Université A/MIRA de Béjaia	Année : 2015-2016
Faculté : ST	TD de Maths 3 : Série №1.
Départements : G.C et ELN .	

Exercice №1 : Intervertir l'ordre d'intégration dans les intégrales suivantes :

1) $\int_1^2 \left[\int_{-3}^2 f(x,y)dy\right] dx$ 2) $\int_{-1}^0 \left[\int_{2x}^{-x} f(x,y)dy\right] dx$ 3) $\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right] dy$

4) $\int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx\right] dy$ 5) $\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right] dx.$

Exercice №2 : Calculer, par deux méthodes différentes, les intégrales suivantes :

1) $\int\int_D xydxdy$, où $D = \{(x,y)$ tel que $-1 \leq x \leq 1$ et $x^2 \leq y \leq 3\}$.

2) $\int\int_D xdxdy$, où $D = \{(x,y)$ tel que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $-x \leq y \leq \sin x\}$.

3) $\int\int_D ydxdy$, où D est délimité par les droites $y = x$, $y = -x$ et le graphe d'équation $y = \sqrt{4-x^2}$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Exercice №3 :

1) Calculer l'aire de la figure délimité par la parabole $y^2 = 2x$ et la droite $y = x$.

2)Calculer l'aire de la figure délimité par la courbe d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ et la droite définie par $y + x = 4$.

3) Calculer l'aire de la partie du cone $x^2+y^2 = z^2$ découpée par le cylindre $x^2+y^2 = 2x$.

4) Calculer l'aire de la surface sphérique $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ découpée par le cylindre d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$.

Solution :

1) $\int_1^2 \left[\int_{-3}^2 f(x,y)dy\right] dx = \int_{-3}^2 \left[\int_1^2 f(x,y)dx\right] dy.$

2) $\int_{-1}^0 \left[\int_{2x}^{-x} f(x,y)dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_{-1}^{-y} f(x,y)dx\right] dy + \int_{-2}^0 \left[\int_{-1}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx\right] dy.$

3) $\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right] dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right] dx.$

4) $\int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{4y-y2}} f(x,y)dx\right] dy = \int_0^2 \left[\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^2 f(x,y)dy\right] dx.$

5) $\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right] dy.$

Solution exo2 :

Première intégrale.

Méthode 1 :

On pose $\int\int_D xydxdy = A$.

$$1)A = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{3} xydy\right]dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{\left(x\frac{9-x^4}{2}\right)}_{\text{résultat de l'intégrale entre croché}} dx = 0.$$

Méthode 2 :

Dans cette situation, le domaine d'intégration sus-cité n'est pas régulier.

$$1)A = \int_{1}^{3}\left[\int_{-1}^{1} xydx\right]dy + \int_{0}^{1}\left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xydx\right]dy =$$

Comme $\int_{-1}^{1} xydx = 0$, et $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xydx = 0$, donc $A = 0$.

Deuxième intégrale.

Méthode 1 :

On pose $\int\int_D xdxdy = B$.

$1)B = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{-x}^{\sin x} xdy\right]dx$, Calculons l'intégrale entre croché.

$$\int_{-x}^{\sin x} xdy = x(\sin x + x).$$

$$B = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(x\sin x + x^2\right)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2dx = -x\cos x + \sin x + \frac{x^3}{3}|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$B = \frac{\pi^3}{24} + 1.$$

Méthode 2 :

Dans cette situation, le domaine d'intégration sus-cité n'est pas régulier car il est limité par trois graphes d'équations $x = \arcsin y$, $x = -y$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}1)B &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left[\int_{-y}^{\frac{\pi}{2}} xdx\right]dy + \int_{0}^{1}\left[\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} xdx\right]dy.\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left[\frac{\pi^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right]dy + \int_{0}^{1}\left[\frac{\pi^2}{8} - \frac{(\arcsin y)^2}{2}\right]dy.\\ &= \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(\arcsin y)^2dy.\end{aligned}$$

Deux fois par partie :

$$\int_0^1 (\arcsin y)^2 dy = y(\arcsin y)^2 + 2\sqrt{1-y^2}\arcsin y - 2 \ \ |_0^1 \ = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Ce qui donne, $B = \dfrac{\pi^3}{24} + 1.$

troisième intégrale.

