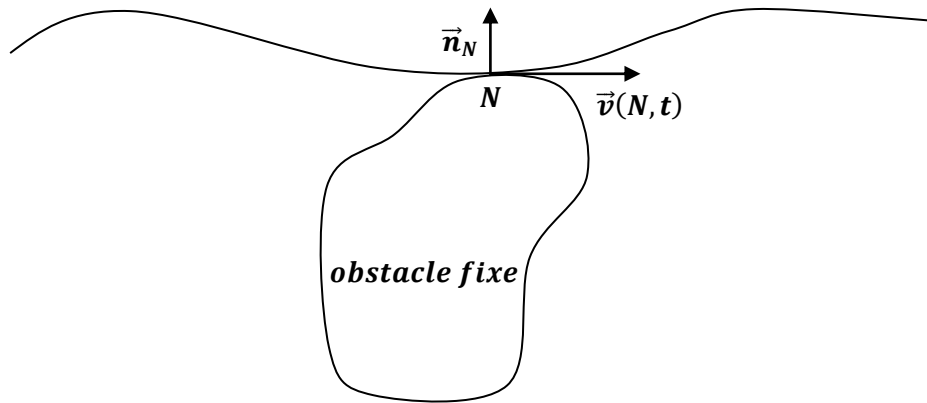
6.2) loin d'un obstacle :

Un obstacle, c'est-à-dire un corps solide immergé dans un fluide étudié, ne perturbe l'écoulement que sur des distances de même ordre de grandeur que sa taille caractéristique.

Loin d'un obstacle, celui-ci ne perturbe pas l'écoulement.

6.3) à la surface d'un obstacle :

L'obstacle étant solide, il est imperméable au fluide, celui-ci ne peut pas pénétrer dans l'obstacle. Nous en déduisons que le débit volumique à travers toute surface élémentaire de l'obstacle est nul donc, à la surface de l'obstacle, la vitesse du fluide est tangente à l'obstacle ou encore que la composante normale de la vitesse est nulle.

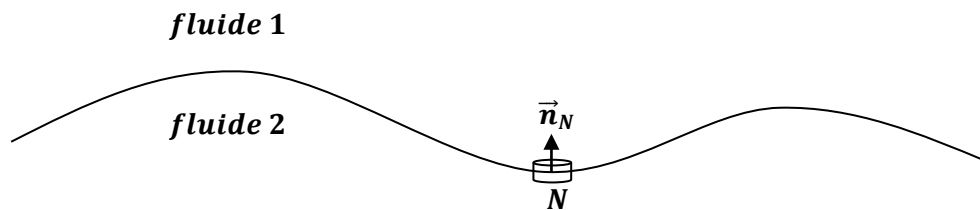


En tout point N de la surface de l'obstacle, dans le référentiel où l'obstacle est fixe, $\vec{v}(N, t) \cdot \vec{n}_N = 0$

6.4) à l'interface entre deux fluides :

Considérons maintenant l'écoulement de deux fluides non miscibles (de l'eau et de l'huile par exemple), l'interface entre les deux fluides étant à priori déformable.

Considérons un point N de l'interface et un petit cylindre à cheval sur l'interface, de surface de base dS d'épaisseur ε :



Les deux fluides ne peuvent pénétrer l'un dans l'autre, donc, quand on fait tendre ε vers zéro, le débit volumique à travers le petit cylindre tend vers zéro on en déduit :

$$\left(\vec{v}_{fluide\ 2}(N, t) - \vec{v}_{fluide\ 1}(N, t) \right) \cdot \vec{n}_N = 0$$

A l'interface entre deux fluides non miscibles, il y a continuité de la composante normale de la vitesse.

Chapitre II : Dynamique des fluides réels

L'équation de conservation de la quantité de mouvement découle de la loi fondamentale de la mécanique de Newton :

$$m \vec{\gamma} = \sum_i \vec{F}_i$$

Où m est la masse, $\vec{\gamma}$ est l'accélération, les \vec{F}_i sont les forces exercées sur le système considéré.

Si la masse change au cours du temps, cette équation devient :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

Où $\vec{P} = m \vec{v}$ est la quantité de mouvement.

1) Les forces dans un fluide :

1.1) Les forces de volume :

Les forces de volume s'exercent à distance, sur tout élément matériel localisé en un point M du volume $V(t)$. Dans ce cours, elles se réduiront aux seules forces de gravité.

Nous désignerons par $\vec{f}(M, t)$ la valeur, par unité de masse de cette force au point M et à l'instant t .

Notons $dV(M)$ l'élément de volume au point courant, la résultante des forces extérieures de volume s'exprime par :

$$\iiint_{V(t)} \rho(M, t) \vec{f}(M, t) dV(M)$$

1.2) Les forces de surface, tenseur des contraintes :

Les forces de surface sont transmises par contact du fluide extérieur au domaine, à travers tout élément de surface dS entourant un point P quelconque de celle-ci. En un point donné, il est clair que cette force dépend, à un instant donné, de l'orientation de l'élément de surface autour du point considéré. Nous représenterons ainsi par $d\vec{F}_S(P, \vec{n}, t)$ la valeur élémentaire de cette force s'exerçant sur une facette centrée en un point P , de normale unitaire \vec{n} et d'aire élémentaire dS .

En divisant cette force par la surface sur laquelle elle s'exerce, on définit le vecteur contrainte local.

$$\vec{T}(P, \vec{n}, t) = \frac{d\vec{F}_S(P, \vec{n}, t)}{dS}$$

La résultante des forces extérieures de surface s'exprime donc par :

$$\iint_{S(t)} d\vec{F}_S(\mathbf{P}, \vec{n}, t) = \iint_{S(t)} \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}, t) dS$$

2) Conservation de la quantité de mouvement :

Cette loi traduit l'équation fondamentale de la dynamique, à savoir que le taux de variation de la quantité de mouvement associée au volume matériel $V(t)$ est égal à la somme des forces extérieures agissant sur $V(t)$.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \sum \vec{F}_{ext}$$

Les forces extérieures agissant sur $V(t)$ sont :

- Les forces de volume : $\iiint_{V(t)} \rho \vec{f} dV$
- Les forces de surface : $\iint_{S(t)} \vec{T} dS$

En utilisant le théorème de transport pour une grandeur vectorielle, on :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \iint_{S(t)} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Soit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \iiint_{V(t)} \left[\vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] dV + \iint_{S(t)} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

En utilisant le théorème de la divergence, l'équation de continuité et la définition de la dérivée particulaire, la relation précédente se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV &= \iiint_{V(t)} \left[\vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] dV + \iiint_{V(t)} \text{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) dV \\ \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV &= \iiint_{V(t)} \left[\vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] dV + \iiint_{V(t)} [\vec{v} \text{div}(\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v})] dV \\ \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV &= \iiint_{V(t)} \underbrace{\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right]}_{\rho \frac{d\vec{v}}{dt}} dV + \iiint_{V(t)} \underbrace{\vec{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right]}_{=0} dV \end{aligned}$$

La dernière intégrale du second membre est identiquement nulle en vertu de l'équation de conservation de la masse.

Soit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \iiint_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV$$

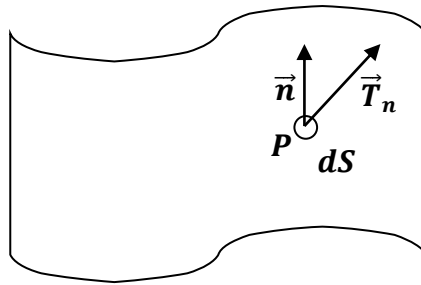
Finalement l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\iiint_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint_{V(t)} \rho \vec{f} dV + \iint_{S(t)} \vec{T} dS$$

3) Analyse des forces de surfaces :

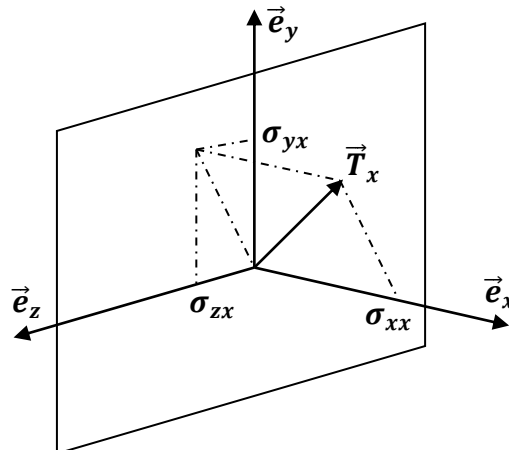
3.1) Tenseur de contrainte : définition

La contrainte \vec{T}_n présente une orientation a priori différente de celle de la normale \vec{n} et que les dimensions de cette contrainte sont celles d'une pression (on l'exprimera donc en **Pascal** ou en $N \cdot m^{-2}$).



Pour fixer les idées, examinons le cas particulier d'une contrainte s'exerçant en un point d'une surface perpendiculaire à l'axe \vec{e}_x d'un repère cartésien.

Cette contrainte, \vec{T}_x , présente alors trois composantes : une composante normale, notée σ_{xx} , et deux composantes tangentielles notées σ_{yx} et σ_{zx} (voir la figure).



Par convention, le premier indice indique la direction portant la composante alors que le second indice se réfère à la normale à la surface subissant la contrainte.

On peut donc développer \vec{T}_x comme :

$$\vec{T}_x = \sigma_{xx} \vec{e}_x + \sigma_{yx} \vec{e}_y + \sigma_{zx} \vec{e}_z$$

De manière analogue, si l'on considère les contraintes s'exerçant sur les surfaces perpendiculaires aux axes \vec{e}_y et \vec{e}_z , on peut les exprimer respectivement :

$$\vec{T}_y = \sigma_{xy} \vec{e}_x + \sigma_{yy} \vec{e}_y + \sigma_{zy} \vec{e}_z$$

$$\vec{T}_z = \sigma_{xz} \vec{e}_x + \sigma_{yz} \vec{e}_y + \sigma_{zz} \vec{e}_z$$

Les composantes du type σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} sont qualifiées de contraintes normales, les autres composantes, de contraintes tangentielles ou de cisaillement.

3.2) Représentation des forces de surface par le tenseur des contraintes :

Nous venons de voir qu'en chaque point P du fluide, il existe un vecteur \vec{T} correspondant à chaque direction \vec{n} .

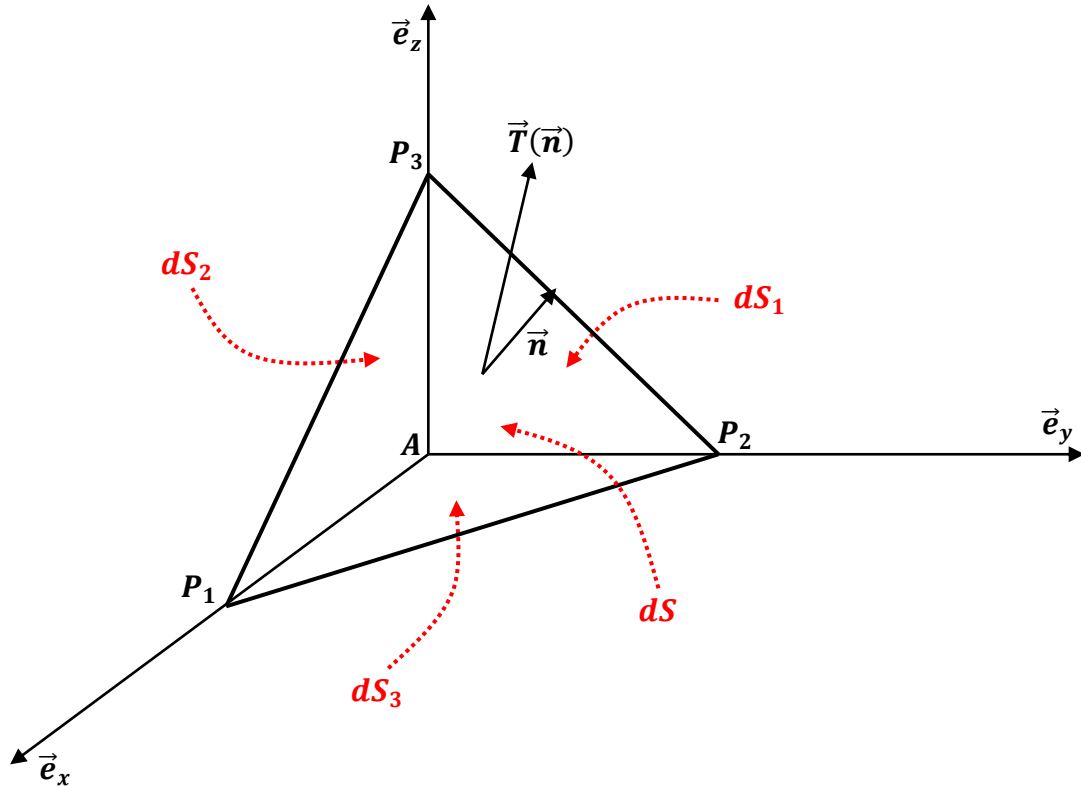
Nous allons maintenant montrer que la contrainte peut être représentée à l'aide d'un tenseur $\bar{\sigma}$ appelé tenseur des contraintes et qui caractérise l'état local des contraintes indépendamment de la direction \vec{n} .

$$\vec{T}(P, \vec{n}, t) = \bar{\sigma}(\vec{n}, t) \cdot \vec{n} \quad (1)$$

Démonstration :

Considérons l'équilibre d'un petit tétraèdre de volume infinitésimal dV dont les trois faces orthogonales dS_1 , dS_2 et dS_3 sont les projections de la quatrième face dS . Les notations sont explicitées dans le tableau ci-dessous.

Facette	Surface	Normale unitaire extérieure	Contrainte
$P_1 P_2 P_3$	dS	\vec{n}	$\vec{T}(\vec{n})$
$P_2 A P_3$	$dS_1 = \vec{e}_x \cdot \vec{n} dS$	$-\vec{e}_x$	$\vec{T}(-\vec{e}_x)$
$P_1 A P_3$	$dS_2 = \vec{e}_y \cdot \vec{n} dS$	$-\vec{e}_y$	$\vec{T}(-\vec{e}_y)$
$P_1 A P_2$	$dS_3 = \vec{e}_z \cdot \vec{n} dS$	$-\vec{e}_z$	$\vec{T}(-\vec{e}_z)$



Pour démontrer la relation (1) et justifier du caractère tensoriel de $\bar{\sigma}$, nous appliquons l'équation de conservation de quantité de mouvement à un domaine tétraédrique élémentaire. Nous avons ainsi :

$$\iiint_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint_{V(t)} \rho \vec{f} dV + \iint_{S'} \vec{T}(P, \vec{n}) dS + \sum_{l=1}^3 \iint_{S_l} \vec{T}(P_l, \vec{n}_l) dS$$

Où il est rappelé que le vecteur normal est orienté positivement lorsqu'il pointe vers l'extérieur. S' désigne la facette oblique et $S_l, l = 1, 2, 3$ chacune des trois facettes de normales respectives \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z . Tenant compte maintenant du fait qu'il s'agit d'un domaine élémentaire, la relation précédente devient, dans la limite $V(t) \rightarrow 0$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \rho \vec{f} dV + \vec{T}(\vec{n}) dS + \vec{T}(-\vec{e}_x) dS_1 + \vec{T}(-\vec{e}_y) dS_2 + \vec{T}(-\vec{e}_z) dS_3$$

On a :

$$\vec{T}(-\vec{n}) = -\vec{T}(\vec{n})$$

Alors :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \rho \vec{f} dV + \vec{T}(\vec{n}) dS - \vec{T}(\vec{e}_x) dS_1 - \vec{T}(\vec{e}_y) dS_2 - \vec{T}(\vec{e}_z) dS_3$$

Or, les éléments de surface sont reliés par $dS_1 = \vec{n} \cdot \vec{e}_x dS$, $dS_2 = \vec{n} \cdot \vec{e}_y dS$, $dS_3 = \vec{n} \cdot \vec{e}_z dS$ avec ces éléments d'aires, l'équation de la dynamique devient :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \rho \vec{f} dV + \vec{T}(\vec{n}) dS - \vec{T}(\vec{e}_x) \vec{n} \cdot \vec{e}_x dS - \vec{T}(\vec{e}_y) \vec{n} \cdot \vec{e}_y dS - \vec{T}(\vec{e}_z) \vec{n} \cdot \vec{e}_z dS$$

$$\vec{T}(\vec{n}) = \vec{T}(\vec{e}_x) \vec{n} \cdot \vec{e}_x + \vec{T}(\vec{e}_y) \vec{n} \cdot \vec{e}_y + \vec{T}(\vec{e}_z) \vec{n} \cdot \vec{e}_z + \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{f} \right) \frac{dV}{dS}$$

Prenons la limite $dS \rightarrow 0$ (en remarquant qu'alors $\frac{dV}{dS} \rightarrow 0$), on obtient en explicitant les produits scalaires :

$$\vec{T}(\vec{n}) = \vec{T}(\vec{e}_x) n_x + \vec{T}(\vec{e}_y) n_y + \vec{T}(\vec{e}_z) n_z$$

En développant $\vec{T}(\vec{e}_x)$, $\vec{T}(\vec{e}_y)$ et $\vec{T}(\vec{e}_z)$, on obtient :

$$\vec{T}(\vec{n}) = (\sigma_{xx} \vec{e}_x + \sigma_{yx} \vec{e}_y + \sigma_{zx} \vec{e}_z) n_x + (\sigma_{xy} \vec{e}_x + \sigma_{yy} \vec{e}_y + \sigma_{zy} \vec{e}_z) n_y + (\sigma_{xz} \vec{e}_x + \sigma_{yz} \vec{e}_y + \sigma_{zz} \vec{e}_z) n_z$$

Et en regroupant les termes selon les trois directions de l'espace :

$$\vec{T}(\vec{n}) = \begin{cases} (n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} + n_z \sigma_{xz}) \vec{e}_x \\ (n_x \sigma_{yx} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{yz}) \vec{e}_y \\ (n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy} + n_z \sigma_{zz}) \vec{e}_z \end{cases}$$

On note alors que ce résultat n'est autre que celui du produit d'un tenseur de rang 2 (matrice 3×3) par la normale \vec{n}

$$\vec{T}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}$$

Ou $\bar{\sigma}$ est appelé tenseur de contraintes. Ce tenseur présente donc l'intérêt de pouvoir calculer directement la contrainte s'exerçant sur une surface d'orientation quelconque. On remarque par ailleurs que les composantes normales se trouvent sur la diagonale du tenseur alors que les composantes tangentielles se trouvent de part et d'autre de la diagonale.

