Faculté des sciences économiques, commerciales et des sciences de gestion.
Université Abderrahmane Mira-Bejaia

Année universitaire : 2023/2024
Module : Gestion de portefeuille ;
Niveau d'études : Master 1 ; Intitulé **du master** : EMF
Ens: GANA

Module : gestion de portefeuille (GPF).

Présenté par :

Dr. GANA Brahim ;

MCA, Université de Bejaia.

Le cours de gestion de portefeuille est destiné aux étudiants Master, spécialité Économie Monétaire est financière (EMF). Il contient 3 grands chapitres, selon le programme et le cahier des charges de cette formation. Le cours est accompagné d'une plaquette de travaux dirigés sous formes d'application et des études de cas.

La matière vise une présentation des principales techniques de gestion du portefeuille d'actifs financiers.

Connaissances préalables recommandées
Comme pré-requis/ marché de capitaux, analyse financière, finance internationale

Les principaux axes de ce cours visent essentiellement à développer les éléments suivants :

- L'investissement dans le portefeuille financier
    - Rendement et risque des investissements individuels
    - Rendement et risque dans le portefeuille optimal et théorie de Markowitz
- Modèles d'évaluation des actifs financiers
    - La relation entre le risque et le rendement dans le portefeuille
    - Le modèle Sharpe et la relation entre le rendement et le risque des investissements individuels et de marché.
    - Autres modèles d'évaluation des actifs financiers.
- Fonds d'investissement
    - La création et le développement de fonds d'investissement.
    - Stratégie de construction de portefeuille

Introduction

Faire le choix d'investir en action, c'est d'accepter un niveau de risque élevé, en espérant bénéficier d'une rentabilité élevée. Si vous n'êtes pas prêt à accepter ce niveau de risque, il convient de s'orienter vers des placements monétaires moins rentables mais surtout non risqués. En effet, plus de rendement c'est surtout plus de risque.

Dans ce sens, avant de construire un portefeuille, il convient de répondre à quelques questions afin de préciser les objectifs :

La première question concerne la durée du placement. Combien d'années pouvez- vous maintenir votre investissement en actions ?

Nous admettons que le temps long est plutôt favorable à un investissement en actions. Une durée de 8 ans parait constituer un minimum. Des durées courtes, de quelques mois par exemple, sont toujours possibles mais présentent un risque important.

La deuxième question : qu'attendez-vous de votre investissement en actions ? Quel est l'objectif chiffré en % de gain, que vous espérez ? Avec un objectif chiffré, nous pouvons aisément suivre son évolution, à la hausse comme à la baisse, avec une possibilité de " sortir " lorsqu'il est atteint. Cette démarche permet d'optimiser les plus-values en cas de tendance haussière et de minimiser les moins values en cas de tendance baissière.

La troisième question correspond à l'importance des fonds investi en actions par rapport à la totalité de l'épargne financière. Quelle est la proportion d'épargne investie en actions ? En effet, les sommes investies ne doivent pas présenter un montant trop élevé pour réduire l'épargne de précaution que chacun à constituer pour faire face à des situations imprévisibles. Les sommes investies doivent être limitées et raisonnables pour que cette argent ne soit pas désinvesti en cas d'imprévue.

Enfin, la question de degré de tolérance au risque doit être posée. C'est ainsi qu'un questionnaire est, souvent, proposé par l'intermédiaire en bourse (gestionnaire de portefeuille) afin d'identifier votre profil d'investisseur : prudent, équilibré ou offensif. Par définition, la tolérance au risque permet de déterminer le niveau de risque qu'un investisseur peut prendre compte tenu de ses réactions émotionnelles face à une baisse de la valeur de portefeuille sur une courte période.

Chapitre 1 : Les déterminants de l'évolution des cours des actions

1- La conjoncture économique

L'évolution des cours des actions est généralement liée à la conjoncture économique : la croissance économique est synonyme de la hausse des cours alors que les périodes de récession sont plutôt défavorables aux actions. La conjoncture économique a été largement identifiée comme un élément principal dans les décisions de gestion du risque. La théorie de portefeuille, dans ses premiers modèles, estime que les taux de rentabilité des titres sont associés à l'état de l'économie (croissance, stabilité, récession...etc). Par conséquent, une entreprise ancienne qui possède une courbe d'expérience est un facteur essentiel en termes de rentabilité et de durabilité. Cette valeur historique permet aux investisseurs de prédire le taux de rentabilité et d'identifier la volatilité des titres par une démarche probabiliste et à travers la combinaison du risque et de rentabilité.

La rentabilité et le risque selon le critère (moyenne/variance).

Pour évaluer la rentabilité des actions, la mesure couramment utilisée est la distribution probabiliste. Celle- ci repose sur la définition du taux de rentabilité espérée à travers la moyenne des valeurs possibles pondérées par leur probabilité associée.

En contre partie, le risque d'une action est souvent comparé à sa volatilité. Ainsi, la mesure statistique utilisée pour cerner la volatilité des titres est l'écart type ou la variance. Selon les deux formules suivantes :

Pour la rentabilité moyenne, on note :

$$E(r) = \sum_{n=1}^{n} P_i R_i$$

La rentabilité espérée d'une action $E(R)$ est égale à la somme des probabilités de rentabilité (P_i) pondérée par les taux de rentabilités qui lui sont associés(R_i).

Pour identifier le risque des actions, la mesure souvent utilisée et la variance, on note alors :

$$Var = \delta^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i (R_i - E(R))^2$$

La variance des titres mesure l'écart de rentabilité des titres par rapport à la moyenne. Ainsi, le risque associé au titre "i" est égale au taux de variation ou la déviation par rapport à la rentabilité moyenne (E(R)). Plus la variance est grande (écart type élevé), plus le risque de titre est important.

Exemple

Le tableau 1 suivant synthétise les mouvements des titres A et B, en fonction des prévisions de leur taux de rentabilités et l'estimation des différents états de l'économie.

Tableau 1

Etat de l'économie	**Taux de rentabilité (A) en %**	**Taux de rentabilité (B) en %**	**Probabilité %**
croissance	38.5	-22.5	1/3
Stabilité	14	2	1/3
Récession	-10.5	26.5	1/3

Questions

Déterminer la rentabilité moyenne, la variance et l'écart type des titres A et B ?

