

Série TD n°1 Analyse complexe

Exercice 1 Soit les nombres complexes

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = +1, \quad z_4 = i, \quad z_5 = -i,$$
$$z_6 = 1 + i, \quad z_7 = -1 + i, \quad z_8 = -1 - i, \quad z_9 = 1 - i.$$

- 1- Trouver les parties réelle et imaginaire de ces nombres.
- 2- Représenter ces nombres sur le plan complexe.
- 3- Trouver les conjugués de ces nombres.
- 4- Calculer (Forme algébrique)

$$z_2 + z_9, \quad z_4 + z_6, \quad z_2 - z_8, \quad z_5 - z_7, \quad z_4 z_6, \quad z_7 z_8, \quad \frac{z_3}{z_7}, \quad \frac{z_5}{z_9}, \quad \frac{z_7}{z_8}.$$

- 5- Calculer les modules de ces nombres.
- 6- Trouver les arguments principaux de ces nombres ($\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$).
- 7- En déduire les arguments de ces nombres ($\text{arg}(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$).
- 8- Donner les formes trigonométrique et exponentielle de ces nombres.
- 9- Calculer $(z_6)^{25}$ et $\left(\frac{z_7}{z_8}\right)^{20}$.

Exercice 2 Soient a, b et c dans \mathbb{C} .

- 1- Montrer que

$$|1 + a| + |a + b| + |b| \geq 1.$$

- 2- Exprimer $\mathcal{R}e(a^2)$ en fonction de $|a|$ et de $\mathcal{R}e(a)$.
- 3- Si $|a| = 1$, calculer

$$|1 + a|^2 + |1 - a|^2.$$

- 4- Montrer que si $|a| = 1$ et $a \neq 1$ alors

$$i \left(\frac{a + 1}{a - 1} \right) \in \mathbb{R}$$

et

$$\mathcal{R}e \left(\frac{1}{1 - a} \right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

1- Déterminer le lieu des points M d'affixe λ tels que

$$\left| \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right| = 1.$$

2- Montrer l'équivalence

$$\lambda \in \mathbb{R} \iff \left| \frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i} \right| = 1.$$

Exercice 4 Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$, on a

$$\left| \frac{1 - z^{2019}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{2019}}{1 - |z|}.$$

Exercice 5 Calculer les racines

$$(-1)^{1/5}, \quad (+1)^{1/3}, \quad (i)^{1/4}, \quad (1+i)^{1/2}, \quad (-1+i)^{1/8}.$$

Résoudre dans \mathbb{C} ($z = x + iy$) les équations

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$$

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$$

$$z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$$

$$z^4 - (3 + 8i)z^2 - 16 + 12i = 0.$$