Methode 1 :

On pose : $C = \displaystyle\int\int_D ydxdy$

Dans cette situation, le domaine d'intégration sus-cité n'est pas régulier car il est limité par trois graphes d'équations $y = x,\ y = -x$ et $y = \sqrt{4-x^2}$, pour cela on partage le domaine D en deux domaines réguliers D_1 et D_2 tel que :

$$D_1 = \left\{(x,y) \text{ tel que } -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \text{ et } -x \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \text{ tel que } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ et } x \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$$

$$\int\int_D ydxdy = \int\int_{D_1} ydxdy + \int\int_{D_2} ydxdy$$

$$C = \int_{-\sqrt{2}}^{0}\left[\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} ydy\right]dx + \int_0^{\sqrt{2}}\left[\int_x^{\sqrt{4-x^2}} ydy\right]dx,$$

$$C = \int_{-\sqrt{2}}^{0}\left[2-x^2\right]dx + \int_0^{\sqrt{2}}\left[2-x^2\right]dx$$

$$C = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Méthode 2 :

De même, dans cette situation, le domaine d'intégration sus-cité n'est pas régulier car il est limité par quatre graphes d'équations $x = -y,\ x = y,\ x = -\sqrt{4-y^2}$ et $x = \sqrt{4-y^2}$, pour cela on
partage le domaine D en deux domaines réguliers D_1 et D_2 tel que :

$$D_1 = \left\{(x,y) \text{ tel que } -y \leq x \leq y \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{2}\right\}$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \text{ tel que } -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \text{ et } \sqrt{2} \leq y \leq 2\right\}$$

Par conséquent,

$$\int\int_D ydxdy = \int\int_{D_1} ydxdy + \int\int_{D_2} ydxdy$$

$$C = \int_0^{\sqrt{2}}\left[\int_{-y}^{y} ydx\right]dy + \int_{\sqrt{2}}^{2}\left[\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} ydx\right]dy.$$

$C=\int_0^{\sqrt{2}}\left[2y^2\right]dy+\int_{\sqrt{2}}^{2}\left[2y\sqrt{4-y^2}\right]dy.$

$C=\frac{4\sqrt{2}}{3}+\int_{\sqrt{2}}^{2}\left[2y\sqrt{4-y^2}\right]dy.$

Pour calculer $\int_{\sqrt{2}}^{2}\left[2y\sqrt{4-y^2}\right]dy$, on pose $y=2\sin t$.

cette intégrale se ramène à la forme suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{2}\left[2y\sqrt{4-y^2}\right]dy &= 16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^2\sin t\ dt\\ &= -16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^2 d(\cos t)\\ &= \frac{-16}{3}(\cos t)^3 \quad |_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Ce qui fait, $C=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Solution Exo 3 :

Considérons la surface D définie comme suit :

1) $D=\left\{(x,y) \text{ tel que } 0\leq x\leq 2 \text{ et } x\leq y\leq\sqrt{2x}\right\}.$

$$\begin{aligned}\text{Aire}(D)=\int\int_D dxdy &= \int_0^2\left[\int_x^{\sqrt{2x}}dy\right]dx\\ &= \int_0^2(\sqrt{2x}-x)dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^2}{2}\quad|_0^2\end{aligned}$$

$\text{Aire}(D)=\frac{2}{3}.$

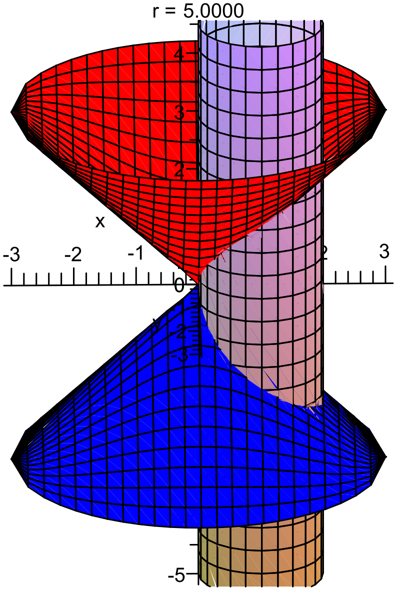
2) l'aire de la figure D délimité par la courbe d'équation $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ et la droite définie par $y+x=4$.