Solution

Tableau 2: calcul de la moyenne, la variance et l'écart type de titre A.

Etat de l'économie	$R_{(A)}$	$(R_{(A)} - E(R)_{(A)})$	$(R_{(A)} - E(R)_{(A)})^2$
croissance	0.385	0.245	0.06
Stabilité	0.14	0	0
Récession	-0.105	-0.245	0.06
	$E(R)_A = 0.14$		**Var =1/3 (0.06+0+0.06) = 0.04**

- **Espérance de rentabilité**

$E(r) = \sum_{n=1}^{n} P_i R_i$

- Comme les probabilités associées à chaque taux de rentabilité sont identiques (équiprobables), nous pouvons écrire :

$E(R)_A = \frac{1}{3}(0.385 + 0.14 - 0.105) = 0.14$

- **La variance**

$Var = \delta^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i (R_i - E(R))^2$

$$Var = \frac{1}{3}[(0.385 - 0.14)^2 + (0.14 - 0.14)^2 + (-0.105 - 0.14)^2] = 0.04 = 4\%$$

- **L'écart type**

$\delta = \sqrt{Var}$

$\delta = \sqrt{0.04} = 0.2 = 20\%$

La racine de la variance donne un écart type de 20%. Ainsi, le risque de cette action est de 20%. Ce risque indique le taux de dispersion de l'action A par rapport à sa rentabilité moyenne de 14%.

Tableau 3: calcul de la moyenne, la variance et l'écart type de titre B.

Etat de l'économie	$R_{(B)}$	$(R_{(B)} - E(R)_{(B)})$	$(R_{(B)} - E(R)_{(B)})^2$
croissance	- 0.225	- 0.245	0.06
Stabilité	0.02	0	0
Récession	0.265	0.245	0.06

	$E(R)_B = 0.02$		**Var =1/3 (0.06+0+0.06) = 0.04**

- **Espérance de rentabilité**

$E(r) = \sum_{n=1}^{n} P_i R_i$

- les trois perspectives économiques sont équiprobables, nous pouvons écrire :

$E(R)_A = \frac{1}{3}(-0.225 + 0.02 + 0.265) = 0.02$

- **La variance**

$Var = \delta^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i(R_i - E(R))^2$

$Var = \frac{1}{3}[(-0.225 - 0.0.2)^2 + (0.02 - 0.02)^2 + (+0.265 - 0.02)^2] = 0.04 = 4\%$

- **L'écart type**

$\delta = \sqrt{Var}$

$\delta = \sqrt{0.04} = 0.2 = 20\%$

La racine de la variance donne un écart type de 20%. Ainsi, le risque associé à l'action B est de 20%, identique à celui de A. Ce risque indique le taux de variation de l'action B par rapport à sa rentabilité moyenne de 2 %.

Cas particulier

Nous avons expliqué précédemment que les titres risqués sont des titres qui ont un écart type positif. Cependant, lorsque la valeur de l'écart type est égale à zéro, le titre en question est un actif sans risque. L'actif sans risque dans, le cadre de la théorie de portefeuille, est synonyme d'un titre qui dégage une rentabilité certaine compte tenu de l'horizon de décision de l'investisseur et de l'unité de compte choisie. Exemple, un emprunt d'état à 10 ans, lorsqu'il est conservé jusqu'a l'échéance, qui offre un taux de rendement de 5% par an, est un actif sans risque et non volatil et son écart type est nul.

1.1- La relation entre les titres risqués A et B selon les principes de la corrélation et de la covariance

- **La corrélation des titres**

Lorsque l'investisseur constitue son portefeuille, il combine les titres risqués selon un certain nombre de critères qui sont liés à la corrélation et la covariance. La corrélation entre les taux de rentabilité joue un rôle primordiale et impact considérablement la volatilité de la rentabilité du portefeuille constitué. Le coefficient de corrélation est la mesure souvent utilisée pour exprimer le degré de dépendance entre les rendements et nous distinguons trois situations extrêmes selon ce coefficient :

Cas 1 : Deux actions dont les rendements sont totalement indépendants présenteront un coefficient de corrélation entre les rentabilités qui sera égal à zéro

Cas 2 : Deux actions dont les rendements évoluent dans le même sens et présentent un comportement identique auront un coefficient de corrélation qui est unitaire (égal à 1).

Cas3 : Deux actions dont les rendements évoluent dans deux sens opposés, la baisse des rendements d'un titre seront compensés par les hausses de l'autre titre et si la relation inverse est parfaite, les deux titres auront un coefficient de corrélation entre les rendements de chacun des titres qui sera égal à -1. La corrélation est situé souvent dans un intervalle de $[-1\ ,+1]$.

- **La covariance des titres**

La covariance des titres permet d'identifie le signe de la corrélation. C'est une mesure qui nous donne la tendance moyenne de l'évolution des rendements ainsi que leurs directions. Une covariance positive montre que les rentabilités tendaient à évoluer dans la même direction. Une covariance négative montre que les rentabilités des titres tendaient à évoluer dans des directions opposées, d'ou le terme covariance. La formule mathématique qui exprime le lien entre la corrélation et la covariance entre deux actifs risqués (A et B) est appelée le coefficient de corrélation, indiquée ci dessous :

$$Corr(\ A, B) = \frac{Cov(A, B)}{ð_A .\, ð_B}$$

Avec:

Corr (A, B) indique le coefficient de corrélation des rendements relatifs aux actions A et B;

$ð_A .\, ð_B$ est le produit des écarts types des titres A et B.

Cov (A,B) est la covariance des titres (A) et (B), sa formule mathématique est la suivante:

$$Cov\ (A, B) = P_{\mathrm{i}} * \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} (R_A - E(R)_A) * (R_B - E(R)_B)$$

La covariance est déterminée par le produit des écarts de rentabilités des titres A et B.

Elle est peut être de signe positif ou négatif, par contre l'écart type est toujours de signe positif.

Exemple 2

Nous reprenons l'exemple 1 précédent pour calculer la covariance et la corrélation ?

