

Corrigé de l'exercice1(06pts) On a : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n+8}{u_n+3}$.

1. Calcul de u_1, u_2 et u_3 (01.5pts)

$$\blacksquare u_1 = \frac{u_0+8}{u_0+3} = \frac{1+8}{1+3} = \frac{9}{4} \quad \blacksquare u_2 = \frac{u_1+8}{u_1+3} = \frac{\frac{9}{4}+8}{\frac{9}{4}+3} = \frac{\frac{9+32}{4}}{\frac{9+12}{4}} = \frac{41}{21}$$

$$\blacksquare u_3 = \frac{u_2+8}{u_2+3} = \frac{\frac{41}{21}+8}{\frac{41}{21}+3} = \frac{\frac{41+168}{21}}{\frac{41+63}{21}} = \frac{209}{104}.$$

2. Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique (02.5pts)

Il suffit de vérifier que $v_{n+1} = qv_n$.

On a : $v_n = \frac{u_n+4}{u_n-2}$, donc $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+4}{u_{n+1}-2}$. Ainsi: (01.5pts)

$$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n+8}{u_n+3}+4}{\frac{u_n+8}{u_n+3}-2} = \frac{\frac{(u_n+8)+4(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{(u_n+8)-2(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{5u_n+20}{-u_n+2} = -5 \frac{u_n+4}{u_n-2} = -5v_n.$$

D'où (v_n) est géométrique de raison $q = -5$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0+4}{u_0-2} = \frac{5}{-1} = -5$. (01pts)

3. L'expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n (02pts)

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant géométrique alors : (0.5pts)

$$v_n = v_0 \times q^n = -5 \times (-5)^n = (-5)^{n+1}.$$

On a aussi : $v_n = \frac{u_n+4}{u_n-2}$, nous donne $v_n(u_n-2) = u_n+4$. Et par la suite : $v_n u_n - 2v_n = u_n + 4$.

Donc, $(v_n-1)u_n = 2v_n+4$. Ainsi, $u_n = \frac{2v_n+4}{v_n-1} = 2 \frac{v_n+2}{v_n-1}$. Et par conséquent : (01.5pts)

$$u_n = 2 \frac{(-5)^{n+1}+2}{(-5)^{n+1}-1}.$$

Corrigé de l'exercice2(07pts) I- Résolution de l'inéquation avec la fonction ln (04pts):

$$\ln(x-1) + \ln(2x) \leq \ln(-x+6) \quad (*)$$

Cette équation est définie si et seulement si $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x > 0 \\ -x+6 > 0 \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} x > 1 \\ x > 0, \\ x < 6 \end{cases}$ et qu'on peut

exprimer par $\begin{cases} x \in]1, +\infty[\\ x \in]0, +\infty[\\ x \in]-\infty, 6[\end{cases}$. Donc le domaine de définition de l'équation est : (01pts)

$$\mathcal{D}_{\ln} =]-\infty, 6[\cap]0, +\infty[\cap]1, +\infty[=]1, 6[.$$

L'équation (*) peut s'écrire sous la forme :

$$\ln((x-1)(2x)) \leq \ln(6-x).$$

Qui est équivalente à l'équation :

$$\ln(2x^2 - 2x) \leq \ln(6-x).$$

Donc :

$$x^2 - 2x \leq 6 - x.$$

Et on a la nouvelle inéquation suivante : (01pts)

$$x^2 - x - 6 \leq 0 \quad (**)$$

La résolution de (**), nous amène à étudier le signe de :

$$f(x) = x^2 - x - 6.$$

On a $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus $f(x) = 0$, nous donne l'équation : $x^2 - x - 6 = 0$ dont le discriminant $\Delta = 25$. Il existe donc deux solutions : $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$.

Et le tableau suivant nous donne le signe de $f(x) = x^2 - x - 6$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$\text{signe de } f$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

Du tableau, on déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation (**) est : (01pts)

$$S^{**} = [-2, 3].$$

Et par conséquent, l'ensemble des solutions S^* de l'inéquation (*) est : (01pts)

$$S^* = S^{**} \cap \mathcal{D}_{\text{inq}} = [-2, 3] \cap]1, 6[=]1, 3].$$

II- Résolution de l'équation avec la fonction exponentielle (03pts):

$$3e^{2x} + 2e^x - 5 = 0 \quad (*)$$

Il est clair que le domaine de définition de l'équation (*) est $\mathcal{D}_{\text{eq}} =]-\infty, +\infty[$.

En posant $X = e^x$, on a $X \in]0, +\infty[$ et l'équation (*) peut s'écrire sous la forme : (01pts)

$$3X^2 + 2X - 5 = 0 \quad (**)$$

Le discriminant de l'équation (**) est : $\Delta = 64$. Il existe donc deux solutions : (01pts)

$$X_1 = -\frac{5}{3} \notin]0, +\infty[\text{ et } X_2 = 1 \in]0, +\infty[.$$

Donc, l'équation (**) admet une seule solution : $X = 1$.

Et par conséquent, l'équation (*) admet une seule solution donnée par x telle que : $e^x = X = 1$.

Ce qui nous donne : $x = \ln 1 = 0$. (01pts)

Corrigé de l'exercice 3 (07pts) I- La recherche des extremums de la fonction f en utilisant le teste de la deuxième dérivée dans le cas où (04pts) :

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 3.$$

Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}$. Et sa dérivée première est donné par : (01pts)

$$f'(x) = 4x^3 - 16x.$$

Et sa deuxième dérivée est :

$$f''(x) = 12x^2 - 16.$$

Les points critiques de f sont donnés par l'équation :

$$f'(x) = 0.$$

Qui est équivalente à :

$$4x^3 - 16x = 0.$$

Sa résolution, nous donne :

$$4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Finalement, f admet trois points critiques : (01.5pts)

$$x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 0.$$

Et le test de ces points critiques se fait comme suit : (01.5pts)

■ $f''(2) = 32 > 0$, donc $f(2) = -13$ est un minimum local.

■ $f''(-2) = 32 > 0$, donc $f(-2) = -13$ est un minimum local.

■ $f''(0) = -16 < 0$, donc $f(x) = 3$ est un maximum local.

II- Calcul de la première dérivée (03pts) :

$$\blacksquare f(x) = (\ln x)^2 - e^{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}}.$$

$$\blacksquare f(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^9 \Rightarrow f'(x) = 9 \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \right) \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^8.$$