4) Formulation locale du bilan de quantité de mouvement :

En introduisant la relation $\vec{T} = \bar{\sigma} \vec{n}$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement on obtient :

$$\iiint_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint_{V(t)} \rho \vec{f} dV + \iint_{S(t)} \bar{\sigma} \vec{n} \cdot dS$$

En utilisant les théorèmes du gradient et de la divergence nous pouvons remplacer l'intégrale sur la surface par une intégrale sur le volume :

$$\iiint_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint_{V(t)} \rho \vec{f} dV + \iiint_{V(t)} \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} dV$$

$$\iiint_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint_{V(t)} (\rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}) dV$$

Cette relation étant valable pour tout $V(t)$ à n'importe quel instant t , on obtient la forme locale de conservation de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \right] = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}$$

En général les forces à distance (forces de volume) se limitent à la force de pesanteur : $\vec{f} = \vec{g}$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}$$

En passant aux notations indicielles :

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) v_i \right] = \rho g_i + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}$$

5) Lois de comportement, fluides Newtoniens :

5.1) Schéma de Newton :

En l'absence de mouvement, les forces de surface existant au sein d'un fluide sont des forces de pression, normales à l'élément de surface. Cette pression n'est autre que la pression hydrostatique pour un fluide pesant au repos, ou plus généralement la pression thermodynamique pour un milieu quelconque en équilibre. Le tenseur de contraintes est alors sphérique et s'écrit donc :

$$\bar{\sigma}^0 = -P \bar{I} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij}^0 = -P \delta_{ij}$$

Quand le fluide est en mouvement, on peut poser :

$$\bar{\sigma} = -P \bar{I} + \bar{\tau} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \underbrace{-P \delta_{ij}}_{\text{la partie sphérique}} + \underbrace{\tau_{ij}}_{\text{deviateur}}$$

Le tenseur $\bar{\tau}$ représente alors les contraintes qui sont spécifiquement dues au mouvement du fluide.

A partir de la trace du tenseur σ_{ij} , on peut également introduire une autre grandeur, P' jouant le rôle d'une pression. Elle est dite pression mécanique et est définie par :

$$P' = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

Il apparaît alors que :

$$P' = P - \frac{\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}}{3}$$

De sorte que les pressions mécanique et thermodynamique ne sont pas a priori égales.

De manière générale, on admet une dépendance du déviateur des contraintes au tenseur des taux de déformation qui pour chaque composante du tenseur s'écrit sous la forme :

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

A_{ijkl} est un tenseur de quatrième ordre dont on peut montrer qu'il s'écrit nécessairement, sous l'hypothèse d'isotropie :

$$A_{ijkl} = a \delta_{ik} \delta_{jl} + b \delta_{il} \delta_{jk} + c \delta_{ij} \delta_{kl}$$

Où a , b , c sont trois constantes réelles.

La symétrie du tenseur des contraintes ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) impose que $A_{ijkl} = A_{jikl}$, ce qui conduit à la condition $a = b$.

$$\begin{aligned} A_{ijkl} = A_{jikl} &\Rightarrow a \delta_{ik} \delta_{jl} + b \delta_{il} \delta_{jk} + c \delta_{ij} \delta_{kl} = a \delta_{jk} \delta_{il} + b \delta_{jl} \delta_{ik} + c \delta_{ji} \delta_{kl} \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

On obtient donc, sous l'hypothèse d'isotropie :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= [a(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + c \delta_{ij} \delta_{kl}] \varepsilon_{kl} \\ \tau_{ij} &= a(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) + c \delta_{ij} v \end{aligned}$$

Où l'on rappelle que $v = \varepsilon_{ll}$.

On a :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Donc :

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Et

$$\varepsilon_{ll} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

Donc, τ_{ij} peut s'écrire comme :

$$\tau_{ij} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + c \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

En posant simplement $a = \mu$ et $c = \mu'$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \mu' \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

De façon équivalente, en notation tensorielle, cette relation s'écrit encore :

$$\bar{\tau} = 2\mu \bar{\varepsilon} + \mu' v \bar{I}$$

Où $v = \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$ représente la trace de $\bar{\varepsilon}$.

μ est la viscosité dynamique et μ' est un paramètre assimilable au coefficient de Lamé en élasticité linéaire.

La relation précédente peut être explicitement en faisant apparaître la décomposition en partie sphérique et déviateur du tenseur $\bar{\tau}$. On a ainsi :

$$\bar{\tau} = \underbrace{2\mu \left(\bar{\varepsilon} - \frac{v}{3} \bar{I} \right)}_{\text{déviateur}} + \underbrace{\left(\mu' + \frac{2\mu}{3} \right) v \bar{I}}_{\text{partie sphérique}}$$

Le coefficient $\mu_v = \mu' + \frac{2\mu}{3}$ et appelé viscosité de volume car il est associé aux variations en volume du fluide.

5.2) Hypothèse de Stokes :

La pression mécanique, P' , définie à partir de la trace du tenseur des contraintes est liée à la pression thermodynamique, P , par :

$$P' = P - \frac{\tau_{ii}}{3}$$

Ce qui, pour un fluide newtonien se traduit par :

$$P' = P - \left(\mu' + \frac{2\mu}{3} \right) v$$

On constate que les deux pressions seront égales si l'écoulement est incompressible ($\text{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow v = 0$) ou si la viscosité en volume est nulle, c'est-à-dire :

$$\mu' = -\frac{2}{3}\mu$$

C'est ce que l'on appelle la condition de Stokes. Dans ce cas on trouve que la loi de comportement est :

$$\bar{\tau} = 2\mu\bar{\varepsilon} - \frac{2}{3}\mu v\bar{I}$$

5.3) Loi de comportement de Navier-Stokes :

En négligeant la viscosité en volume, pour un fluide newtonien en écoulement incompressible, la loi de comportement s'écrit :

$$\bar{\tau} = 2\mu\bar{\varepsilon}$$

Avec :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

6) Les équations de Navier-Stokes :

L'expression du bilan de quantité de mouvement à l'échelle locale est :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \right] = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}$$

En introduisant la loi de comportement pour un fluide newtonien :

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Avec

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\mu v \delta_{ij}$$

Donc

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\mu v \delta_{ij}$$

On obtient pour chaque composante i :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial(\sigma_{ij})}{\partial x_j}$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-P \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \frac{2\mu}{3} v \delta_{ij} \right)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial(\mu \varepsilon_{ij})}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\mu v)}{\partial x_j} \delta_{ij}$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial(\mu \varepsilon_{ij})}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\mu v)}{\partial x_i}$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + 2 \frac{\partial(\mu \varepsilon_{ij})}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\mu v)}{\partial x_i}$$

Ce qui donne

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \Delta(v_i) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

Cette dernière relation constitue l'équation de Navier-Stokes.

Lorsque le fluide est incompressible, alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

L'équation précédente devient dans ce cas :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \Delta(v_i)$$

Remarque :

1- Les équations de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g} + \mu \Delta(\vec{v}) + \frac{\mu}{3} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v}))$$

2- Pour un fluide au repos ($\vec{v} = \vec{0}$), l'équation de Navier-Stokes se réduit à l'équation hydrostatique :

$$\rho \vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

- 3- Lorsque ρ est constante, ou lorsque la vitesse de l'écoulement est petite devant la vitesse du son dans le milieu fluide on peut admettre que $(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0)$, l'équation de Navier-Stokes se réduit alors à :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g} + \mu \Delta(\vec{v})$$

Equation de Navier-Stokes incompressible

- 4- Pour un fluide non visqueux en écoulement. On obtient alors l'équation d'Euler :

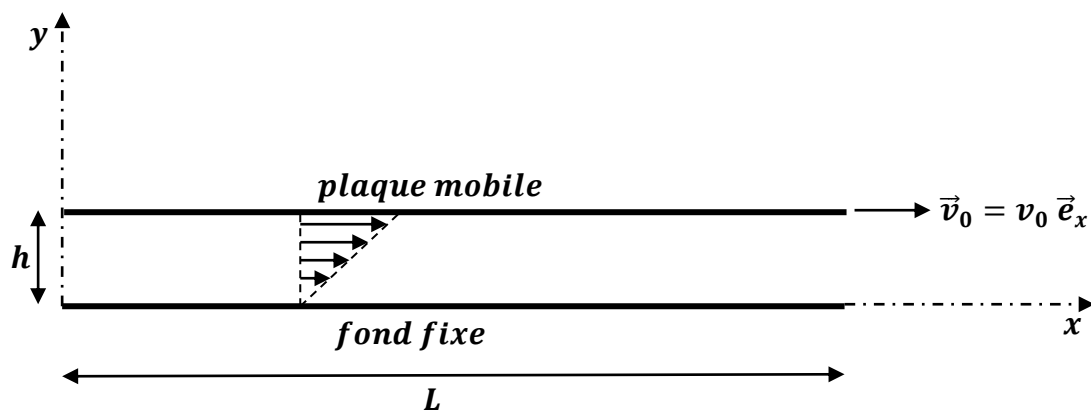
$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g}$$

Equation d'Euler (fluide parfait).

7) Exemples d'écoulement incompressible « solution exacte » des équations de Navier-Stokes :

7.1) première application : Ecoulement de couette plan.

On considère l'écoulement plan entre deux plaques distantes de h dont l'une est mobile à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ et l'autre est fixe. La largeur des parois est grande devant h ainsi que la longueur notée L . Le fluide a un comportement newtonien et l'écoulement est incompressible et permanent,



Compte tenu de la géométrie du dispositif, le champ des vitesses est de la forme $\vec{v}(M) = v(y) \vec{e}_x$.

L'accélération locale est nulle : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ puisque nous sommes en régime permanent.

L'accélération convective s'écrit :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = v(y) \frac{\partial v(y)}{\partial x} \vec{e}_x = \vec{0}$$

L'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g} + \mu \Delta(\vec{v}) = \mathbf{0}$$

En projection sur l'axe horizontal Ox et sur l'axe vertical ascendant Oy , nous obtenons :

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation s'intègre en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g & \Rightarrow P = \int -\rho g \, dy \\ & \Rightarrow P = -\rho g y + f(x) \end{aligned}$$

Où $f(x)$ est une fonction de x seul. Au niveau de la plaque, c'est-à-dire en $y = h$, la pression est uniforme, égale à la pression atmosphérique augmentée de la pression exercée par la plaque, que nous supposons uniforme. On en déduit que la fonction f est une constante donc que la pression ne dépend pas de la coordonnée x .

$$P = -\rho g y + C$$

La première équation devient :

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Elle s'intègre en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 & \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = a \\ & \Rightarrow v = a y + b \end{aligned}$$

Où a et b sont des constantes.

Les conditions aux limites sont $v(y = 0) = 0$ et $v(y = h) = v_0$ puisque le fluide est visqueux.

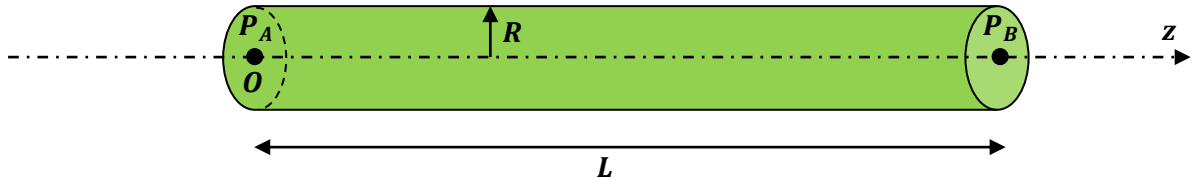
$$\begin{aligned} v(y = 0) = 0 & \Rightarrow a(0) + b = 0 & \Rightarrow b = 0 \\ v(y = h) = v_0 & \Rightarrow ah = v_0 & \Rightarrow a = \frac{v_0}{h} \end{aligned}$$

Nous trouvons finalement :

$$\vec{v}(M) = v_0 \frac{y}{h} \vec{e}_x$$

7.2) deuxième application : écoulement de Poiseuille cylindrique.

Étudions l'écoulement stationnaire d'un fluide de viscosité μ , de masse volumique ρ , dans un tuyau cylindrique horizontal, d'axe Oz , de rayon R , de longueur L . La pression est P_A à l'entrée du tube et P_B à la sortie (un écoulement induit par une différence de pression entre l'entrée et la sortie du dispositif est appelé écoulement de Poiseuille). On néglige les effets de la pesanteur.



Le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v}(M) = v(r)\vec{e}_z$$

L'accélération locale est nulle puisque nous sommes en régime permanent :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors :

$$\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \mu \Delta(\vec{v})$$

En coordonnées cylindriques :

L'accélération convective s'écrit :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \\ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La densité volumique des forces de pression est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix}$$

La densité volumique des forces de viscosité est :

$$\mu \Delta(\vec{v}) = \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$\mu \Delta(\vec{v}) = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \end{pmatrix}$$

$$\mu \Delta(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \end{pmatrix}$$

D'après la symétrie de révolution du système, la pression ne dépend pas de la variable θ .
Finalement, les équations de Navier-Stokes se résument à :

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0 \end{cases}$$

Les 2 premières relations entraînent que P ne dépend que de z .

La troisième équation s'écrit donc :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

Le premier terme de cette égalité est fonction de z uniquement alors que le second n'est fonction que de r . Ces deux variables étant indépendantes, les deux membres de cette égalité sont constants. Notons K cette constante.

Nous en déduisons :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = K \quad \Rightarrow \quad P = Kz + a$$

Compte tenu des conditions aux limites, $P(z=0) = P_A$ et $P(z=L) = P_B$, le champ des pressions est égal à :

$$P(z=0) = P_A \quad \Rightarrow \quad a = P_A$$

$$P(z = L) = P_B \quad \Rightarrow \quad K = \frac{P_B - P_A}{L}$$

D'où

$$P = (P_B - P_A) \frac{z}{L} + P_A$$

La vitesse $v(r)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) &= K \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{P_B - P_A}{\mu L} r \\ &\Rightarrow \quad r \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{P_B - P_A}{2 \mu L} r^2 + K' \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{P_B - P_A}{2 \mu L} r + \frac{K'}{r} \end{aligned}$$

Où K' est une constante.