Etat de l'économie	**Taux de rentabilité (A) en %**	**Taux de rentabilité (B) en %**	**Probabilité %**
croissance	38.5	-22.5	1/3
Stabilité	14	2	1/3
Récession	-10.5	26.5	1/3

La relation entre la rentabilité du titre A et celle de titre B, est mesuré par la covariance et la corrélation de leurs rentabilités. Le tableau 4 suivant synthétise les calculs correspondants :

Tableau 4: La mesure de la covariance

		(1)		**(2)**	**(1) x (2)**
Etat de l'économie	$R_{(A)}$	$(R_{(A)} - E(R)_{(A)})$ **Ecart à la rentabilité espérée (titre A)**	$R_{(B)}$	$(R_{(B)} - E(R)_{(B)})$ **Ecart à la rentabilité espérée (titre B)**	$(R_{(A)} - E(R)_{(A)})$ X $(R_{(B)} - E(R)_{(B)})$
croissance	0.385	0.245	- 0.225	- 0.245	- 0.06
Stabilité	0.14	0	0.02	0	0
Récession	-0.105	-0.245	0.265	0.245	- 0.06
	$E(R)_A = 0.14$		$E(R)_B = 0.02$		**-0.12**

Le tableau 4 précédent explique comment déterminer la covariance entre les rentabilités des actions A et B. Pour chaque état de l'économie, nous calculons l'écart de rentabilité observée sur chaque action par rapport à sa rentabilité moyenne. Nous multiplions les écarts de rentabilité des deux actions A et B pour obtenir le produit des écarts. La covariance est la somme pondérée par les probabilités de ces produits des écarts pour les trois états de l'économie. Dans notre exemple précédent, la covariance est négative, ce qui signifie que la tendance moyenne des rentabilités des titres A et B à varier dans une direction opposée.

- La covariance des rendements des titres A et B est :

$$Cov\ (A,B) = P_i \sum_{i=1}^{3} (R_A - E(R)_A) \cdot (R_B - E(R)_B)$$

Cov (A, B) = 1/3 * (- 0.12) = - 0.04

- La corrélation des titres A et B est :

$$Corr(\ A,B) = \frac{Cov(A,B)}{ð_A.ð_B} = \frac{-0.04}{0.2*0.2} = -1$$

Les rendements des deux actions A et B ont une corrélation négative parfaite, ce qui signifie que les rendements des deux actions évoluent avec les mêmes amplitudes mais dans des directions opposées.

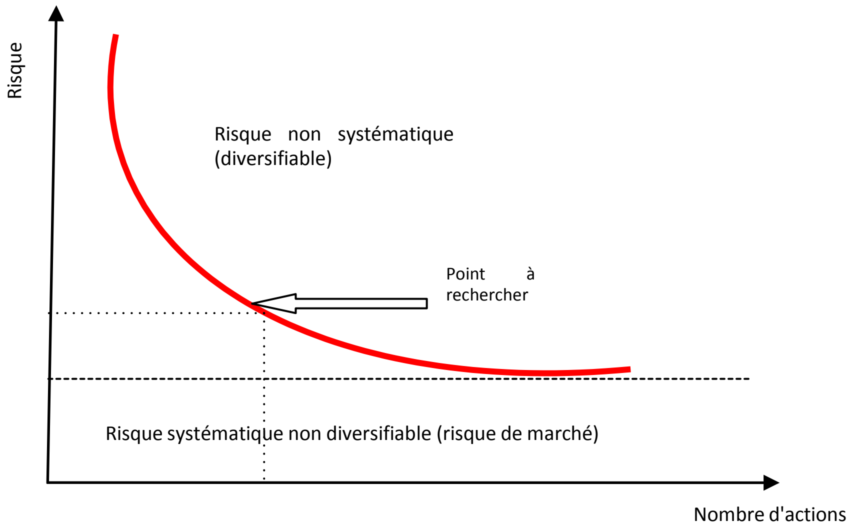
Chapitre 2: **Diversification et constitution de portefeuille**

2.1. Faut- il concentrer son portefeuille sur quelques valeurs ou au contraire multiplier le nombre de lignes ?

Les avantages liés à la détention de nombre limité de valeur sont occasionnés par peu de frais de transactions et de pouvoir facilement suivre l'actualité de petit nombre de sociétés. Par contre, la baisse du cours de l'une d'entre elle aura une grande influence sur la valeur de portefeuille. En effet, si le nombre de valeur détenu et de 5, si l'une d'entre elle fait faillite et les cours des quatre autres restent identiques, la valeur de portefeuille baisse de 1/5 (20%).

Cette situation pose un risque trop important pour le portefeuille. C'est justement ce phénomène d'amplification de la valeur de portefeuille, concentré sur 5 ou 6 valeurs, qui pousse les investisseurs à une diversification plus large sur 15 à 20 actions par exemple. En effet, si chaque valeur représente 5 % de portefeuille, dans le cas d'une vingtaine de lignes, c'est seulement 5% (1/20) de portefeuille qui est perdu. Cela représente un risque moins important qui peut être plus facilement compensé. Le graphique 2 suivant, exprime le principe de diversification en décrivant la relation entre le risque et le nombre d'actions dans un portefeuille.

Graphique 2 : la diversification selon le risque et le nombre d'action détenus dans un portefeuille



2.2. Diversification internationale de portefeuille

Faut-il diversifier internationalement son portefeuille ?

La réponse sera plus nuancée. En effet, la diversification internationale ne marche pas en période de Krach depuis que les marchés financiers sont interconnectés. D'une part, lors d'une crise mondiale, telle que celle de 2008 ou la crise actuelle de coronavirus, la fuite des capitaux en dehors de marché des actions est générale et concerne tous les pays. D'autre part, il faut intégrer dans l'évolution des changes qui peut améliorer ou réduire la performance boursière des titres.

Les SICAV et les FCP sont des portefeuilles collectifs gérés par des sociétés de gestion agrées par l'autorité des marchés financiers. Une société de gestion est une entreprise d'investissement qui gère des portefeuilles da valeurs mobilières pour le compte de tiers. Son métier est d'investir les sommes confiées par les clients en proposant différents types de gestion et de mandats. Un bon moyen de bénéficier d'une gestion diversifiée et professionnelle.

