

Corrigé de l'exercice1(06pts) On a : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$.

1. **Calcul de u_1, u_2 et u_3 (01.5pts)**

$$\blacksquare u_1 = \frac{3}{4}u_0 - 1 = \frac{3}{4} \times 2 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad \blacksquare u_2 = \frac{3}{4}u_1 - 1 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$$

$$\blacksquare u_3 = \frac{3}{4}u_2 - 1 = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{5}{8}\right) - 1 = -\frac{15}{32} - 1 = -\frac{47}{32}.$$

2. **Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique(02pts)**

Il suffit de vérifier que $v_{n+1} = qv_n$.

On a : $v_n = u_n + 4$, donc $v_{n+1} = u_{n+1} + 4$. Ainsi: (01pts)

$$v_{n+1} = \left(\frac{3}{4}u_n - 1\right) + 4 = \frac{3}{4}u_n + 3 = \frac{3u_n + 12}{4} = \frac{3}{4}(u_n + 4) = \frac{3}{4}v_n.$$

D'où (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 4 = 2 + 4 = 6$. (01pts)

3. **L'expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n (01.5pts)**

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant géométrique alors : (01pts)

$$v_n = v_0 \times q^n = 6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Et par conséquent : (0.5pts)

$$u_n = v_n - 4 = 6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4.$$

La limite(01pts) On a : $\lim u_n = \lim \left(6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4\right) = -4$.

Corrigé de l'exercice2(07pts) I- Résolution de l'équation avec la fonction logarithme(03pts):

$$\ln(x+2) + \ln(4-x) = 3 \ln 2 \quad (*)$$

Cette équation est définie si et seulement si $\begin{cases} x+2 > 0 \\ 4-x > 0 \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} x > -2 \\ x < 4 \end{cases}$, et qu'on peut

exprimer par $\begin{cases} x \in]-2, +\infty[\\ x \in]-\infty, 4[\end{cases}$. Donc le domaine de définition de l'équation est : (01pts)

$$\mathcal{D}_{eq} =]-\infty, 4[\cap]-2, +\infty[=]-2, 4[.$$

L'équation (*) peut s'écrire sous la forme :

$$\ln((x+2)(4-x)) = \ln 2^3.$$

Qui est équivalente à l'équation :

$$\ln(-x^2 + 2x + 8) = \ln 8.$$

Donc :

$$-x^2 + 2x + 8 = 8.$$

Et on a la nouvelle équation suivante : (01pts)

$$-x^2 + 2x = 0 \quad (**)$$

La résolution de (**), nous donne :

$$-x(x-2) = 0.$$

Et on obtient deux solutions : $x_1 = 0 \in \mathcal{D}_{eq}$ et $x_2 = 2 \in \mathcal{D}_{eq}$.

Comme chacune des deux solutions appartient à $\mathcal{D}_{eq}$, on déduit (*) admet deux solutions :

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 2. \text{ (01pts)}$$

II- Résolution de l'inéquation avec la fonction exponentielle(04pts):

$$3e^{2x} - 14e^x + 15 \leq 0 \quad (*)$$

Il est clair que le domaine de définition de l'inéquation (*) est $\mathcal{D}_{inq} =]-\infty, +\infty[$.

En posant $X = e^x$, on a $X \in]0, +\infty[$ et l'inéquation (*) peut s'écrire sous la forme : (01pts)

$$3X^2 - 14X + 15 \leq 0 \quad (**)$$

La résolution de l'inéquation (**) nous amène à étudier le signe de : (01pts)

$$f(X) = 3X^2 - 14X + 15.$$

On a $f(X)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0, +\infty[$. De plus $f(X) = 0$, nous donne l'équation $3X^2 - 14X + 15 = 0$ dont le discriminant $\Delta = 16$. Il existe donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{5}{3} \in]0, +\infty[\text{ et } X_2 = 3 \in]0, +\infty[.$$

Et le tableau suivant nous donne le signe de $f(X) = 3X^2 - 14X + 15$:

X	0	$\frac{5}{3}$	3	$+\infty$
signe de f	+	○	○	+

Du tableau, on déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation (**) est : (01pts)

$$S^{**} = \left[\frac{5}{3}, 3\right].$$

Et par conséquent, l'ensemble des solutions S^* de l'inéquation (*) est les x telles que :

$$e^x = X \in \left[\frac{5}{3}, 3\right].$$

Qui est équivalent à :

$$x \in \left[\ln \frac{5}{3}, \ln 3\right].$$

Donc, (01pts)

$$S^* = \left[\ln \frac{5}{3}, \ln 3\right].$$

Corrigé de l'exercice3(07pts) I- La recherche des extremums de la fonction f en utilisant le teste de la première dérivée dans le cas où(04pts) :

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}$. Et sa dérivée est donné par : (01pts)

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)x = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Les points critiques de f sont donnés par l'équation :

$$f'(x) = 0.$$

Qui est équivalente à :

$$(1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Sa résolution, nous donne :

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Finalement, f admet deux points critiques : (01pts)

$$x_1 = 1, x_2 = -1.$$

Et le test de ces points critiques se fait par ce tableau de variations (01pts)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
<i>signe de f'</i>	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$

Du tableau, on déduit que f admet deux extremums : (01pts)

■ $f(-1) = -e^{-\frac{1}{2}}$ Qui est un minimum local.

■ $f(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ Qui est un maximum local.

II- Calcul de la première dérivée (03pts) :

$$\blacksquare f(x) = \ln(1 + \sqrt{2x+1}) \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{1 + \sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1} + 2x+1}.$$

$$\blacksquare f(x) = (x \ln x)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(\ln x + 1)(x \ln x)^2.$$