Quand le rayon r tend vers zéro, la dérivée de la vitesse reste finie (une dérivée infinie n'aurait aucune réalité physique), donc :

$$K' = 0$$

Il reste :

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{P_B - P_A}{2 \mu L} r$$

Qui s'intègre en :

$$v(r) = \frac{P_B - P_A}{4 \mu L} r^2 + K''$$

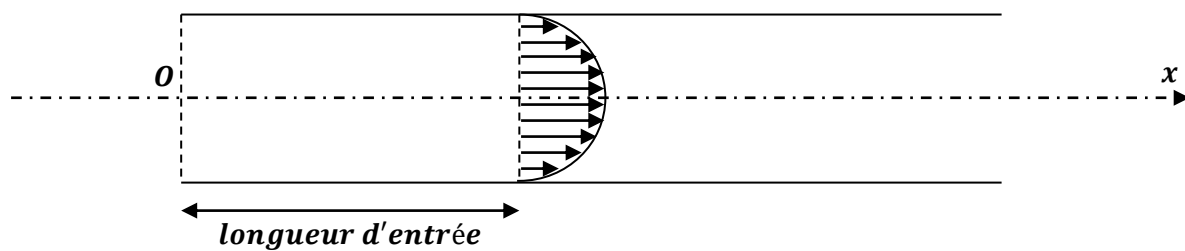
Puisqu'en $r = R$ (sur la paroi) la vitesse est nulle :

$$\begin{aligned} v(r = R) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{P_B - P_A}{4 \mu L} R^2 + K'' = 0 \\ &\Rightarrow \quad K'' = -\frac{P_B - P_A}{4 \mu L} R^2 \end{aligned}$$

Finalement :

$$v(r) = \frac{P_B - P_A}{4 \mu L} (r^2 - R^2)$$

Remarquons que $v(r) > 0$ pour $P_A > P_B$: le fluide s'écoule dans le sens des pressions décroissantes ce qui est conforme à l'intuition.



Chapitre III : Turbulence

1) Nombre de Reynolds :

Le point de départ de ce chapitre est l'équation de Navier-Stokes pour un fluide Newtonien incompressible, démontré au chapitre précédent :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}$$

Où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinématique.

Dans cette équation, **3** termes font intervenir la vitesse : le terme instationnaire $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, l'accélération convective $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ et le visqueux $\mu \Delta \vec{v}$. La nature de l'écoulement va dépendre fortement de l'importance relative de ces termes.

Afin d'évaluer l'importance des différents termes de l'équation de Navier-Stokes, on forme les rapports des ordres de grandeur correspondant. En notant L , U et T les échelles caractéristiques de longueur, de vitesse et de temps, on a :

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \frac{U}{T} ; \quad [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] = \frac{U^2}{L} ; \quad [\nu \Delta \vec{v}] = \frac{\nu U}{L^2}$$

Pour caractériser le régime d'un écoulement, laminaire ou turbulent, on s'intéresse au nombre sans dimension dit nombre de Reynolds, qui physiquement représente le rapport des effets d'inertie, sur les effets visqueux et qui est défini par :

$$Re = \frac{[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}]}{[\nu \Delta \vec{v}]} = \frac{\frac{U^2}{L}}{\frac{\nu U}{L^2}} = \frac{U L}{\nu}$$

Qui joue un rôle fondamental en mécanique des fluides (le choix des échelles L et U pour construire ce nombre dépend de la géométrie exacte de l'écoulement)

2) écoulement laminaire ou turbulent :

2-1) les deux régimes d'écoulement :

Pour les faibles vitesses d'écoulement (donc les faibles nombres de Reynolds $Re < Re_c$) le champ des vitesses du fluide varie de façon régulière dans l'espace et dans le temps, les diverses couches de fluide glissent les unes sur les autres : c'est l'écoulement laminaire, stable, où les effets diffusifs de viscosité sont prépondérants et éliminent les effets de turbulence.

Pour les grandes vitesses d'écoulement (donc les grands nombres de Reynolds $Re > Re_c$) le champ des vitesses varie de façon irrégulière, les lignes de courant s'entremêlent et il se forme des tourbillons : c'est l'écoulement turbulent instable, où les effets convectifs sont prépondérants.

2-2) nombre de Reynolds critique :

Le passage du régime laminaire au régime turbulent s'effectue à une vitesse critique qui correspond au nombre de Reynolds critique, qui dépend de la géométrie et de l'état de lissage des conduits.

Le nombre de Reynolds pour les écoulements interne (conduite) :

$$\begin{cases} \text{Laminaire} & : Re < 2300 \\ \text{Transitoire} & : 2300 < Re < 4000 \\ \text{Turbulent} & : Re > 4000 \end{cases}$$

3) caractéristiques et propriétés de la turbulence :

La turbulence est caractérisée par différents aspects, dont voici les principaux :

3-1) L'aspect irrégulier et aléatoire en temps ou en espace :

Les grandeurs telles que la vitesse, la pression et la température varient de façon rapide et aléatoire. Les écoulements turbulents sont donc fortement instationnaires.

3-2) L'aspect tridimensionnel et rotationnel :

Même si l'écoulement moyen est bidimensionnel, les fluctuations induites par la turbulence sont nécessairement tridimensionnelles et le champ de vitesses est rotationnel.

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \neq \mathbf{0}$$

3-3) L'aspect dissipatif :

C'est la viscosité du fluide qui est à l'origine de la dissipation de l'énergie cinétique produite aux grandes échelles. On a transformation de l'énergie cinétique en énergie interne (élévation de température).

3-4) l'aspect diffusif :

Les écoulements turbulents ont la propriété de favoriser le mélange par diffusion de la quantité de mouvement, de chaleur et de masse. Cette propriété est particulièrement intéressante pour de nombreux process industriels.

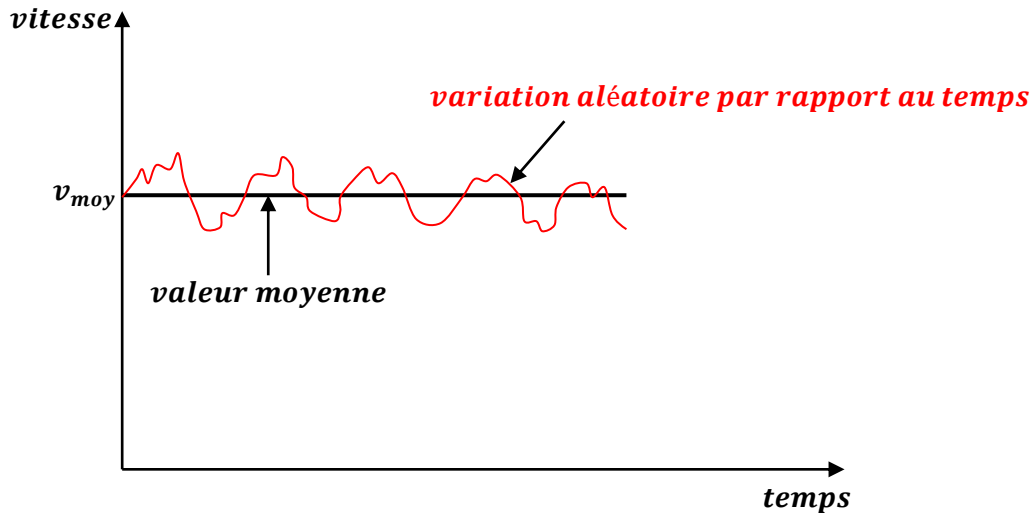
L'écoulement est fortement diffusif, au sens où les fluctuations du champ de vitesse assurent un mélange rapide et efficace de tout traceur passif injecté en son sein.

4) décomposition de Reynolds :

4-1) principe :

Reynolds suggère la décomposition suivante des variables, que se soit pour les vitesses ou la pression :

- Une composante moyenne
- Une composante fluctuante



Pour décrire le mouvement turbulent il est commode de décomposer le mouvement en « un mouvement moyen » et en « un mouvement de fluctuation », ou mouvement tourbillonnaire.

La moyenne est comptée sur un intervalle assez long et désigné, pour la composante v_x de vitesse, par exemple, \bar{v}_x ; la vitesse de fluctuation est notée par v'_x .

De cette manière on pose :

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x \quad ; \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y \quad ; \quad v_z = \bar{v}_z + v'_z \quad ; \quad p = \bar{p} + p'$$

Dans le cas d'un écoulement turbulent compressible, il est aussi nécessaire de poser :

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad ; \quad T = \bar{T} + T'$$

La moyenne en temps est calculée en un point fixe dans l'espace et donnée, par exemple, par :

$$\bar{v}_x = \frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} v_x dt$$

Où l'intervalle t_1 est assez long de sorte que :

$$\bar{v}'_x = \bar{v}'_y = \bar{v}'_z = \bar{p}' = \bar{\rho}' = \bar{T}' = 0$$

Avant d'établir les équations pour un écoulement turbulent il est utile de rappeler les règles à suivre pour le calcul des grandeurs moyennes :

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f} \quad ; \quad \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g} \quad ; \quad \overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \quad ; \quad \overline{f \cdot g} \neq \bar{f} \cdot \bar{g} \quad ; \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \quad ; \quad \overline{\int f ds} = \int \bar{f} ds$$

Où s représente l'une des variables x, y, z ou t .

Appliquons ces formules aux grandeurs de flux, par exemple, $\overline{v_i \cdot v_j}$ ou $v_i = v_x, v_y$ ou v_z :

$$\overline{v_i \cdot v_j} = \overline{(v_i + v'_i) \cdot (v_j + v'_j)} = \overline{v_i v_j + v'_i v_j + v_i v'_j + v'_i v'_j}$$

$$\overline{v_i \cdot v_j} = \overline{v_i v_j} + \overline{v'_i v_j} + \overline{v_i v'_j} + \overline{v'_i v'_j}$$

$$\overline{v_i \cdot v_j} = \overline{v_i v_j} + \overline{v'_i v_j} + \overline{v_i v'_j} + \overline{v'_i v'_j}$$

$$\overline{v_i \cdot v_j} = \overline{v_i v_j} + \overline{v'_i v'_j}$$

5) équations de mouvement et tenseur de contraintes de Reynolds :

Si on considère le cas d'écoulement incompressibles et sans force de volume (gravité), les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes sont alors :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta v_x \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v_y \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z \quad (4)$$

Ensuite, nous multiplions l'équation de continuité (1) par (ρv_x) et puis ajoutons le résultat à l'équation (2), ainsi on obtient :

$$(\rho v_x) \times (1) \quad \Rightarrow \quad \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

$$(\rho v_x) \times (1) + (2) \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial(v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z v_x)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta v_x$$

Ensuite, nous multiplions l'équation de continuité (1) par (ρv_y) et puis ajoutons le résultat à l'équation (3), ainsi on obtient :

$$(\rho v_y) \times (1) + (3) \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial(v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z v_y)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v_y$$

Ensuite, nous multiplions l'équation de continuité (1) par (ρv_z) et puis ajoutons le résultat à l'équation (4), ainsi on obtient :

$$(\rho v_z) \times (1) + (4) \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial(v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z v_z)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z$$

5-1) continuité du mouvement moyen :

Maintenant remplaçons v_x, v_y et v_z par $(\bar{v}_x + v'_x)$, $(\bar{v}_y + v'_y)$, $(\bar{v}_z + v'_z)$ dans l'équation de continuité (1) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y + v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_z + v'_z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0$$

L'opérateur de moyenne d'ensemble appliqué à cette équation fournit la relation conséquente suivante :

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'_y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \frac{\partial \overline{v'_z}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0$$

En situation isovolume, le champ de vitesse moyenne est donc solénoïdal tout comme l'est, à tout instant, le champ de vitesse fluctuante, puisque par soustraction directe des deux équations précédentes, on a également :

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0$$

Les composantes de vitesse moyenne et fluctuante vérifient chacune l'équation de continuité.

5-2) dynamique du mouvement moyen : équation de Reynolds

Maintenant remplaçons v_x, v_y, v_z et p respectivement par $(\bar{v}_x + v'_x)$, $(\bar{v}_y + v'_y)$, $(\bar{v}_z + v'_z)$ et $(\bar{p} + p')$ et par la suite prenons la moyenne en temps des équations ainsi trouvées :

Pour l'équation du mouvement en x on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}_x + v'_x)(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y + v'_y)(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_z + v'_z)(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial z} \right)$$

$$= - \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}_x \bar{v}_x + 2\bar{v}'_x \bar{v}_x + v'_x v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_x \bar{v}_y + \bar{v}_x v'_y + v'_x \bar{v}_y + v'_x v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_x \bar{v}_z + \bar{v}_x v'_z + v'_x \bar{v}_z + v'_x v'_z)}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}_x \bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v'_x v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_x \bar{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v'_x v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_x \bar{v}_z)}{\partial z} + \frac{\partial(v'_x v'_z)}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \frac{\partial(v'_x v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v'_x v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v'_x v'_z)}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{v}_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \bar{v}_x \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial(v'_x v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v'_x v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v'_x v'_z)}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{v}_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{v}_x - \rho \left(\frac{\partial(v'_x v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v'_x v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v'_x v'_z)}{\partial z} \right)$$

Et sur les composantes y et z :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v}_y - \rho \left(\frac{\partial(v'_x v'_y)}{\partial x} + \frac{\partial(v'_y v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v'_y v'_z)}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \Delta \bar{v}_z - \rho \left(\frac{\partial(v'_x v'_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v'_y v'_z)}{\partial y} + \frac{\partial(v'_z v'_z)}{\partial z} \right)$$

Ces équations sont similaires aux équations de Navier-Stokes sauf que les composantes de vitesse v_x, v_y et v_z sont remplacées par \bar{v}_x, \bar{v}_y et \bar{v}_z et que ces équations contiennent des termes additionnels qui dépendent des quantités turbulentes fluctuantes. On peut écrire ces équations comme :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{v}_x + \left(\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v}_y + \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \Delta \bar{v}_z + \left(\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} \right)$$

Le bilan de quantité de mouvement moyenne, en référence à l'évolution moyenne prend finalement la forme suivante, encore qualifiée d'**équation de Reynolds** :

$$\rho \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j}$$

Le tenseur de contrainte turbulente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{v'_x v'_x} & \overline{v'_x v'_y} & \overline{v'_x v'_z} \\ \overline{v'_x v'_y} & \overline{v'_y v'_y} & \overline{v'_y v'_z} \\ \overline{v'_x v'_z} & \overline{v'_y v'_z} & \overline{v'_z v'_z} \end{pmatrix}$$

Les composantes de ce tenseur représentent en effet les contraintes apparentes produites par le mouvement turbulent. Ce tenseur est appelé tenseur de contraintes de Reynolds ou tenseur de contraintes apparentes. Le tenseur de contrainte totale est donné par :

$$\sigma'_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + 2\mu \bar{\epsilon}_{ij} - \rho \overline{v'_i v'_j}$$

Avec :

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)$$

On peut donc écrire :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}$$

Pour un écoulement pleinement turbulent, les contraintes apparentes sont généralement très grandes devant les composantes visqueuses qui peuvent même être négligées dans de nombreux calculs.