Comment gérer son portefeuille ?

La tentation est grande de faire comme les traders qui achètent et vendent toute la journée. Pour autant le résultat est souvent décevant car, à chaque opération correspond différends couts : frais de courtage, Taxe sur le Transactions Financières (TTF), TVA...etc.

La multiplication des opérations d'achat et de vente génère des frais qui diminuent la performance de portefeuille. De plus, il faut être capable de suivre chaque jour toutes les valeurs de son portefeuille et de prendre les bonnes décisions.

La gestion et la détention sur le temps d'actions ou d'OPCVM doit être privilégiée, car l'allongement de l'horizon de placement et la diversification sont les réponses adaptée au risque des actions. Une diversification en action permet d'espérer sur le long terme un potentiel de rendement attractif. C'est ainsi que l'utilisation des différents supports contribuant plus à l'optimisation de l'investissement en actions : le Plan d'Epargne en Action (PEA), assurance vie, plan d'épargne entreprise ...

2.3. Constitution d'un portefeuille composé d'actif risqué et un actif sans risque

2.3.1. Définition d'un actif sans risque : dans la théorie de portefeuille, l'actif sans risque est un titre qui offre un taux de rentabilité certain, compte tenu de l'unité choisie et de la longueur de l'horizon de décision. Ainsi, l'espérance de rentabilité d'un actif sans risque est égale au taux de rentabilité de ce même actif avec une probabilité de 100%. Autrement dit, l'actif sans risque, comme son nom l'indique, ne comporte pas de risque, c'est à dire: son écart type (sa variance) est égal à zéro.

On note :

$$E(r_S) = r_S$$

$$\sigma_S = 0$$

2.3.2. Combinaison d'un actif risqué et d'un actif sans risque dans un portefeuille

Appelons " x" la proportion investis dans l'actif risqué. La proportion restante, *(1-x)* représente donc l'investissement dans l'actif non risqué. Nous déduisons la relation existante entre la rentabilité espérée du portefeuille par rapport à la proportion investie dans l'actif risqué comme suit :

$$E(r)_P = xE(r_R) + (1-x)E(r_s)$$

Avec

$$E(r_s) = r_S$$

D'où

$$E(r)_P = r_S + x\ (E(r_R) - r_s) \ldots\ldots (1)$$

Où

$E(r_R)$: Représente la rentabilité espérée de l'actif risqué

r_S : Exprime le taux sans risque

x : représente la proportion investie dans l'actif risqué

$(E(r_R) - r_s)$: expression de la prime de risque que nous expliquerons dans la suite de ce cours.

Comment relier le risque de ce portefeuille (l'écart type ou la variance) à la proportion investie dans l'actif risqué ?

Nous suivons le même raisonnement que précédent et nous écrivons :

Lorsqu'on combine un actif risqué et un actif sans risque dans un portefeuille, le risque total du portefeuille est égal à la moyenne des écarts types des actifs, pondérée par le poids dans ce portefeuille. Supposons que $\sigma_R\ est\ l'écarttype\ de\ l'actifrisqu$é, nous exprimons l'écart type total du portefeuille σ_p :

$$\sigma_p = x.\sigma_R + (1 - x) * 0$$

Sachant que l'écart type de l'actif sans risque est égal à zéro.

D'où

$$\sigma_p = x.\sigma_R \ldots\ldots (2)$$

Enfin nous pouvons déduire la relation existante entre le risque de portefeuille σ_p et sa rentabilité espérée $E(r_P)$.

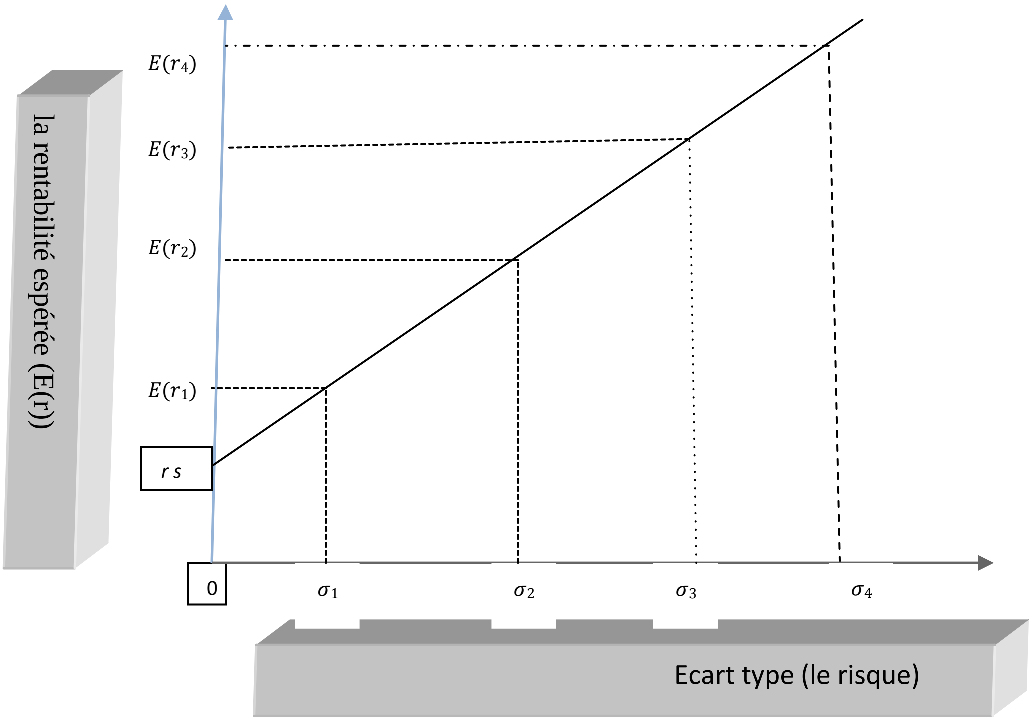
à partir de l'équation (2), nous écrivons :

$$x = {}^{\sigma_p}/_{\sigma_R}$$

En remplaçant *x* dans l'équation 1 précédente, nous obtenons :

$$E(r_P) = \frac{E(r_R) - r_s}{\sigma_R}\sigma_p + r_s \ldots. (3)$$

La représentation graphique approximative de cette droite est donnée comme suit :



la droite de ce graphique est de type $a\ x\ +b$. Le *"a"* mesure la pente de la droite et le b est le taux de rentabilité de l'actif sans risque :

$$a = \frac{E(r_R) - r_s}{\sigma_R}\ et\ b = r_s$$

La pente de cette droite *(a)* mesure la rentabilité supplémentaire obtenue par unité de risque supplémentaire que l'on est prêt à prendre. b: est le niveau de la rentabilité espérée lorsque le risque est nul (écart type est égal à zéro)

