Université A/Mira de Bejaia
Département de Recherche Opérationnelle
L2 MA.

Bejaia 2023/2024

Série de TD N° 1 d'Analyse 4

Exercice 1. Pour deux éléments $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on définit le produit scalaire de x et y par $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

1. Montrer que $(x|x)\lambda^2 + 2\lambda(x|y) + (y|y) \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2. Déduire l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante :

$$(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit l'application $\|.\|_2$ définie par

$$\|.\|_2 : \ x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Montrer que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3. Soit f une application injective sur $\mathbb{R}$.
Montrer que l'application d définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Vérifier que l'application d définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que l'application d' définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $d'(x, y) = \sqrt{\|x - y\|}$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5. Soit N la norme donnée par

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R}^3 \ &\rightarrow \ \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, x_3) \ &\mapsto \ N(X) = \max\left(\left|\frac{1}{2}x_1\right|, \left|\frac{1}{2}x_2\right|, \left|\frac{1}{2}x_3\right|\right). \end{aligned}$$

1. Calculer $N(2, -\sqrt{2}, \frac{1}{2})$, $N(-\frac{3}{2}, \sqrt{3} + 1, \frac{5}{4})$.
2. Déterminer la boule ouverte $B((1, 0, 0), 2)$.
3. Vérifier si $(1, -2, \frac{1}{3}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{5}, 0) \in B((0, 0, 0), \frac{1}{2})$.

Exercice 6. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $N(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les normes N et $\|.\|_2$ sont équivalentes.
3. Déterminer et dessiner les boules fermées unitées pour les normes N et $\|.\|_2$.