En notations indicielles, l'interprétation du champ moyen et de fluctuation peut être illustrée de la manière suivante :

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{force moyenne d'inertie}} = - \underbrace{\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}_{\text{force moyenne de pression}} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{force moyenne de viscosité}} - \underbrace{\frac{\partial (\rho \bar{v}'_i v'_j)}{\partial x_j}}_{\text{tensions de Reynolds}}$$

Ensemble, les équations moyennes de Reynolds ne sont pas suffisantes pour une évaluation rationnelle de l'écoulement moyen tant que la relation entre les composantes moyennes et turbulentes reste inconnue. Une telle relation ne peut, à ce jour, être obtenue que d'une façon empirique et constitue le contenu essentiel de toutes les hypothèses concernant la turbulence à discuter dans ce qui suit

6) les modèles de turbulence :

6-1) modèle de Boussinesq - viscosité turbulente :

Clairement le système des équations de Reynolds, soient **4** équations en composantes pour les champs inconnus \bar{p} , \bar{v} et \bar{R} , soient **10** champs en composantes, n'est pas fermé. Il y a donc nécessité de définir « des équations de fermeture » pour fermer le problème. Le modèle de Boussinesq consiste à supposer que le tenseur des contraintes turbulentes est la superposition d'un terme « d'énergie cinétique », isotrope,

$$\bar{R}_{iso} = \alpha \bar{I}$$

qui permet de respecter la condition

$$tr(\bar{R}_{iso}) = tr(\bar{R})$$

$$3\alpha = -\rho \bar{v}'_i v'_i = -2\rho \bar{k}$$

$$\alpha = -\frac{2}{3}\rho \bar{k}$$

Soit

$$\bar{R}_{iso} = -\frac{2}{3}\rho \bar{k} \bar{I}$$

Et d'un terme de « diffusion visqueuse turbulente », de trace nulle, proportionnel au tenseur des taux de déformation de l'écoulement moyen, vu comme la source de cette turbulence :

$$\bar{R}_{def.moy.} = 2\mu^t \bar{\epsilon}(\bar{v})$$

Cette formule introduit la « viscosité dynamique turbulente » μ^t , en général grande devant la viscosité dynamique intrinsèque μ du fluide. On appelle aussi parfois μ^t « viscosité tourbillonnaire », en faisant allusion au fait qu'elle modélise les phénomènes de dispersion par les tourbillons de la turbulence. Bien entendu la « viscosité cinématique turbulente ».

$$\nu^t = \frac{\mu^t}{\rho}$$

Au bilan :

$$\bar{R} = \bar{R}_{iso} + \bar{R}_{def.moy.} = -\frac{2}{3}\rho \bar{k} \bar{I} + 2\mu^t \bar{\epsilon}(\bar{v})$$

Soit, en composantes en coordonnées cartésiennes :

$$R_{ij} = -\frac{2}{3}\rho \bar{k} \delta_{ij} + \mu^t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)$$

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = -\frac{2}{3}\rho \bar{k} \delta_{ij} + \mu^t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)$$

La contrainte effective totale est alors écrite comme :

$$\sigma'_{ij} = (-\bar{p} \delta_{ij} + 2\mu \bar{\epsilon}_{ij}) + \left(-\frac{2}{3}\rho \bar{k} \delta_{ij} + \mu^t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

$$\sigma'_{ij} = -\left(\bar{p} + \frac{2}{3}\rho \bar{k} \right) \delta_{ij} + 2(\mu + \mu^t) \bar{\epsilon}_{ij}$$

Avec ce modèle de fermeture simple, les équations moyennées deviennent :

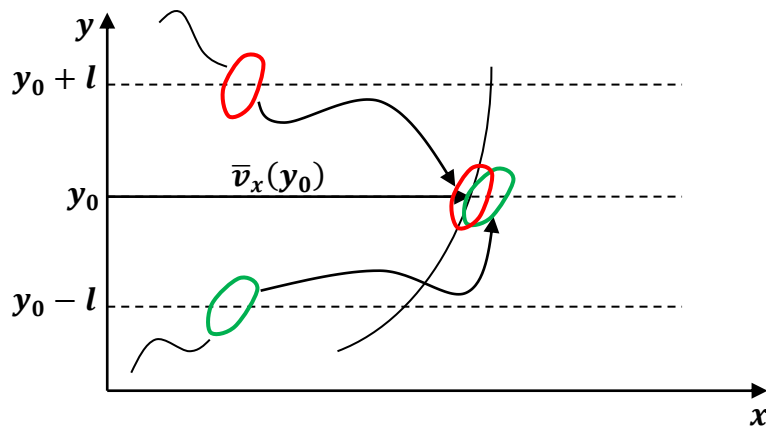
$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3}\rho \bar{k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (2(\mu + \mu^t) \bar{\epsilon}_{ij})$$

6-2) modèle de longueur de mélange de Prandtl :

Considérons, comme l'illustre la figure, un écoulement cisailé simple en fluide incompressible qui soit, en moyenne, permanent et bidimensionnel plan.

En raison du brassage permanent du fluide par l'agitation turbulente, on considère qu'à un instant donné, un paquet de fluide en provenance de la région $y > y_0$ arrive dans le plan $y = y_0$ où il va interagir en se mélangeant avec un autre paquet issu, lui, de la région $y < y_0$.



Selon la phénoménologie imaginée par Prandtl, des particules fluides peuvent, au sein même de l'agitation turbulente, se regrouper pour un temps en paquets se déplaçant en bloc.

Le mélange résulte de la rencontre entre deux paquets, avec association/ recombinaison de l'assemblage les particules fluides permettant au processus de perdurer. Quatre hypothèses principales, grâce auxquelles on peut obtenir une expression de la viscosité de turbulence, caractérisent cette phénoménologie.

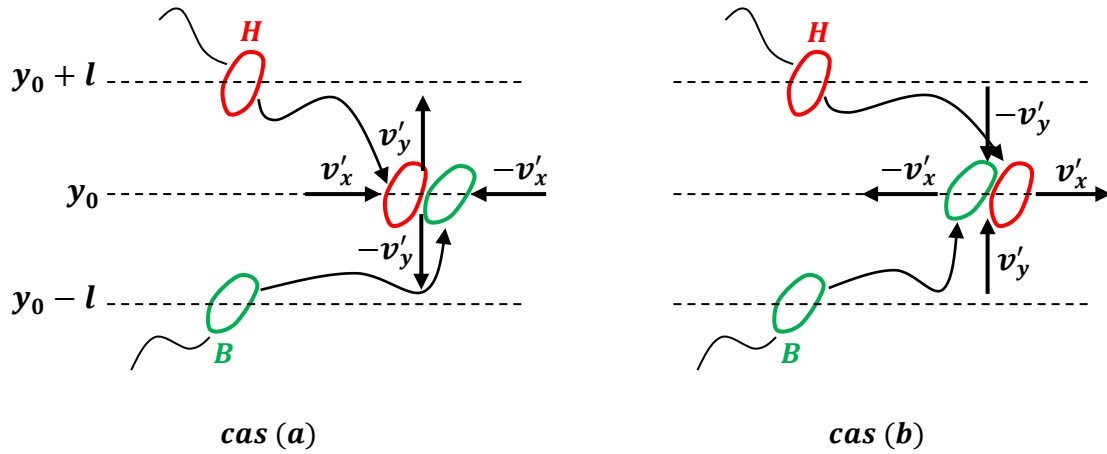
H1. Les caractéristiques avant mélange sont celles du point d'origine. Par exemple, la quantité de mouvement axiale (selon l'axe x) des paquets de fluide au moment de la rencontre reste adaptée à la valeur moyenne en leurs points d'origine. Ainsi, pour une masse fluide issue de la région supérieure, cette quantité de mouvement sera proportionnelle à :

$$\bar{v}_x(y_0 + l) = \bar{v}_x(y_0) + l \left. \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|_{y=y_0} + \dots$$

H2. Les caractéristiques de tout paquet de fluide se conservent entre deux interactions. Ainsi, en arrivant dans le plan $y = y_0$, le paquet venant de la zone supérieure possède un excédent de quantité de mouvement par rapport à la valeur moyenne locale. Selon Prandtl, il en résulte une fluctuation de vitesse axiale, qui, au premier ordre, vaut :

$$v'_x = \bar{v}_x(y_0 + l) - \bar{v}_x(y_0) = l \left. \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|_{y=y_0} + \mathcal{O}(l^2)$$

H3. Le mélange de deux paquets de fluide issus de régions opposées de l'écoulement, se fait selon un processus qui peut revêtir l'une ou l'autre des deux formes indiquées ci-après (voir la figure)



- Dans le cas (a), le paquet (H) précède, au point de rencontre, le paquet (B). Compte tenu des signes respectifs des fluctuations de vitesse axiale de chacun d'eux (excédent de quantité de mouvement pour (H) et fluctuation v'_x positive, déficit pour (B) et fluctuation v'_x négative), le mélange se fait par collision entre ces deux paquets. Il en résulte par continuité une éjection du fluide selon la direction normale et à des vitesses opposées $-v'_y$ et v'_y respectivement.
- Dans le cas (b) où le paquet (H) devance le paquet (B), le mélange se fait par aspiration transversale du fluide venant combler l'écart relatif des deux masses fluides en interaction, comme l'illustre le schéma correspondant.

H4. Lors du mélange, les fluctuations de vitesse sont de même ordre de grandeur et fortement corrélés, de sorte que :

$$|v'_x| \sim |v'_y| \quad \text{et} \quad \overline{v'_x v'_y} = |v'_x| \cdot |v'_y|$$

Par substitution directe de l'expression de v'_x , on tire alors aisément que :

$$-\rho \overline{v'_x v'_y} = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2$$

Tenant compte du fait que le frottement turbulent doit changer de signe avec le gradient de vitesse, nous écrivons finalement la relation précédente sous la forme :

$$-\rho \overline{v'_x v'_y} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right| \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)$$

En désignant par l_m la longueur de référence appelée « longueur de mélange ». Par identification avec la relation

$$\bar{R} = -\rho \overline{v'_x v'_y} = \mu^t \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}$$

On en déduit l'expression de la viscosité cinématique de turbulence :

$$\mu^t \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right| \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)$$

$$\nu^t = \frac{\mu^t}{\rho} = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|$$

Pour compléter la fermeture, nous donnons ci-après quelques expressions empiriques de la longueur de mélange pour divers écoulements.

- Jet plan : $l_m = 0,089 \delta_{0,5}$
- Jet rond : $l_m = 0,075 \delta_{0,5}$

$\delta_{0,5}$ désigne l'épaisseur de vitesse moitié (la distance à l'axe où $\bar{v}(x, \delta) = 0,5 \bar{v}(x, 0)$)

- Ecoulement en conduite : $\frac{l_m}{R} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4$

R est le rayon de la conduite

y est la distance normale à la paroi

6-3) théorie de Karman - Betz (1930) :

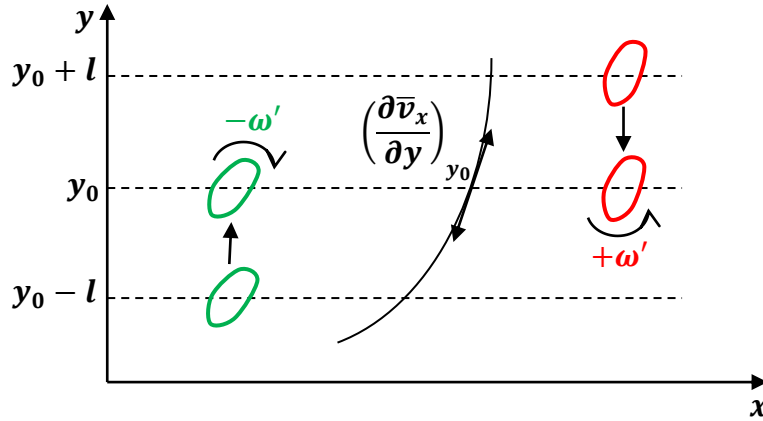
Afin d'obtenir la dépendance de la longueur de mélange avec la position du point dans le champ, Von Karman, en 1930, appliqua le principe de similitude en introduisant des facteurs d'échelles pour l'espace et le temps. Il abouti ainsi à l'expression :

$$l_m = k \left| \frac{\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2}} \right|$$

Où k est une constante de proportionnalité à déterminer par expérience.

Comme l'a montré ultérieurement Betz, ce même résultat peut s'obtenir indépendamment de toute considération de similitude en approfondissant simplement la phénoménologie de Prandtl.

Reprenant donc le schéma de la figure, on peut noter que les paquets de fluide, qui sont à l'origine du transfert de quantité de mouvement, véhiculent également des montants de rotationnel différents.



Pour cet écoulement cisailé, le gradient de vitesse moyenne correspond en effet au champ de rotationnel moyen :

$$\bar{\Omega}(y) = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}$$

Développant ce rotationnel moyen autour de y_0 on obtient :

$$\bar{\Omega}(y_0 \pm l) = \bar{\Omega}(y_0) \pm l \left(\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y} \right)_{y=y_0} + \dots$$

$$\bar{\Omega}(y_0 \pm l) = \bar{\Omega}(y_0) \pm l \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \right)_{y=y_0} + \dots$$

Les signes positif et négatif correspondant à des paquets de fluide en prévenance des régions $y > y_0$ et $y < y_0$ respectivement. On constate donc que le transfert de quantité de mouvement s'accompagne d'une fluctuation de rotationnel ω' égale au premier ordre à :

$$\omega' = \bar{\Omega}(y_0 \pm l) - \bar{\Omega}(y_0) = \pm l \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \right)_{y=y_0} + \mathcal{O}(l^2)$$

A laquelle correspond une vitesse circonférentielle fluctuante de valeur :

$$v'_z = (\alpha l) \cdot \omega' = \pm \alpha l^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \right)_{y=y_0} + \mathcal{O}(l^3)$$

Si l'on convient de désigner par (αl) le rayon de la masse fluide animée du rotationnel ω' , α étant une constante à fixer expérimentalement. En admettant alors que les fluctuations de vitesse v'_x , v'_y et v'_z sont de même ordre, on en déduit :

$$v'_x = v'_z$$

$$\pm l \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = \pm \alpha l^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \right)_{y=y_0}$$

Dont il est immédiat de tirer la relation :

$$l = \frac{1}{\alpha} \frac{\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \Big|_{y=y_0}}{\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \right)_{y=y_0}}$$

$$l = k \frac{\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2}}$$

Où k est une constante sans dimension.

L'expression de la contrainte de cisaillement turbulent s'écrit alors :

$$\bar{R} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right| \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)$$

Il en suit alors qu'en combinant les 2 dernières relations que la contrainte de cisaillement turbulent s'écrit sous la forme :

$$\bar{R} = \rho k^2 \frac{\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^4}{\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \right)^2}$$

7) modèle à une équation :

7-1) schéma de Prandtl-Kolmogorov :

Prandtl et Kolmogorov proposent une relation dans laquelle la viscosité turbulente est proportionnelle à la racine carrée de l'énergie cinétique turbulente.

$$\nu^t = C_\mu \sqrt{\bar{k}} \cdot l$$

Où C_μ est une constante pure et l une échelle de longueur qui reste donnée algébriquement.

$\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i}$ est l'énergie cinétique turbulente.

7-2) équation modèle d'énergie cinétique de turbulence :

a) équation de transport de l'énergie cinétique turbulente :

La décomposition en partie moyenne et fluctuante des grandeurs de l'écoulement via la moyenne de Reynolds peut être effectuée : la vitesse et la pression sont mises sous la forme $v_i = \bar{v}_i + v'_i$ et $p = \bar{p} + p'$. En utilisant cette décomposition sur les équations de Navier-Stokes instantanées, on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Et l'équation de Reynolds s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial(\rho \overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial(\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j}$$

Les équations de transport de l'énergie cinétique turbulente sont obtenues par soustraction des équations de transport des grandeurs moyennes (équation de Reynolds) aux équations de transport des grandeurs instantanées (équation de Navier-Stokes).