Cette pente est également assimilée au **ratio de Sharpe**. Ce dernier est mis en place en 1966 par William Forsyth Sharpe, un économiste américain, le ratio de Sharpe permet de mesurer la rentabilité d'un portefeuille en fonction du risque pris. En effet, pour lui, la moyenne des rentabilités ne suffit pas à effectuer une mesure exacte de la performance.

- Si le ratio est négatif, on en conclut que le portefeuille sous performe un placement sans risque et donc il n'est pas logique d'investir dans un tel portefeuille.
- Si le ratio est compris entre 0 et 1, cela signifie que l'excédent de rendement par rapport au taux sans risque est plus faible que le risque pris.

- Si le ratio est supérieur à 1, alors le portefeuille surperforme un placement sans risque et donc il génère une plus forte rentabilité.

Ainsi, on en conclut que plus le ratio est élevé et plus le portefeuille est performant.

2.4. Constitution d'un portefeuille constitué de deux actifs risqués

Lorsqu'on combine deux actifs risqués dans un portefeuille, l'analyse du couple risque /rentabilité est un peu différente de la situation précédente avec un portefeuille composé d'actif risqué et son risque. La rentabilité moyenne de portefeuille composé de x comme proportion d'actif risqué 1 et *(1-x)* proportion d'actif risqué 2, es donnée par la formule suivante :

$$E(r)_P = xE(r_{R1}) + (1-x)E(r_{R2}) \dots (1)$$

La formule de l'écart type se décline de forme générale de la variance, avec

$$Var\ (R1, R2) = \delta^2$$

$$\delta^2 = (x.\sigma_{R1} + (1-x) * \sigma_{R2})^2$$

$$(\delta^2)_p = x^2 * (\sigma_{R1})^2 + (1-x)^2 * (\sigma_{R2})^2 + 2x * (1-x) * \sigma_{R1}\,\sigma_{R2} * Corr..(2)$$

Avec :

δ^2: La variance du portefeuille

σ_{R1} : Ecart type de l'actif risqué 1

σ_{R2} : Ecart type de l'actif risqué 2

x et *(1-x) :* les proportions investis dans les deux actifs risqués 1 et 2

Corr: le coefficient de corrélation des deux actif risqués 1 et 2, exprime le degré de dépendance entre les rendements

$\sigma_{R1}\,\sigma_{R2} * Corr$: est une expression de la covariance

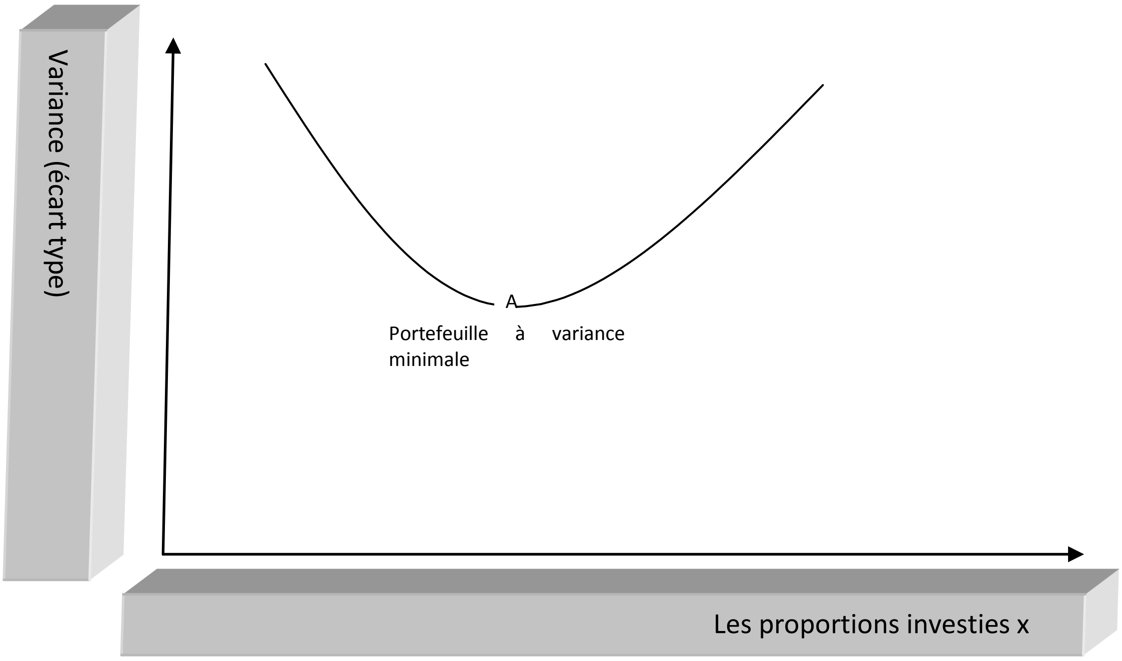
Nous déduisons trois situations possibles par rapport au coefficient de corrélation :

Cas 1 : Deux actions dont les rendements sont totalement indépendants présenteront un coefficient de corrélation entre les rentabilités qui sera égal à zéro.

En effet, lorsque la corr= 0, l'expression 2, se réduit :

$$(\delta^2)_p = x^2 * (\sigma_{R1})^2 + (1-x)^2 * (\sigma_{R2})^2 \dots. (3)$$

Le graphique de cette expression est une parabole, selon la présentation suivante :



Le point A est un portefeuille à variance minimale : Si on augmente la proportion invertie dans l'actif risqué 1, en réduisant celle de l'actif risqué 2 (*1-x).* Nous constatons que le risque diminue. Il continue de diminuer jusqu'au portefeuille A (voir le schéma ci dessous). Ce portefeuille A est un portefeuille risqué qui présente le risque minimum. Il est appelé **portefeuille à variance minimale**. La composition de ce portefeuille peut être identifiée par l'annulation de la dérivée primaire de l'équation de la variance (3). On écrit :

$$\frac{d\delta^2}{dx}.\frac{x}{\delta^2} = 2({\delta^2}_{(R1)} + {\delta^2}_{(R2)}).\,x - 2{\delta^2}_{(R2)}\text{......(4)}$$

La variance est minimale lorsque l'équation (4) = 0

On déduit que la composition (*x) et (1-x) du portefeuille à variance minimale est égale :*

$$x = \frac{{\delta^2}_{(R2)}}{\delta^2{}_{(R1)} + \delta^2{}_{(R2)}}$$

Cas 2 : Deux actions dont les rendements évoluent dans le même sens et présentent un comportement identique auront un coefficient de corrélation qui est unitaire (égal à 1). Nous parlons alors d'un rendement parfaitement corrélé : Corr (R1, R2) = 1 (100%)

La variance du portefeuille se ramène alors :

$$(\delta^2)_p = x^2 * (\sigma_{R1})^2 + (1-x)^2 * (\sigma_{R2})^2 + 2x * (1-x) * \sigma_{R1}\,\sigma_{R2} * 1$$
$$= (x.\sigma_{R1} + (1-x) * \sigma_{R2})^2$$

Le risque du portefeuille est totalement éliminé lorsque:

$$x.\sigma_{R1} + (1-x) * \sigma_{R2} = 0$$

$$\frac{x}{(1-x)} = -\frac{\sigma_{R2}}{\sigma_{R1}}$$

Cas3 : Deux actions dont les rendements évoluent dans deux sens opposés, la baisse des rendements d'un titre seront compensés par les hausses de l'autre titre et si la relation inverse est parfaite, les deux titres auront un coefficient de corrélation entre les rendements de chacun des titres qui sera égal à -1. Nous parlons dans ce cas de rendements inversement corrélés :

le risque du portefeuille devient alors:

$$(\delta^2)_p = x^2 * (\sigma_{R1})^2 + (1-x)^2 * (\sigma_{R2})^2 + 2x * (1-x) * \sigma_{R1}\,\sigma_{R2} * (-1)$$
$$= (x.\sigma_{R1} - (1-x) * \sigma_{R2})^2$$

Dans ce cas de figure, le risque est éliminé si les proportions *x et (1-x),* sont telles que :

$$\frac{x}{(1-x)} = \frac{\sigma_{R2}}{\sigma_{R1}}$$

Chapitre 3: Le Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

Dans sa conception la plus simple, le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF) ou Capital Asset Pricing Model (CAPM), montre que seule l'exposition au risque de marché (risque systématique) est rémunérée, les autres formes de risque peuvent être éliminées. C'est à dire le risque spécifique peut être éliminé par la diversification. Ainsi, la condition d'équilibre de marché est réalisée par l'adéquation de l'offre et de la demande de l'ensemble de tous les titres qui forment le portefeuille de marché. Comme tous les investisseurs sont supposés rationnels et détiennent les mêmes informations et les mêmes anticipations sur la valeur des actifs financiers, ils détiennent tous le même portefeuille d'actifs risqués. Ce dernier portefeuille coïncide donc avec le portefeuille de marché.

1. Définition du portefeuille de marché

Un portefeuille dans lequel les actifs sont détenus en proportion de leur valeur de marché est appelé le portefeuille de marché : c'est à dire la composition de ce portefeuille de marché reflète les offres de titres qui sont évaluées à leur valeur de marché.

Exemple :

pour simplifier, imaginons que le marché boursier est composé de trois titres, comme suite : L'action CEVITAL (actif risqué), Action RENAULT (actif risqué) et un Actif sans risque. La valeur de marché de ces titres est indiquée dans le tableau ci- dessous.

Les titres	CEVITAL	RENAULT	Actif sans risque	Total
La valeur de marché	66 Mrds	22 Mds	12 Mds	100 Mds
La composition de PF de marché	66%	22%	12%	100%
La composition de la partie risquée du PF de marché	66/(66+22)= 0.75 (75%)	22/ (66+22)= 0.25 (25%)		

Le MEDAF suppose qu'à l'équilibre, chaque investisseur détiendra la même proportion d'actifs risqués que dans le portefeuille de marché. Cependant, en fonction de leur degré d'aversion au risque, ils ne détiendront pas la même proportion d'actif sans risque.

Revenons à notre exemple précédent et supposons que deux investisseurs 1 et 2, chacun disposant de 100 000 Um à investir et choisissent d'investir leurs capital en bourse. Ces deux investisseurs ont les mêmes informations sur les titres sauf que :

- L'investisseur 1 a une aversion au risque qui est égale à la moyenne de celle de tous les investisseurs et détient donc les titres dans les mêmes proportions que le marché.
- L'investisseurs 2 a plus d'aversion au risque que le moyenne de marché, et choisit donc d'investir deux fois plus que l'investisseur 1 dans l'actif sans risque.

Question

Comment, ces deux investisseurs répartiront-ils leurs richesses entre les actifs risqués (Cevital et Renault) et l'actif sans risque ?