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial(\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - \bar{v}_i v'_j - v'_i v'_j + \overline{v'_i v'_j} \right]$$

En multipliant scalairement l'équation précédente (équations de transport des fluctuations) par v'_i en prenant la moyenne que l'on a définie précédemment, on obtient :

$$v'_i \cdot \left[\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - \bar{v}_i v'_j - v'_i v'_j + \overline{v'_i v'_j} \right) \right]$$

$$v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu v'_i \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j} - v'_i \frac{\partial(\bar{v}_i v'_j)}{\partial x_j} - v'_i \frac{\partial(v'_i v'_j)}{\partial x_j} + v'_i \frac{\partial(\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} v'_i v'_i \right)}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \left(\frac{1}{2} v'_i v'_i \right)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu v'_i \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j} - v'_i v'_j \frac{\partial (\bar{v}_i)}{\partial x_j} - v'_i v'_j \frac{\partial (v'_i)}{\partial x_j} + v'_i \frac{\partial (\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j}$$

Remarque :

$$1- v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \frac{\partial (v'_j p')}{\partial x_j}$$

$$2- \frac{\partial (v'_i v'_i)}{\partial x_j} = 2 v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \Rightarrow \frac{\partial^2 (v'_i v'_i)}{\partial x_j \partial x_j} = 2 \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + 2 v'_i \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\Rightarrow v'_i \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} v'_i v'_i \right)}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}$$

$$3- \frac{\partial (v'_i v'_i v'_j)}{\partial x_j} = 2 v'_i v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_i v'_i \underbrace{\frac{\partial v'_j}{\partial x_j}}_{=0} \Rightarrow v'_i v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial (v'_i v'_i v'_j)}{\partial x_j}$$

L'équation précédente peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{1}{2} v'_i v'_i \right)}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \left(\frac{1}{2} v'_i v'_i \right)}{\partial x_j} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (v'_j p')}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} v'_i v'_i \right)}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - v'_i v'_j \frac{\partial (\bar{v}_i)}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial (v'_i v'_i v'_j)}{\partial x_j} + v'_i \frac{\partial (\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Soit, après prise de moyenne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \right)}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \right)}{\partial x_j} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{v'_j p'})}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \right)}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \frac{\overline{\partial v'_i}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial v'_i}}{\partial x_j} - \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial (\bar{v}_i)}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{v'_i v'_i v'_j})}{\partial x_j} + \underbrace{\bar{v}'_i}_{=0} \frac{\partial (\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j} \end{aligned}$$

L'équation précédente peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{v'_j p'})}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \frac{\overline{\partial v'_i}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial v'_i}}{\partial x_j} - \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial (\bar{v}_i)}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{v'_i v'_i v'_j})}{\partial x_j} \\ \underbrace{\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}}_{[1]} &= -\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{v'_j p'}}{\rho} + \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i v'_j} \right)}_{[3]} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x_j \partial x_j}}_{[2]} - \underbrace{\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial (\bar{v}_i)}{\partial x_j}}_{[4]} - \underbrace{\nu \frac{\overline{\partial v'_i}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial v'_i}}{\partial x_j}}_{[5]} \end{aligned}$$

Rappelons que cette équation établit que la variation totale dans le mouvement moyen de \bar{k} [1] est équilibrée par :

[2] la diffusion par agitation moléculaire.

[3] la diffusion de l'énergie cinétique turbulente par effet des fluctuations de vitesse et de pression (la diffusion turbulente)

[4] l'interaction avec l'écoulement moyen. Cette énergie cédée par l'écoulement moyen, est appelée terme de production.

[5] le taux de dissipation moyen, noté par la suite $\bar{\epsilon}$, et toujours positif (la pseudo-dissipation).

Conformément à l'hypothèse de grand nombre de Reynolds de turbulence, le terme [2] sera négligé, de sorte que la schématisation va intéresser les trois termes de :

- Production
- Diffusion turbulente
- Pseudo-dissipation

b) schéma de production :

Selon le modèle de Boussinesq, le terme de production [4] se réduit, en situation isovolume, à :

$$-\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial(\bar{v}_i)}{\partial x_j} = \nu^t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}$$

Ainsi, avec l'expression de la viscosité de turbulence ν^t , la modélisation de ce terme s'écrit finalement :

$$-\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial(\bar{v}_i)}{\partial x_j} = C_\mu \sqrt{\bar{k}} \cdot l \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}$$

c) schéma de diffusion turbulente :

Le terme de diffusion [3] doit être modélisé, c'est généralement le cas à l'aide d'un terme de diffusion par gradient :

$$-\left(\frac{\overline{v'_j p'}}{\rho} + \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i v'_j} \right) \approx \frac{\nu^t}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}$$

Où ν^t est la viscosité turbulente et σ_k est le nombre de Prandtl turbulent (proche de l'unité)

d) schéma de dissipation :

Le schéma pour le terme [5] résulte directement des considérations sur les mécanismes de transfert énergétique :

$$\nu \frac{\partial \overline{v'_i v'_i}}{\partial x_j} = \bar{\epsilon} = C_d \frac{(\bar{k})^{3/2}}{l}$$

Où C_d est une autre constante du modèle et l une échelle de longueur représentative de la plage des tourbillons porteurs d'énergie.

e) calage des constantes :

Pour rendre le modèle opérationnel, il faut prescrire l'échelle de longueur ainsi que les valeurs des paramètres C_μ , C_d et σ_k . On adopte pour l'échelle « l » les mêmes expressions que celles de la longueur de mélange. Pour ce qui est des coefficients, une représentativité convenable du modèle est généralement assurée en prenant $C_\mu = \sigma_k = 1$ et C_d compris entre 0,07 et 0,09.

7-4) récapitulation du modèle à une équation (k) :

En regroupant l'ensemble des expressions précédentes, on aboutit à la forme suivante du modèle à une équation.

$$\nu^t = C_\mu \sqrt{\bar{k}} \cdot l$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = C_\mu \sqrt{\bar{k}} \cdot l \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{C_\mu \sqrt{\bar{k}} \cdot l}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) - C_d \frac{(\bar{k})^{3/2}}{l}$$

l : loi empirique de longueur de mélange.

$$C_\mu = \sigma_k = 1 \text{ et } C_d = 0,07 \text{ à } 0,09.$$

En définitive, avec ce type de fermeture, on dispose de cinq équations pour cinq fonctions scalaires \bar{v}_i , \bar{p} , \bar{k} . Ce modèle introduit trois constantes C_μ , σ_k , C_d ainsi qu'une échelle de longueur l qui doit être prescrite algébriquement.

8) modèle à deux équations : modèle (k , ϵ)

8-1) le schéma de viscosité :

Le choix du taux de dissipation comme seconde fonction du modèle permet d'exprimer l'échelle de longueur l par :

$$\bar{\epsilon} = \nu \frac{\partial \bar{v}'_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}'_i}{\partial x_j} = C_d \frac{(\bar{k})^{3/2}}{l} \Rightarrow l = C_d \frac{(\bar{k})^{3/2}}{\bar{\epsilon}}$$

Où C_d est une constante pure. Avec cette relation, l'expression de la viscosité de turbulence devient :

$$\nu^t = C_\mu \sqrt{\bar{k}} \cdot C_d \frac{(\bar{k})^{3/2}}{\bar{\epsilon}} = C_\mu C_d \cdot \frac{(\bar{k})^2}{\bar{\epsilon}} = C'_\mu \cdot \frac{(\bar{k})^2}{\bar{\epsilon}}$$

En posant $C'_\mu = C_\mu C_d$.

8-2) équation modèle d'énergie :

L'équation modélisée de l'énergie cinétique de turbulence s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = C_\mu \sqrt{\bar{k}} \cdot l \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{C_\mu \sqrt{\bar{k}} \cdot l}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) - C_d \frac{(\bar{k})^{3/2}}{l}$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = C_\mu \sqrt{\bar{k}} \cdot C_d \frac{(\bar{k})^{3/2}}{\bar{\epsilon}} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{C_\mu \sqrt{\bar{k}} \cdot C_d \frac{(\bar{k})^{3/2}}{\bar{\epsilon}}}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) - \bar{\epsilon}$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = C_\mu C_d \cdot \frac{(\bar{k})^2}{\bar{\epsilon}} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{C_\mu C_d}{\sigma_k} \cdot \frac{(\bar{k})^2}{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) - \bar{\epsilon}$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = C'_\mu \cdot \frac{(\bar{k})^2}{\bar{\epsilon}} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{C'_\mu}{\sigma_k} \cdot \frac{(\bar{k})^2}{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) - \bar{\epsilon}$$

8-3) équation modèle de la dissipation :

L'équation de transport des fluctuations s'écrit :

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j} - v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j}$$

En dérivant par rapport à x_j l'équation pour la fluctuation de vitesse v'_i et en désignant maintenant par k l'indice muet, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k \partial x_k} - v'_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial (\overline{v'_i v'_k})}{\partial x_k} \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) + \bar{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - v'_k \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \\ - v'_k \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 (\overline{v'_i v'_k})}{\partial x_j \partial x_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) + \bar{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - v'_k \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \\
&\quad - v'_k \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 (v'_i v'_k)}{\partial x_j \partial x_k}
\end{aligned}$$

Multipliant l'équation par $\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}$:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) + \bar{v}_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \\
&= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) - \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \\
&\quad - v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_k} - \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} - v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} - \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \\
&\quad + \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 (v'_i v'_k)}{\partial x_j \partial x_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{2} \bar{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 \\
&= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \\
&\quad - v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} - v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 (v'_i v'_k)}{\partial x_j \partial x_k}
\end{aligned}$$

Remarque :

$$\begin{aligned}
1- \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 &= 2 \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 = 2 \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + 2 \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \\
&\Rightarrow \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2
\end{aligned}$$

$$2- \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial p'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial p'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_j} \right)$$

$\underbrace{\quad}_{=0}$

L'équation précédente peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left[\nu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] + \frac{1}{2\nu} \bar{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left[\nu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] - \nu \left(\frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 - \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \\
&- \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} - \frac{v'_k}{2\nu} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] \\
&+ \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 (v'_i v'_k)}{\partial x_j \partial x_k}
\end{aligned}$$

Soit, après prise de moyenne :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\nu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2} \right] + \bar{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{\nu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2} \right] \\
&= -\frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left[\overline{\nu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2} \right] - 2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \\
&- 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j}} - 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k}} - 2\nu v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_k} \\
&- 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k}} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2} \right] + 2\nu \underbrace{\left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 (v'_i v'_k)}{\partial x_j \partial x_k}}_{=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} &= -\frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \right) + \nu \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} - 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j}} \\
&- 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k}} - 2\nu v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_k} - 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k}} \\
&- \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} &= -2\nu \left[\overline{v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k}} \right] - 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k}} \\
&- \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2} \right] - \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \right) + \nu \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2}
\end{aligned}$$

Considérant plus particulièrement cette dernière à grand nombre de Reynolds de turbulence, le résultat se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\epsilon}/2}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}/2}{\partial x_k} &= \underbrace{-\nu \left[\overline{v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_k}} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \right]}_{[a]} \\ &\quad - \underbrace{\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k}}_{[b]} - \underbrace{\frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right)}_{[c]} - \underbrace{\frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2} \right]}_{[c]} - \underbrace{\nu^2 \left(\frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2}_{[d]} \end{aligned}$$

Ayant négligé la diffusion par agitation moléculaire $\left(\nu \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial x_k \partial x_k} \right)$ il ne subsiste plus dans cette équation, outre les termes de couplage avec le mouvement moyen (**a**), que ceux :

- D'interaction de la turbulence sur elle-même (**b**)
- De diffusion par agitation turbulente (**c**)
- De destruction par effet visqueux (**d**)

Nous nous en tiendrons ici à une simple description de la schématisation standard, retenant au second membre de l'équation modélisée trois termes, l'un de source, l'autre de puits et le dernier de diffusion, ce que nous formaliserons par :

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = \mathbf{source}(\bar{\epsilon}) - \mathbf{puits}(\bar{\epsilon}) + \mathbf{diff.}(\bar{\epsilon})$$

a) Terme source de l'équation de dissipation :

Le schéma de ce terme est une réplique directe de celui de la production dans l'équation de **k**. Pour de simple raisons d'homogénéité dimensionnelle, il se met sous la forme :

$$\mathbf{source}(\bar{\epsilon}) = -C_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{k} \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}$$

Où $C_{\epsilon 1}$ est une constante de fermeture.

b) Terme puits de l'équation de dissipation :

Ce terme joue le rôle de dissipation dans l'équation de la dissipation. Il est pris proportionnel à cette dernière et se schématise donc par :

$$\mathbf{puits}(\bar{\epsilon}) = -C_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{k}$$

Où $C_{\epsilon 2}$ est une nouvelle constante de fermeture.

c) Schéma du terme de diffusion :

Comme pour le terme équivalent de l'équation de k , le schéma adopté est de type gradient, et revient à poser :

$$\overline{v v'_k \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2} = \frac{v^t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j}$$

Introduisant le nombre de Prandtl/Schmidt de dissipation σ_ϵ .

Après substitution des trois (3) relations dans l'équation précédente, la forme modèle de l'équation de transport du taux de dissipation s'écrit finalement :

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} = -C_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v^t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} \right) - C_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}}$$

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} = -C_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{C'_\mu}{\sigma_\epsilon} \cdot \frac{(\bar{k})^2}{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} \right) - C_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}}$$

8-4) récapitulation du modèle à deux équations (k, ϵ) :

En regroupant l'ensemble des expressions précédentes, on aboutit à la forme suivante du modèle à deux équations (k, ϵ) .

$$v^t = C'_\mu \cdot \frac{(\bar{k})^2}{\bar{\epsilon}}$$

$$\overline{v'_i v'_j} = -v^t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = C'_\mu \cdot \frac{(\bar{k})^2}{\bar{\epsilon}} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{C'_\mu}{\sigma_k} \cdot \frac{(\bar{k})^2}{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) - \bar{\epsilon}$$

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} C'_\mu \cdot \bar{k} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{C'_\mu}{\sigma_\epsilon} \cdot \frac{(\bar{k})^2}{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} \right) - C_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}}$$

Avec : $C'_\mu = 0,09$, $C_{\epsilon 1} = 1,44$, $C_{\epsilon 2} = 1,92$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\epsilon = 1,3$.

Chapitre IV : Couches limites

Dans les écoulements à grande vitesse autour d'obstacle ou près d'une paroi, le nombre de Reynolds de l'écoulement est le plus souvent très grand, ce qui fait que l'écoulement peut être considéré à l'échelle macroscopique comme étant dans un régime turbulent et les effets de la viscosité sont négligeables.

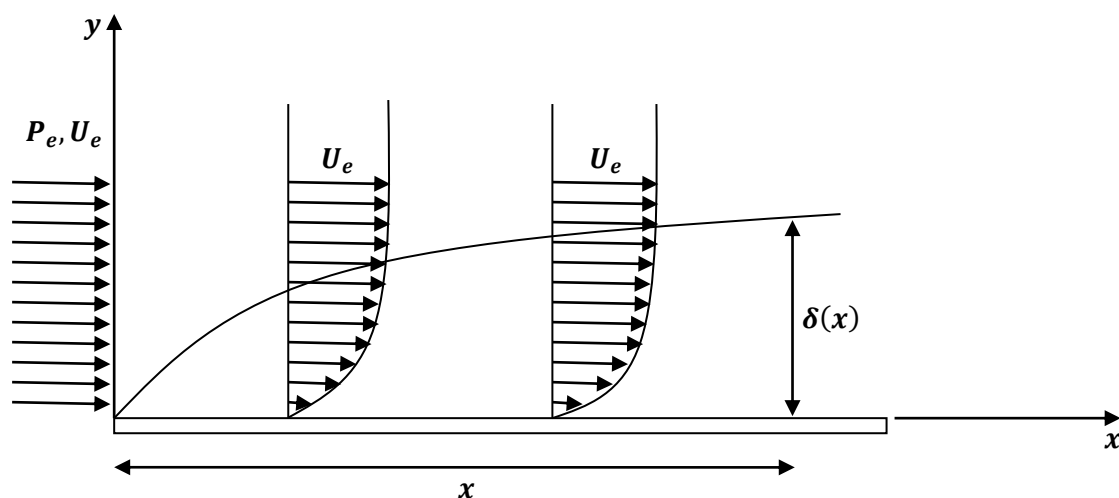
Toutefois, près d'une paroi solide, la condition d'adhérence implique que la vitesse doit tendre rapidement vers **0**. Si on définit un nombre de Reynolds local à l'aide de la vitesse réelle (et non pas d'une échelle de vitesse), celui-ci tend également vers **0**, ce qui veut dire que très localement, dans le voisinage de la paroi, l'écoulement est dans un régime laminaire et les effets de viscosité deviennent prédominants. Cette zone de faible épaisseur accolée à la paroi s'appelle une couche limite. Cette notion a été proposée par Prandtl en **1905** :

- Près d'une paroi solide, il existe une couche de très faible épaisseur dans laquelle les forces de viscosité sont prédominantes ;
- Loin de la paroi, l'écoulement peut être considéré comme turbulent ou non visqueux ;

Cette décomposition permet de traiter un grand nombre de problème en découplant les effets à grande échelle (liés à la turbulence) et ceux intervenant à petite échelle près d'une paroi (et faisant jouer un rôle crucial à la viscosité du fluide).

1) couche limite laminaire :

On abordera dans un premier temps le cas de la couche limite dans la géométrie la plus simple, celle d'une plaque plane semi-infinie, représentée sur la figure.