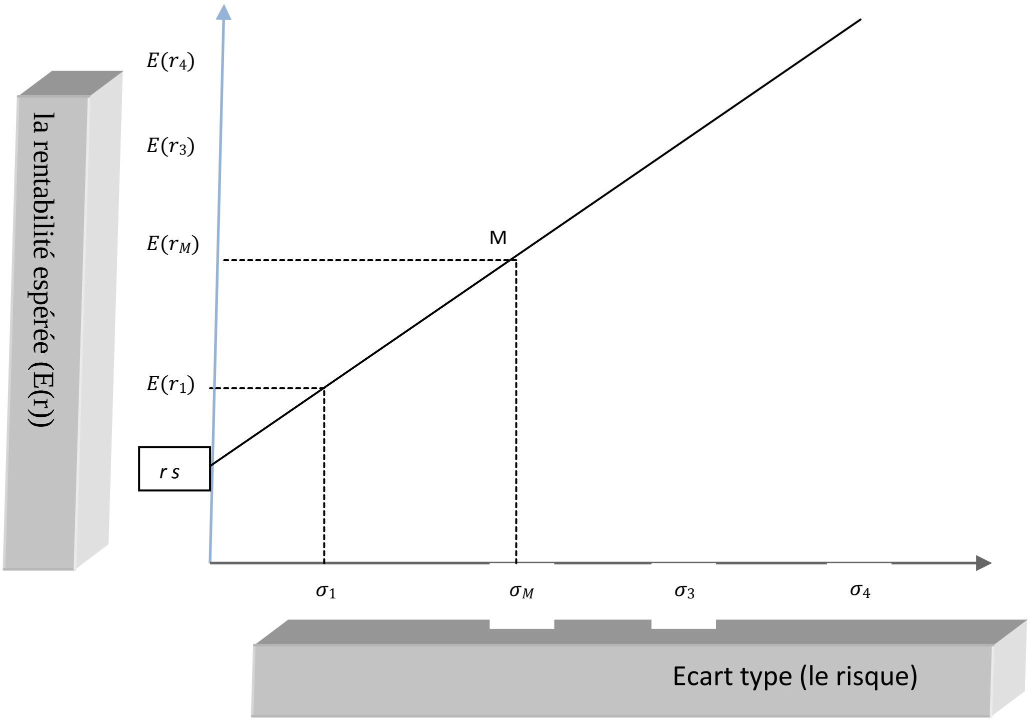
Les titres	Cevital	Renault	Actif sans risque	La valeur totale
Investisseur 1	88000*0.75 = 66000	88000 *0.25= 22000 UM	**12000** Um	100000
Investisseur 2	76000*0.75 = 57000	76000* 0.25= 19000	**24000 Um**	

Ainsi nous constatons que les deux investisseurs, compte tenu de leur degré d'aversion au risque, détiennent chacun trois fois plus d'actions Cevital que d'actions Renault. Au final, les investisseurs détiennent tous la même proportion d'actifs risqués que dans le portefeuille de marché.

2.La droite de marché

Le MEDAF suppose qu'é l'équilibre, la droite de marché représente les meilleures combinaisons du risque rentabilité pour les investisseurs. Lorsqu'u investisseur s'efforce de battre le marché, l'offre et la demande vont influer sur les prix des actifs et les portefeuilles réalisés se retrouveront tous sur cette droite.

La formule de droite de marché est identique à celle que nous avons identifiée dans le chapitre 2. Il s'agit d'une équation que reliée la rentabilité espéré à l'écart-type dans le cadre de portefeuille composé d'actif risqué et sans risque.



La formule de la droite de marché au point M (le portefeuille de marché) est :

$$E(r_P) = \frac{E(r_M) - r_s}{\sigma_M}\sigma_p + r_s$$

la pente de cette droite est égale à la prime du risque de portefeuille de marché (par rapport au taux sans risque) divisé par l'écart de portefeuille de marché :

$pente = \frac{E(r_M) - r_s}{\sigma_M}$ qui est identique au ratio Sharpe que nous avons expliqué dans le chapitre 2

Il découle de ce raisonnement deux conséquences principales :

- Les investisseurs feraient aussi bien de combiner passivement l'actif sans risque et un fonds indexé qui détient des actifs risqués exactement dans les mêmes proportions que le portefeuille de marché
- La prime de risque, lorsqu'elle est positive, ne dépend pas du risque spécifique de l'actif lui même. Ainsi, à l'équilibre les investisseurs obtiennent une rentabilité supérieure uniquement parce qu'ils supportent le risque du portefeuille du marché

(c'est à dire le risque systématique). Par conséquent, le marché ne rémunère par les investisseurs qui prennent d'autres risques que le risque du marché. En effet, les autres

- risques (risques spécifiques) pourraient être annulés par la diversification efficiente.

3. La prime de risque selon le MEDAF

Selon le MEDAF la prime de risque du portefeuille de marché (la prime de marché) dépend de deux paramètres :

- le degré d'version au risque des investisseurs
- la volatilité des rentabilités de marché

Ainsi, la prime de marché à l'équilibre est égale au degré d'aversion au risque pondéré par la variance du portefeuille de marché. On écrit :

$$E(r_M) - r_s = D.\sigma_M{}^2$$

D: est le degré d'aversion au risque de l'investisseur sur un marché

4. le Bêta du MEDAF

il est important de signaler que dans le cadre de MEDAF, l'écart type n'est pas la mesure souvent utilisée pour identifier le risque. Le risque d'un actif donné est mesuré par son Bêta. Il s'agit de la mesure de sensibilité de la rentabilité d'un actif par rapport à la rentabilité du marché. La formule globale du bêta pour le titre *i* est donnée par:

$$B_{\mathrm{i}} = \frac{Cov(\mathrm{i}, M)}{\sigma_M{}^2}$$

avec;

Cov(i, M): indique la covariance de titre i par rapport au portefeuille de marché.