On peut distinguer le cas d'une couche limite laminaire ou turbulente, selon la valeur du nombre de Reynolds défini ainsi

$$Re_x = \frac{U_e x}{\nu}$$

Où U_e est la vitesse loin de la plaque et x est la distance parcourue le long de la plaque plane ($x = 0$ est parfois appelé le bord d'attaque de la plaque).

Pour un nombre de Reynolds jusqu'à $Re_x \approx 10^5$ environ, la couche limite reste généralement laminaire.

1-1) ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite :

L'épaisseur δ de la couche limite peut être estimée à l'aide de l'analyse dimensionnelle. Considérons une plaque plane placée dans un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ soumis à un champ de vitesse uniforme U_e loin de la paroi. Près de la paroi se développe une couche limite d'épaisseur $\delta(x)$, qui varie avec la distance x depuis le bord d'attaque de la plaque ; x et δ sont les deux échelles de longueur du problème et on va supposer que $\varepsilon = \frac{\delta}{x} \ll 1$ (la couche est très peu épaisse). L'échelle de vitesse est U et l'échelle de temps est $\frac{x}{U}$.

Dans l'équation de Navier-Stokes, le terme d'inertie est d'ordre :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} \sim \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho \frac{U^2}{x}$$

Les termes de viscosité ont les ordres de grandeurs suivants :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \mu \frac{U}{x^2} \sim \mu \frac{U}{\delta^2} \varepsilon^2$$

Et

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \mu \frac{U}{\delta^2}$$

Comme $\varepsilon \ll 1$, on en déduit que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$: les variations normales à la paroi sont prépondérantes par rapport aux variables longitudinales. L'équilibre dynamique implique que les forces de viscosité contrebalancent localement l'inertie du fluide :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho \frac{U^2}{x} = \mu \frac{U}{\delta^2}$$

$$\delta^2 = \frac{\mu x}{\rho U} = x^2 \frac{\mu}{\rho U x}$$

$$\delta = x \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}}$$

Donc si on définit un nombre de Reynolds local sous la forme :

$$Re_x = \frac{\rho U x}{\mu}$$

Alors on a :

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{1}{Re_x}}$$

L'épaisseur de la couche limite varie comme l'inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds local. En réarrangeant les termes, on a aussi :

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U} x}$$

Donc $\delta \propto x$: la forme de la couche limite est parabolique.

1-2) équations de la couche limite : théorie de Prandtl

Nous reprenons le problème de la couche limite le long d'une plaque horizontale semi-infinie. L'écoulement est permanent et bidimensionnel au voisinage de la plaque : $\vec{v} = (u, v)$. Le fluide est incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité μ . Loin de la paroi le champ de vitesse est uniforme, mais peut éventuellement dépendre de x : $u = U_e(x)$. Les équations du mouvement sont données par les équations de Navier-Stokes, qui compte tenu de nos hypothèses prennent ici la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$u(x, y = 0) = 0$$

$$v(x, y = 0) = 0$$

Et

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = U_e(x)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} v(x, y) = 0$$

Une analyse adimensionnelle permet de trouver l'importance relative de chaque terme. Pour ce faire, il est nécessaire de définir des grandeurs caractéristiques.

Nous introduisons les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} ; \quad \tilde{y} = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{\varepsilon L} ; \quad \tilde{u} = \frac{u}{U} ; \quad \tilde{v} = \frac{v}{V}$$

Les grandeurs adimensionnelles figurant dans les expressions précédentes sont toutes de même ordre (~ 1). Pour la pression rapportée à ρU^2 on supposera qu'il en est de même, soit, pour la valeur adimensionnelle ainsi normée :

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2} \sim \mathcal{O}(1)$$

Il est également licite de définir un temps de référence pendant lequel une particule parcourt une distance équivalente dans les différentes directions :

$$t_0 = \frac{L}{U} = \frac{\delta}{V} \Rightarrow V = U \frac{\delta}{L}$$

Ce temps de référence permet ainsi de relier V aux autres grandeurs.

Après introduction dans l'équation de continuité, il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{U}{\delta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

La mise sous la forme adimensionnelle ne change pas l'équation de continuité.

Par contre, pour la conservation de quantité de mouvement selon x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{U^2}{L} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{U V}{\delta} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho U^2}{L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \nu \left(\frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{U}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

$$\frac{U^2}{L} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{U U \delta}{\delta} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho U^2}{L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \nu \left(\frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{U}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

$$\frac{U^2}{L} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{U^2}{L} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{U^2}{L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \nu \left(\frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{U}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\nu L}{U^2} \left(\frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{U}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\nu}{UL} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\nu}{UL} \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \left(\left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

Etant donné l'hypothèse $\frac{\delta}{L} \ll 1$, il vient que $\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \sim 0$ et $\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \rightarrow \infty$. Cette dernière tendance est heureusement compensée par le fait que $\frac{\nu}{UL} = \frac{1}{Re_L} \sim 0$.

Donc :

$$\frac{1}{Re_L} \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \approx \mathcal{O}(1)$$

$$\delta \approx \frac{L}{\sqrt{Re_L}} \Rightarrow \frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$

Dés lors, il vient finalement :

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\nu}{UL} \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$$

Et la conservation de la quantité de mouvement selon y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{UV}{L} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{V^2}{\delta} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho U^2}{\delta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \nu \left(\frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{V}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

$$\frac{U}{L} \left(\frac{U \delta}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\left(\frac{U \delta}{L} \right)^2}{\delta} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho U^2}{\delta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \nu \left(\frac{U \delta}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{U \delta}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

$$\frac{U^2}{\delta} \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{U^2}{\delta} \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{U^2}{\delta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\nu}{UL} \frac{U^2 \delta}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

$$\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\nu}{UL} \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

Ce qui se simplifie finalement en :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

Les équations de Prandtl pour la couche limite laminaire s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

On voit que ces équations sont assez similaires à celles des écoulements unidirectionnels, sauf que la conservation de la masse reste inchangée car v n'est pas nulle en toute rigueur, et bien que $v \ll u$, ses variations selon y sont du même ordre de grandeur que celles de u suivant x . La même remarque peut être faite concernant la non-disparition du terme inertiel dans la deuxième équation.

Le point fondamental est la troisième équation : la pression ne varie pas dans la direction perpendiculaire à l'écoulement, et p ne dépend donc que de x .

Ce système ne possède cependant pas de solution analytique, y compris en l'absence de gradient de pression selon x . Dans ce dernier cas, les deux premières équations sont suffisantes pour obtenir un système fermé étant donné qu'il ne reste alors que deux inconnues u et v .

1-3) couplage fluide parfait - couche limite :

En récapitulant l'ensemble des éléments que nous venons voir, l'étude d'un écoulement à grand nombre de Reynolds sur un obstacle s'articule, au sens de la théorie de couche limite, autour des quatre points suivants :

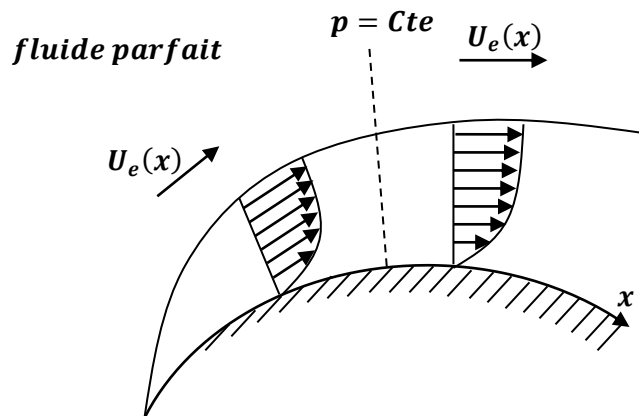
- A grand nombre de Reynolds global les effets de viscosité sont localisés dans l'écoulement sans décollement autour d'un obstacle, à l'intérieur d'une zone de faible épaisseur relative dénommée région de couche limite.
- A l'extérieur de la couche limite, la viscosité du fluide joue un rôle négligeable et l'écoulement est solution du modèle d'Euler (fluide parfait).
- La région de couche limite se caractérise par une géométrie, une cinématique particulière se traduisant par :

$$\frac{y}{x} \sim \frac{\nu}{u} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

- Au sein de la couche limite, l'écoulement est solution du modèle de Prandtl.

Concrètement, le calcul de l'écoulement se décompose en deux étapes traitant respectivement de la solution « externe » (fluide parfait hors couche limite) et de la solution « interne » (fluide visqueux sous les approximations de couche limite). Le raisonnement est donc le suivant :

- En tout point de la couche limite, la pression est égale à la pression en un point de même abscisse, mais placé à l'extérieur de la couche limite (figure)



- Or, à l'extérieur de la couche limite, le fluide peut être considéré parfait puisque les gradients de vitesse y sont très faibles. La vitesse dans cette zone ne dépend pas de y , notons la $U_e(x)$.
- On peut donc utiliser la formule de Bernoulli le long des lignes de courant à l'extérieur de la couche limite :

$$p(x) + \frac{1}{2} \rho U_e^2(x) = Cte$$

Donc

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial x}$$

- En remplaçant cette expression de $\frac{\partial p}{\partial x}$ dans les équations de Prandtl, on obtient :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

En présence d'une couche limite laminaire, les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations de Prandtl :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Où $U_e(\mathbf{x})$ est le champ des vitesses à l'extérieur de la couche limite, calculable par le modèle du fluide parfait. En injectant le résultat dans les équations de Prandtl, on peut les intégrer pour trouver le champ de vitesses (\mathbf{u}, \mathbf{v}) dans la couche limite.

1-4) décollement :

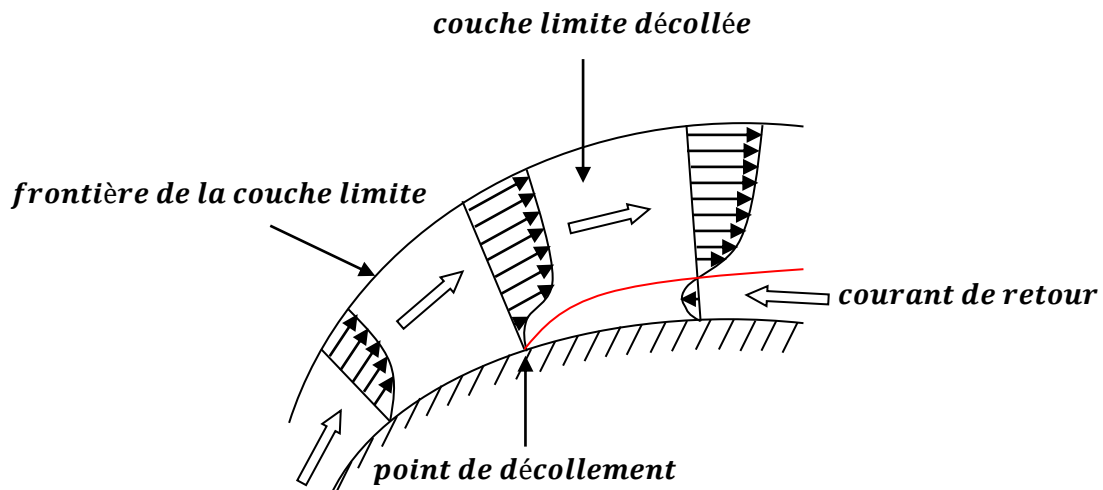
Nous allons voir maintenant qu'une des hypothèses fondamentales du concept de couche limite – existence d'une direction privilégiée – peut être mise en défaut sous certaines conditions du champ de pression imposé en fluide parfait.

Considérons en premier lieu ce qui se passe, en fluide parfait, dans la région proche du bord d'attaque (figure). Le mouvement y est accéléré ($\frac{\partial U_e}{\partial x} > 0$) et le gradient longitudinal de pression sur l'obstacle ($\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial x}$) y est donc négatif, en vertu du théorème de Bernoulli. Un tel gradient est qualifié de favorable car s'exerçant en appui des forces d'inertie. Concrètement, en décrivant sa trajectoire, une particule fluide rencontre, dans cette situation, une pression aval inférieure à sa valeur amont. Elle ne subit donc qu'une seule résistance à l'avancement due aux forces de viscosité.

$$\frac{\partial p}{\partial x} < 0 \quad \Leftrightarrow \text{gradient de pression favorable}$$

Selon l'incidence et/ou la courbe du profil, un sens opposé du gradient de pression en fluide parfait peut s'observer plus loin en aval. Dans ce cas, le ralentissement du fluide par la viscosité peut se conjuguer à une pression croissante ($\frac{\partial p}{\partial x} > 0$) vers le bord de fuite. La force d'inertie doit alors équilibrer deux forces de résistance au mouvement, puisque pression et viscosité agissent dans le même sens, c'est pourquoi un gradient de pression positif est qualifié de défavorable au mouvement du fluide dans la couche limite.

Si l'intensité du gradient défavorable de pression suffisant, il peut y avoir inversion du sens de l'advection, comme l'indique la figure suivante. Un courant de retour naît alors à proximité de la paroi au-delà du point de décollement où la couche limite se sépare de l'obstacle. La présence d'un décollement entraîne l'instauration d'une zone à recirculation qui rend caduque l'existence d'une direction privilégiée du mouvement.



Le point de décollement : $x = x_D$, tel que $\left[\frac{\partial u(x_D, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0$

Ainsi, la théorie de couche limite ne s'applique qu'à des écoulements non décollés.

1-5) équation de Blasius :

Considérons le cas effectivement U_e est constant (indépendant de x), les équations de la couche limite sous forme dimensionnelle sont donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

Avec pour conditions aux limites :

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0$$

Et

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = U_e$$

Cette équation peut se résoudre à l'aide de la fonction de courant Ψ définie telle que $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ et $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$.

L'équation de la continuité est automatiquement satisfaite tandis que l'équation de quantité de mouvement donne :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)$$

Alors que les conditions aux limites imposent :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y = 0) = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y = 0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = U_e$$

C'est une équation différentielle du troisième ordre, qui peut être simplifiée en cherchant des solutions auto-similaires de la forme :

$$\Psi = \sqrt{U_e x \nu} f(\eta)$$

Avec :

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_e}{x \nu}}$$

Quand on substitue cette forme dans l'équation précédente, on obtient l'équation de Blasius.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \sqrt{U_e x \nu} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_e \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{U_e x \nu}) f(\eta) + \sqrt{U_e x \nu} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{U_e \nu}{2\sqrt{U_e x \nu}} f(\eta) + \sqrt{U_e x \nu} \frac{-\frac{U_e}{x^2 \nu}}{2\sqrt{\frac{U_e}{x \nu}}} \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_e \nu}{x}} f(\eta) - \frac{1}{2} U_e \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(U_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = U_e \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{U_e}{2} \sqrt{\frac{U_e}{\nu}} \frac{y}{x^{3/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(U_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = U_e \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_e \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \sqrt{\frac{U_e}{\nu}} = U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu}} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \sqrt{\frac{U_e}{\nu}} = \frac{U_e^2}{\nu} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

On a :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)$$

$$\left(U_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(-\frac{U_e}{2} \sqrt{\frac{U_e}{\nu}} \frac{y}{x^{3/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_e \nu}{x}} f(\eta) - \frac{1}{2} U_e \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = \nu \frac{U_e^2}{\nu} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

$$-\frac{U_e^2}{2} \sqrt{\frac{U_e}{\nu}} \frac{y}{x^{3/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{U_e^2}{2} \frac{1}{x} f(\eta) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{U_e^2}{2} \sqrt{\frac{U_e}{\nu}} \frac{y}{x^{3/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{U_e^2}{\nu} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

$$-\frac{U_e^2}{2} \frac{1}{x} f(\eta) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{U_e^2}{\nu} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

$$-\frac{1}{2} f(\eta) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

$$-f(\eta) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 2 \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

$$2 \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + f(\eta) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0$$

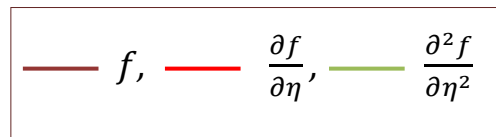
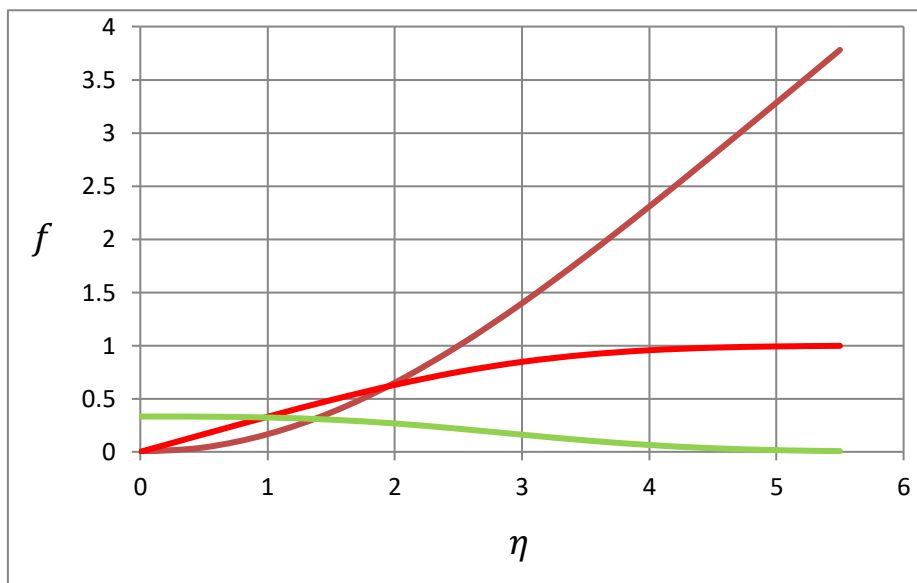
Avec pour conditions aux limites :

$$f(0) = f'(0) = 0$$

$$f'(\infty) = 1$$

Cette équation peut être résolue numériquement de façon très précise. Nous donnons à la figure suivante une représentation graphique de la solution telle qu'elle a été obtenue par Howarth en 1938.