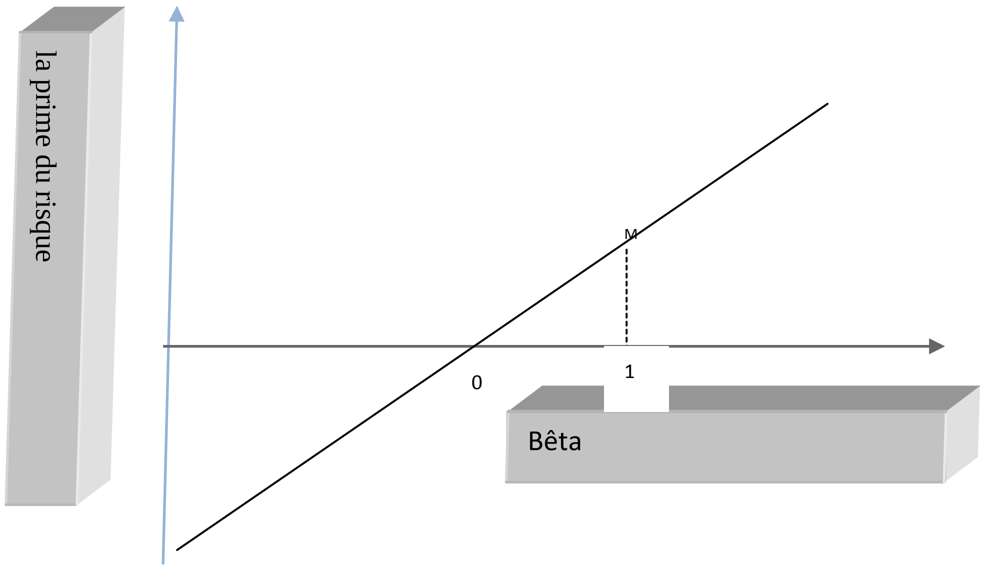
Dans le cadre de MEDAF la relation entre la prime de risque sur un actif donné, à l'équilibre, est donnée par la formule suivante :

$(E(r_{\mathrm{i}}) - r_s) = B_{\mathrm{i}} * (E(r_M - r_s) \ldots.(5)$

Cette équation est appelée ***Equation du MEDAF,*** elle indique, à l'équilibre, la prime du risque d'un actif donné *i* est égale à son bêta multiplié par la prime de marché.

5. La droite du MEDAF

Nous pouvons déduire la droite du MEDAF à partir de l'équation (5) du MEDAF précédente:



6. Interprétation du coefficient Bêta du MEDAF

Le coefficient bêta mesure dans le cadre du MEDAF, la relation qui existe entre les variations de rentabilité de l'actif "i" et les variations de l'indice de marché. C'est donc une mesure de sensibilité des fluctuations de la valeur de l'actif à celles du marché. Nous déduisons trois situations possibles selon ce coefficient"β".

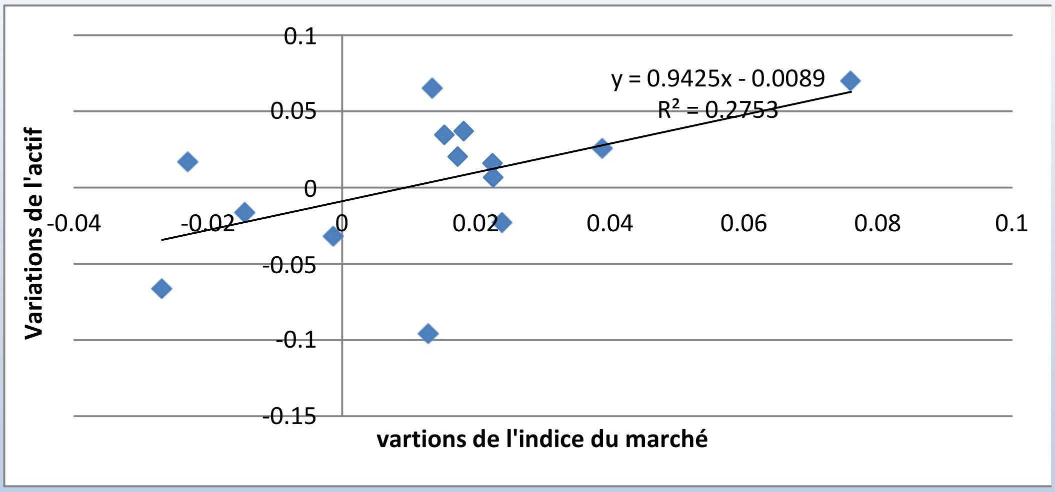
- Les entreprises avec un β supérieur à 1 tendent à amplifier les fluctuations du marché et apparaissent donc plus risquées. Ces entreprises détiennent donc un portefeuille des titres dits (agressifs) ou dynamiques.

- Les entreprises avec un β inférieur à 1 sont appelées des entreprises à portefeuille de titres défensifs et auront des amplitudes de variations moindres que celles du marché.

- Les entreprises avec un β égale à 1 sont des entreprises à risque moyen. Les titres de ces entreprises suivent l'évolution de la rentabilité de l'indice du marché.

Illustration : L'estimation du coefficient β, selon le MEDAF

L'estimation du bêta repose sur une analyse historique des relations entre les fluctuations du cours d'une action et celles du marché. Ces relations sont représentées graphiquement dans un nuage de points et ajustées par une droite déterminée graphiquement ou statistiquement par la méthode des moindres carrés ordinaires. Selon l'exemple suivant :



Analyse

Nous relevons de la présentation graphique les caractéristiques suivantes

- La droite qui ajuste le mieux les points est la droite de régression de l'entreprise, a comme l'expression économétrique suivante :

$$R_{i,t} = a_i + \beta_i * Prime_{M,t} + s_{it} \quad (11)$$

"αi, l'ordonnée à l'origine, représente la rentabilité espérée du titre lorsque la rentabilité du marché est nulle.

βi, par définition ce coefficient mesure la sensibilité de la rentabilité d'un actif par rapport à la rentabilité du marché. La pente de la droite, est donc la mesure du coefficient bêta, appelée aussi risque systématique du titre

s_{it} est un terme d'erreur. L'écart-type de ce terme d'erreur est une mesure de risque spécifique du titre. Cette mesure signale que le marché n'explique pas parfaitement les variations du titre et qu'il existe des facteurs propres à la société, comme la qualité du management, qui expliquent le risque de l'investissement", (CHERIF et DUBREUILLEC, 2009).

R^2, qui juge la qualité d'estimation de la régression. Il évolue entre 0 et 100 % et signale dans notre exemple que 27,53% des variations du titre sont expliquées par les variations du marché.

Le coefficient β du titre i peut être aussi obtenu par le rapport entre la covariance de rentabilité i et la rentabilité du marché sur la variance de rentabilité de l'indice de marché. On écrit alors :

$$\beta_{\mathrm{i}} = \frac{cov\ (\mathrm{i}, m)}{ðm^2}$$