η	f	f'	f''
0	0	0	0.3320571
0.5	0.0414928	0.1658851	0.3309107
1	0.1655716	0.3297798	0.3230069
1.5	0.3701382	0.4867890	0.3025803
2	0.6500239	0.6297654	0.2667514
2.5	0.9963104	0.7512593	0.2174115
3	1.3968070	0.8460440	0.1613603
3.5	1.8376970	0.9130400	0.1077726
4	2.3057450	0.9555179	0.0642341
4.5	2.7901320	0.9795140	0.0339809
5	3.2832720	0.9915417	0.0159068
5.5	3.7805700	0.9968786	0.0065786

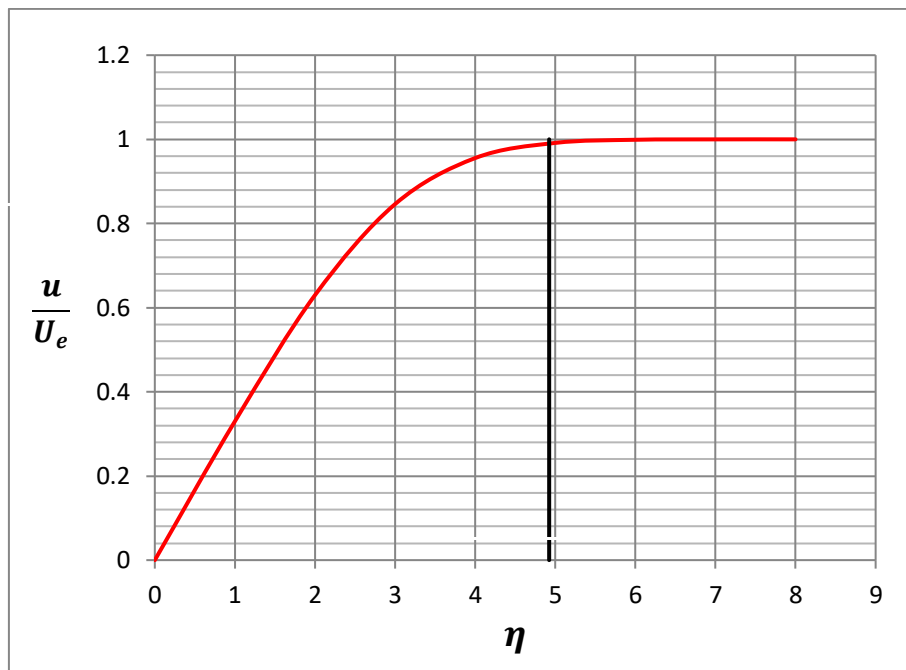


Une fois f déterminé numériquement, on déduit le profil de vitesse

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_e \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_e \nu}{x}} f(\eta) + \frac{1}{2} U_e \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{2} U_e \sqrt{\frac{\nu}{U_e x}} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - f(\eta) \right)$$

η	$\frac{u}{U_e} = \frac{\partial f}{\partial \eta}$	$\frac{v}{U_e} \sqrt{Re_x} = \frac{1}{2} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \right)$
0	0	0
1	0,32979	0,08211
2	0,62977	0,30475
3	0,84605	0,57066
4	0,95552	0,75816
5	0,99155	0,83723
6	0,99898	0,85712
7	0,99992	0,86009
8	1,00000	0,86038



L'épaisseur de la couche limite a dans ce cas été choisie comme l'ordonnée où la vitesse correspond à **99%** de la vitesse externe :

$$\eta(y = \delta) = 4,92$$

$$\delta \sqrt{\frac{U_e}{x \nu}} = 4,92$$

$$\frac{\delta}{x} \sqrt{\frac{U_e x}{\nu}} = 4,92$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,92}{\sqrt{\frac{U_e x}{\nu}}} = \frac{4,92}{\sqrt{Re_x}}$$

Quantitativement, la solution de Blasius fournit les résultats suivants :

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{4,92}{\sqrt{Re_x}}$$

Où $Re_x = \frac{U_e x}{\nu}$ désigne le nombre de Reynolds local rapporté à l'abscisse du point courant de la plaque. Le frottement pariétal local est donné par :

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right|_{y=0}$$

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(U_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right|_{\eta=0}$$

$$\tau_w = \mu U_e \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_{\eta=0}$$

$$\tau_w = \mu U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right|_{\eta=0}$$

$$\tau_w = \mu \frac{U_e}{x} \sqrt{\frac{U_e x}{\nu}} \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right|_{\eta=0}$$

$$\tau_w = \mu \frac{U_e}{x} \sqrt{Re_x} \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right|_{\eta=0}$$

$$\tau_w \approx \mu \frac{U_e}{x} \sqrt{Re_x} 0,332$$

$$\tau_w \approx 0,332 \frac{\mu U_e}{x} \sqrt{Re_x}$$

$$\tau_w \approx \frac{0,332 \rho U_e^2}{\sqrt{Re_x}}$$

Le coefficient de frottement pariétal est donc :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} = \frac{0,332 \frac{\mu U_e}{x} \sqrt{Re_x}}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} = 0,664 \frac{\sqrt{Re_x}}{\frac{x \rho U_e}{\mu}} = 0,664 \frac{\sqrt{Re_x}}{Re_x} = 0,664 \sqrt{\frac{1}{Re_x}}$$

2) la couche limite turbulente :

2-1) approximation de la couche limite turbulente :

Nous appliquons cette approximation aux écoulements pour lesquels :

- L'écoulement moyen dominant est suivant la direction x (direction longitudinale).
- La vitesse transversale est relativement faible $\bar{v} \ll \bar{u}$.
- L'écoulement s'étale lentement suivant la direction principale x (on dit aussi faiblement non parallèle).

Ces propriétés sont partagées par un bon nombre d'écoulements libres tels que le jet, le sillage et la couche de mélange et bien sur par tous les écoulements de parois, tels que la plaque, le canal ou la conduite. Ces écoulements sont statistiquement bidimensionnels et stationnaires, les gradients de vitesses moyennes sont prédominants dans la direction y et la statistique ne varie pas suivant z . Pour la vitesse moyenne, les composantes sont \bar{u} , \bar{v} et $\bar{w} = 0$.

Les équations de Reynolds s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}$$

Nous normalisons les variables de la manière suivante : la vitesse moyenne \bar{u} est normalisée par U , la vitesse \bar{v} par V , la pression moyenne par ρU^2 . La variable x est normalisée par L , la variable y par d . Les grandeurs turbulentes (transversale et longitudinale) sont normalisées par la même vitesse $u^* = \frac{U \delta}{L}$, et nous faisons l'hypothèse que $\frac{u^*}{U} \ll 1$.

En variables sans dimensions, les équations Reynolds s'écrivent :

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{V}{d} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U^2}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{UV}{d} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{U^2}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\mu U}{\rho L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\mu U}{\rho d^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{u^{*2}}{L} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{u^{*2}}{d} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

$$\frac{UV}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{V^2}{d} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{U^2}{d} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \frac{\mu V}{\rho L^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\mu V}{\rho d^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \frac{u^{*2}}{L} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{u^{*2}}{d} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}$$

L'équation de continuité montre tout d'abord que :

$$\frac{U}{L} = \frac{V}{d}$$

Ce qui permet de réécrire les deux autres équations sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{L^2}{d^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \frac{u^{*2}}{U^2} \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{L}{d} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{L^2}{d^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{L^2}{d^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - \frac{u^{*2}}{U^2} \frac{L}{d} \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{L}{d} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Examinons dans quelles conditions les deux équations ont été établies : tout d'abord, un écoulement n'est turbulent que pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds : ainsi, nous supposerons dans ce qui suit que $Re \gg 1$.

Dans la couche intérieure, nous faisons l'hypothèse

$$\frac{d}{L} \ll 1$$

Qui exprime que la couche de cisaillement est une couche mince.

Les deux équations peuvent être approchées par leurs termes dominants :

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \frac{L^2}{d^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{u^{*2}}{U^2} \frac{L}{d} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \frac{u^{*2}}{U^2} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \end{aligned}$$

Compte tenu des hypothèses $\frac{1}{Re} \ll 1$ et $\frac{u^*}{U} \ll 1$, la dernière équation se réduit obligatoirement à :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$$

Cette équation peut être intégrée par rapport à y :

$$\bar{p} = p_0(x)$$

Cette équation fournit la conclusion classique des couches limites : la pression dans la couche de cisaillement ne dépend que de la variable longitudinale.

Par contre, l'autre équation fait apparaître trois petits paramètres : $\frac{1}{Re}$, $\frac{d}{L}$ et $\frac{u^*}{U}$.

Nous pouvons nous intéresser au cas où, le long d'une paroi, le comportement de l'écoulement est celui d'une couche limite : on a ainsi l'égalité $\frac{d^2}{L^2} = \frac{1}{Re}$. Le terme suivant peut alors, ou non, être négligeable dans l'équation. S'il est négligeable (cas où $\frac{u^{*2}}{U^2} \ll \frac{1}{\sqrt{Re}}$) la couche limite est une couche limite laminaire. Si $\frac{u^{*2}}{U^2}$ est d'ordre de grandeur $\frac{1}{\sqrt{Re}}$, on est en présence d'une couche limite turbulente, et l'équation à écrire est alors :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

2-2) couche logarithmique et sous-couche visqueuse :

Si nous restituons dans la dernière équation les variables dimensionnées, L'équation de Reynolds s'écrit :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{tot}}{\partial y}$$

Où nous avons regroupé les contraintes turbulentes et visqueuses dans un seul terme de contrainte totale τ_{tot} .

$$\tau_{tot} = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho (\overline{u'v'})$$

La force exercée par le fluide sur la paroi ($\mathbf{y} = \mathbf{0}$) est une force de friction tangentielle (les contraintes normales à la paroi sont négligeables à cause de l'hypothèse de couche limite). La contrainte moyenne correspondante est appelée contrainte de paroi. A $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, les termes convectifs sont nuls à cause de la condition d'adhérence à la paroi. Il en résulte que l'expression de la contrainte de paroi est simplement donnée par la relation contrainte déformation du fluide visqueux Newtonien, et qui s'adapte dans le cadre de l'approximation de couche limite à :

$$\tau_w = 2 \rho \nu \bar{\epsilon}_{xy} = \rho \nu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \approx \rho \nu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Dans l'expression précédente, la prise de valeur moyenne est nécessaire car même si les vitesses sont nulles en paroi, l'écoulement n'est pas stationnaire pour autant et les gradients, même pris à la paroi, fluctuent. On trouve bien que $\tau_{tot}|_{y=0} = \tau_w$. Le profil de vitesse se raccorde linéairement sur la paroi.

Pour déterminer le profil de vitesse il est nécessaire d'utiliser les résultats expérimentaux, à savoir que le terme du tenseur de Reynolds est d'ordre $\mathcal{O}(\rho U^2)$. L'équation de quantité de mouvement peut alors s'écrire avec une approximation de couche limite :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{tot}}{\partial y}$$

Dont l'intégration de 0 à y mène à :

$$\frac{\partial \tau_{tot}}{\partial y} = \frac{\partial p_0}{\partial x}$$

$$\tau_{tot} = \frac{\partial p_0}{\partial x} y + C$$

On a

$$\tau_{tot}|_{y=0} = \tau_w \Rightarrow \tau_w = C$$

Donc

$$\tau_{tot} = \frac{\partial p_0}{\partial x} y + \tau_w$$

$$\rho \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = \frac{\partial p_0}{\partial x} y + \tau_w$$

Dans la zone turbulente où les effets visqueux seront négligeables (c'est-à-dire suffisamment loin de la paroi), l'équation précédente devient si on considère une couche limite sans gradient de pression :

$$-\rho \overline{u'v'} = \tau_w \quad (1)$$

La contrainte turbulente est constante dans cette zone et égale à la contrainte de paroi. On forme maintenant les équations à partir d'une hypothèse de viscosité turbulente à longueur de mélange :

$$\nu^t = k y u^* \quad (2)$$

Où $k = 0,41$ est une constante universelle, dite constante de Karman, y est une longueur de mélange et u^* une vitesse caractéristique définie par la contrainte de paroi :

$$\tau_w = \rho u^{*2} \quad (3)$$

u^* est aussi appelée vitesse de frottement.

Dans cette zone turbulente l'intégration de (1) après avoir introduit (2) et (3) donne le profil logarithmique des vitesses :

$$-\rho \overline{u'v'} = \tau_w$$

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho u^{*2}$$

$$\nu^t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u^{*2}$$

$$\begin{aligned}
k y u^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= u^{*2} \\
y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \frac{u^*}{k} \\
d\bar{u} &= \frac{u^*}{k} \frac{dy}{y} \\
\bar{u} &= \frac{u^*}{k} \ln(y) + C
\end{aligned} \tag{4}$$

Où C est une constante d'intégration qui ne peut être déterminée par les conditions aux limites, car physiquement la relation (1) n'est valable aux petites distances de la paroi ($y \rightarrow 0$) où la viscosité se fait ressentir. On introduit alors une échelle visqueuse (différente de l'épaisseur de couche limite). On définit cette échelle en fixant à l'unité le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement à la distance δ_v , $Re = \frac{\delta_v u^*}{\nu} = 1$. On en tire donc que :

$$\delta_v = \frac{\nu}{u^*}$$

La région telle que $y \ll \delta_v$ s'appelle la sous-couche visqueuse. À proximité de la paroi, les fluctuations turbulentes u' , v' ainsi que \bar{u} et \bar{v} doivent tendre vers zéro. Ce domaine, appelé sous-couche visqueuse, est donc caractérisé uniquement par l'effet des contraintes de cisaillement laminaires. Ainsi, à la limite $y \rightarrow 0$ il reste un seul terme, $\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$, dans l'équation de Reynolds, d'où :

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} &= 0 \\
\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} &= 0
\end{aligned}$$

La conservation de quantité de mouvement selon x se transforme ainsi en une équation aux dérivées totales, intégrable aisément :

$$\bar{u} = C_1 y$$

La contrainte de cisaillement $\tau_w = \rho \nu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu C_1$ par l'introduction de la vitesse de frottement u^* , définie selon :

$$u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2}$$

On obtient donc :

$$\tau_w = \rho u^{*2} = \mu C_1$$

$$C_1 = \frac{\rho}{\mu} u^{*2}$$

On peut écrire la vitesse moyenne sous la forme :

$$\bar{u} = \frac{u^{*2}}{\nu} y, \quad y \ll \delta_\nu \quad (5)$$

Maintenant il faut raccorder la solution (4) valable pour $y > \delta_\nu$ et (5) valable pour $y \ll \delta_\nu$ par le choix de la constante C dans (4). D'après la loi (5) dans la sous-couche, la vitesse en δ_ν devrait être égale à u^* . Comme à cette distance les effets convectifs commencent à prendre le dessus, on approxime la vitesse en δ_ν par $c'u^*$, on obtient donc en remplaçant dans (4) :

$$\bar{u}(y = \delta_\nu) = c'u^*$$

$$\frac{u^*}{k} \ln(\delta_\nu) + C = c'u^*$$

$$C = c'u^* - \frac{u^*}{k} \ln(\delta_\nu)$$

$$C = c'u^* - \frac{u^*}{k} \ln\left(\frac{\nu}{u^*}\right)$$

Finalement

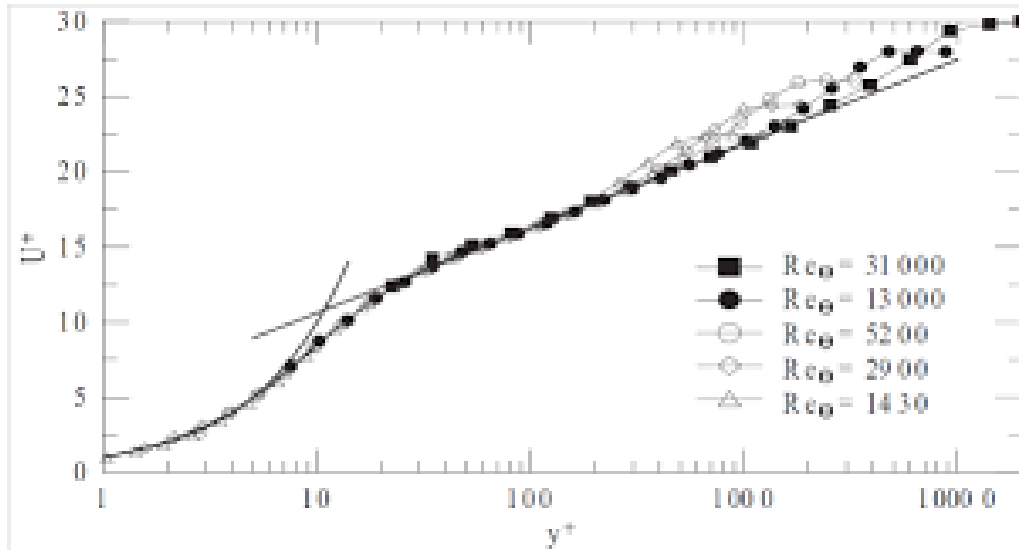
$$\bar{u} = \frac{u^*}{k} \left(\ln(y) + kc' - \ln\left(\frac{\nu}{u^*}\right) \right)$$

$$\bar{u} = \frac{u^*}{k} \left(\ln\left(\frac{yu^*}{\nu}\right) + c'' \right)$$

D'après les mesures réalisées en laboratoire sur des surfaces extrêmement lisses, on trouve :

$$\bar{u} = u^* \left(2,5 \ln\left(\frac{yu^*}{\nu}\right) + 5,1 \right), \quad y > \delta_\nu$$

Le profil de vitesse moyenne adimensionné $U^+(y^+)$ par les variables intrinsèques au problème, $U^+ = \frac{\bar{u}}{u^*}$ et $y^+ = \frac{y}{\delta_\nu}$ est représenté sur la figure. On remarque que quelque soit le nombre de Reynolds, les profils se superposent tous sur une même loi. Pour $y > 50 \delta_\nu$ on retrouve bien la loi logarithmique et pour $y < 50 \delta_\nu$ le raccordement vers la loi linéaire correspondant ici à la courbe introduite par la représentation semi-logarithmique. En fait la loi linéaire se retrouve avec une bonne approximation pour des distances telles que $y < 5 \delta_\nu$.



profil universel des vitesses

On peut aussi dans la pratique utiliser pour exprimer la composante scalaire \bar{u} dans la couche limite turbulente externe l'équation :

$$\frac{\bar{u}}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \quad , n \cong 1 \text{ à } 8$$

Si le gradient de pression est nul, le champ de vitesse dans la couche limite turbulente externe peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = A \left(\frac{u^* y}{\nu}\right)^{1/n}$$

Les résultats expérimentaux donnent pour la constante A la valeur numérique **8,74** et pour n la valeur numérique **7**.

Elle peut aussi s'écrire après quelques transformations :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{u^*} &= 8,74 \left(\frac{u^* y}{\nu}\right)^{1/n} \\ \bar{u} &= 8,74 u^* \left(\frac{u^* y}{\nu}\right)^{1/n} \\ \frac{\bar{u}}{U_e} &= \frac{8,74}{U_e} u^* \left(\frac{u^* y}{\nu}\right)^{1/n} \\ \frac{\bar{u}}{U_e} &= \frac{8,74}{U_e} (u^*)^{1+\frac{1}{n}} \left(\frac{y}{\nu}\right)^{1/n} \\ \frac{\bar{u}}{U_e} &= \frac{8,74}{U_e} (u^*)^{1+\frac{1}{n}} \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{1/n} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{u}}{U_e} = \frac{8,74}{U_e} \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \left(\frac{\delta}{\nu} \right)^{1/n} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n}$$

La condition de compatibilité avec l'écoulement extérieur fournit :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{U_e} \Big|_{y=\delta} &= 1 \\ \frac{8,74}{U_e} \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \left(\frac{\delta}{\nu} \right)^{1/n} &= 1 \end{aligned} \quad (6)$$

L'utilisation des deux dernières équations permet de définir l'approximation usuelle de la vitesse en régime turbulent :

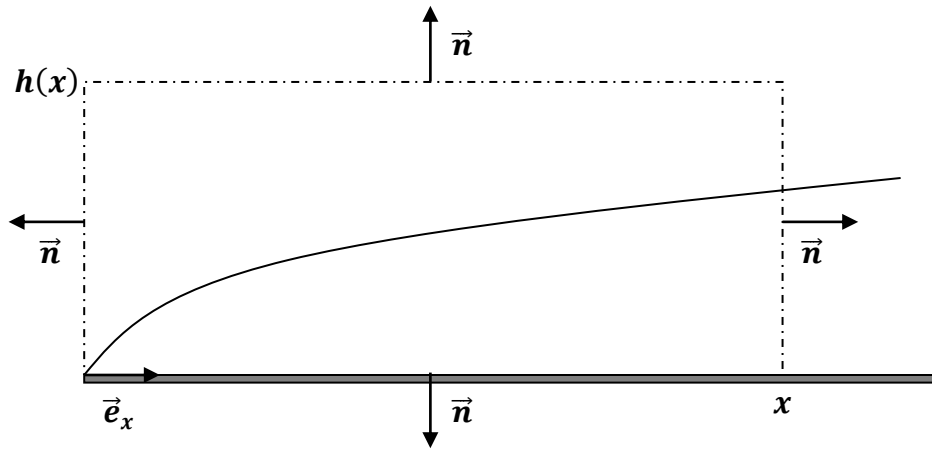
$$\frac{\bar{u}}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n}$$

Avec $n \cong 7 - 8$ pour une plaque plane.

L'équation (6) constitue également une relation à part entière puisqu'il s'agit d'une loi de frottement qui peut s'exprimer plus adéquatement comme :

$$\begin{aligned} \frac{8,74}{U_e} \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \left(\frac{\delta}{\nu} \right)^{1/n} &= 1 \\ \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{n+1}{2n}} &= \frac{U_e}{8,74} \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^{1/n} \\ \frac{\tau_w}{\rho} &= \left(\frac{U_e}{8,74} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^{\frac{2}{n+1}} \\ \tau_w &= \rho \left(\frac{U_e}{8,74} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^{\frac{2}{n+1}} \\ \tau_w &= \rho U_e^2 \left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{\nu}{U_e \delta} \right)^{\frac{2}{n+1}} \end{aligned} \quad (7)$$

2-3) évolution spatiale de la couche limite :



Considérons le volume V de longueur x depuis le bord d'attaque, de hauteur $h(x)$, d'épaisseur 1 m dont la surface frontière est S . On désigne par \vec{n} la normale unitaire en tout point de S orienté positivement vers l'extérieur du volume V .

L'équation de la conservation de la masse s'écrit :

$$\iiint_{P \in V} \frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} d\tau_P + \oiint_{N \in S} (\rho \vec{v})(N, t) \cdot \vec{ds}_N = 0$$

Puisque le fluide est supposé incompressible $\rho = \text{Cte}$. La plaque plane étant supposée imperméable l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$-\int_0^{h(x)} \rho U_e dy + \int_0^{h(x)} \rho \bar{u} dy + \int_0^x \rho \bar{v} dx = 0$$

$$\int_0^x \rho \bar{v} dx = \int_0^{h(x)} \rho (U_e - \bar{u}) dy$$

L'axiome des quantités de mouvement s'écrit :

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \iint_S (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \vec{F}_e$$

L'écoulement est permanent et la plaque plane supposée horizontale. Projets suivant le vecteur de base unitaire \vec{e}_x l'équation précédente. Suivant \vec{e}_x le poids du volume du fluide V a une composante scalaire nulle. La composante scalaire de la force de contact suivant \vec{e}_x se réduit à :

$$\vec{F}_{ec} \cdot \vec{e}_x = - \int_0^x \tau_w dx$$

$$-\int_0^{h(x)} \rho U_e^2 dy + \int_0^{h(x)} \rho \bar{u}^2 dy + \int_0^x \rho \bar{v} U_e dx = -\int_0^x \tau_w dx$$

D'après l'équation de conservation de la masse, puisque U_e est le module du champ de vitesse permanent et uniforme à l'amont du bord d'attaque de la plaque nous pouvons écrire :

$$\int_0^x \rho \bar{v} dx = \int_0^{h(x)} \rho U_e dy - \int_0^{h(x)} \rho \bar{u} dy$$

$$\int_0^x \rho \bar{v} U_e dx = \int_0^{h(x)} \rho U_e^2 dy - \int_0^{h(x)} \rho \bar{u} U_e dy$$

La composante scalaire suivant le vecteur unitaire \vec{e}_x issue de l'axiome des quantités de mouvement s'écrit :

$$-\int_0^{h(x)} \rho U_e^2 dy + \int_0^{h(x)} \rho \bar{u}^2 dy + \int_0^x \rho \bar{v} U_e dx = -\int_0^x \tau_w dx$$

$$-\int_0^{h(x)} \rho U_e^2 dy + \int_0^{h(x)} \rho \bar{u}^2 dy + \int_0^{h(x)} \rho U_e^2 dy - \int_0^{h(x)} \rho \bar{u} U_e dy = -\int_0^x \tau_w dx$$

$$\int_0^{h(x)} \rho \bar{u}^2 dy - \int_0^{h(x)} \rho \bar{u} U_e dy = -\int_0^x \tau_w dx$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\int_0^x \tau_w dx = \int_0^{h(x)} \rho \bar{u} U_e dy - \int_0^{h(x)} \rho \bar{u}^2 dy$$

$$\int_0^x \tau_w dx = \int_0^{h(x)} \rho \bar{u} (U_e - \bar{u}) dy$$

$$\int_0^x \tau_w dx = \rho U_e^2 \int_0^{h(x)} \frac{\bar{u}}{U_e} \left(1 - \frac{\bar{u}}{U_e}\right) dy$$

Puisque τ_w est une fonction de la variable x nous pouvons en dérivant par rapport à x l'équation précédente écrire :

$$\tau_w = \rho U_e^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x)} \frac{\bar{u}}{U_e} \left(1 - \frac{\bar{u}}{U_e}\right) dy$$

La relation pariétale peut s'exprimer comme :

$$\tau_w = \rho U_e^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^1 \eta^{1/n} (1 - \eta^{1/n}) d\eta$$

Avec $\eta = \frac{y}{\delta}$

$$\tau_w = \rho U_e^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^1 (\eta^{1/n} - \eta^{2/n}) d\eta$$

$$\tau_w = \rho U_e^2 \left[\frac{1}{\frac{1}{n} + 1} - \frac{1}{\frac{2}{n} + 1} \right] \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (8)$$

L'élimination de τ_w entre (7) et (8) donne :

$$\rho U_e^2 \left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{v}{U_e \delta} \right)^{\frac{2}{n+1}} = \rho U_e^2 \left[\frac{1}{\frac{1}{n} + 1} - \frac{1}{\frac{2}{n} + 1} \right] \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

$$\left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{v}{U_e \delta} \right)^{\frac{2}{n+1}} = \left[\frac{1}{\frac{1}{n} + 1} - \frac{1}{\frac{2}{n} + 1} \right] \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

Pour pouvoir procéder à l'intégration, il est plus aisé de choisir la valeur du paramètre n à 7 étant donné que l'on est dans le cas de la plaque plane lisse :

$$\left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{v}{U_e \delta} \right)^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{7}{72} \right] \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = 0,231 \left(\frac{v}{U_e \delta} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\delta U_e}{v} \right)}{\partial \left(\frac{x U_e}{v} \right)} = 0,231 \left(\frac{v}{U_e \delta} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{4}{5} \left(\frac{\delta U_e}{v} \right)^{5/4} = 0,231 \left(\frac{x U_e}{v} \right) + C$$

Et la constante d'intégration peut être déterminée par l'intermédiaire des conditions aux limites en $x = 0$.

$$\delta(x = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Alors

$$\left(\frac{\delta U_e}{v} \right)^{5/4} = 0,289 \left(\frac{x U_e}{v} \right)$$

$$\frac{\delta U_e}{v} = (0,289)^{4/5} \left(\frac{x U_e}{v} \right)^{4/5}$$

$$\delta = (0,289)^{4/5} \left(\frac{U_e}{v} \right)^{-1} \left(\frac{x U_e}{v} \right)^{4/5}$$

$$\delta = 0,371 \left(\frac{U_e}{\nu} \right)^{-1/5} x^{4/5}$$

$$\delta = 0,371 \left(\frac{\nu}{U_e} \right)^{1/5} x^{4/5}$$

De façon similaire à la couche limite laminaire, il est possible d'en tirer une expression en fonction d'un Re_x :

$$\delta = 0,371 \left(\frac{\nu}{x U_e} \right)^{1/5} x$$

$$\delta = 0,371 \left(\frac{1}{Re_x} \right)^{1/5} x$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,371}{Re_x^{1/5}}$$

Le frottement pariétal local est donné par :

$$\tau_w = \rho U_e^2 \left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{\nu}{U_e \delta} \right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$\tau_w = \rho U_e^2 \left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\nu}{U_e \delta} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\tau_w = \rho U_e^2 \left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\nu}{U_e \frac{0,371}{Re_x^{1/5}} x} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\tau_w = \rho U_e^2 \left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{1}{0,371} \frac{\nu}{U_e x} Re_x^{1/5} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\tau_w = \rho U_e^2 \left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{1}{0,371} \right)^{\frac{1}{4}} (Re_x^{-1} Re_x^{1/5})^{\frac{1}{4}}$$

$$\tau_w = \rho U_e^2 \left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{1}{0,371} \right)^{\frac{1}{4}} (Re_x^{-4/5})^{\frac{1}{4}}$$

$$\tau_w = 0,0288 \rho U_e^2 Re_x^{-1/5}$$

Le coefficient de frottement pariétal est donc :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} = \frac{0,0288 \rho U_e^2 Re_x^{-1/5}}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} = 0,058 Re_x^{-1/5}$$

Références bibliographiques :

- [1] Pierre-Antoine BOIS. *Introduction à la mécanique théorique des fluides*, ellipses édition marketing, 2000.
- [2] A. CHAGNES, S. GRIVEAU, V. LAIR, A. RINGUEDE. *Mécanique des fluides. Fondements et applications*, De Boeck Supérieur, 2017.
- [3] Patrick CHASSAING. *Mécanique des fluides. éléments d'un premier parcours*, EPADUES-EDITIONS, coll. Polytech, 1996.
- [4] Patrick CHASSAING. *Turbulence en mécanique des fluides – analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur*, CEPADUES-EDITIONS, coll. Polytech, 2000.
- [5] Jean Sylvestre DARROZES, Arnault MONAVON. *Analyse phénoménologique des écoulements*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2014.
- [6] Marcel LESIEUR. *La turbulence*, Presses Universitaires de Grenoble, 1994.
- [7] Pierre PERNES. *Mécanique des milieux continus déformables : application à la mécanique des liquides parfaits et des liquides newtoniens*, cemagref éditions, 2003.
- [8] Inge L. RYHMING. *Dynamique des fluides*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004.