$D=\{(x,y) \text{ tel que } 0\leq x\leq 4 \text{ et } (2-\sqrt{x})^2\leq y\leq 4-x\}.$

$$\text{Aire}(D)=\int\int_D dxdy=\int_0^4\left[\int_{(2-\sqrt{x})^2}^{4-x}dy\right]dx$$

$$\text{Aire}(D)=\int\int_D dxdy=\int_0^4(4\sqrt{x}-2x)dx=\frac{8x\sqrt{x}}{3}-x^2\ |_0^4=\frac{16}{3}$$

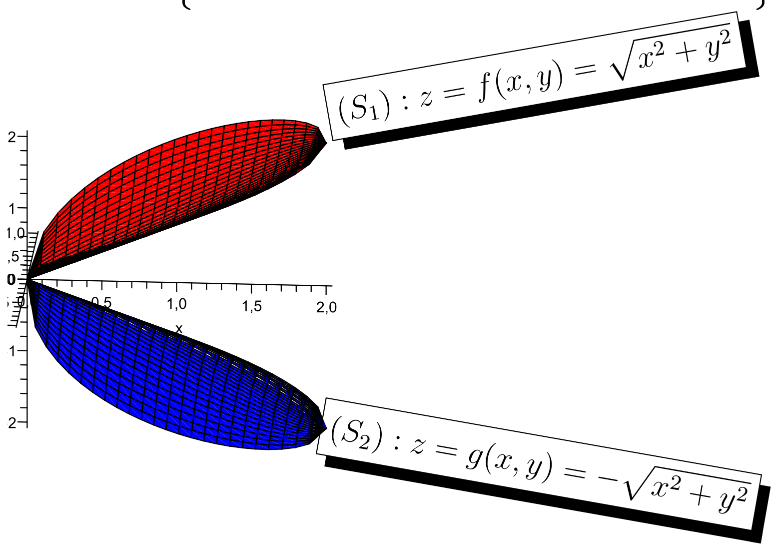
3) l'aire de la surface (gauche) S du cone $x^2+y^2=z^2$ découpée par le cylindre $x^2+y^2=2x$. la partie du cone(en rouge) est définie par l'équation $z=\sqrt{x^2+y^2}$,la partie du cone(en bleu) est définie par l'équation $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ voir le schema ci -dessous..



NB : le cylindre en question coupe le conne en deux surfaces symétriques S_1(surface rouge) et S_2(surface bleu) avec

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \text{ tel que } z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \text{ tel que } z = g(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$



Aire (S_1)=Aire (S_1). il suffit de calculer, par exemple, Aire (S_1).

L'équation $x^2+y^2=2x$ signifie $(x-1)^2+y^2=1$ (l'équation de la base du cylindre).

$$\text{Aire}(S_1)=\int\int_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy,$$

Où D la projection de S_1 sur le plan (OXY).

En outre, $D=$ disque de centre $(1,0)$ de rayon 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

D'où :

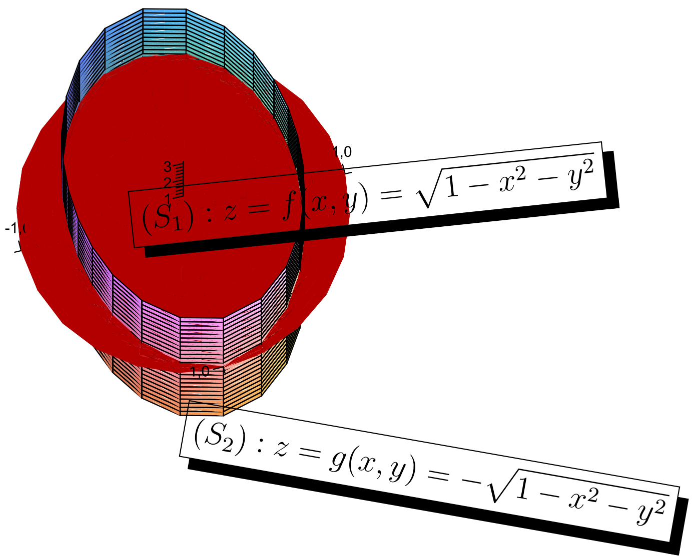
$$\begin{aligned}\text{Aire}(S_1)&=\int\int_D\sqrt{2}dxdy.\\ &=\sqrt{2}\int\int_D dxdy=\sqrt{2}\text{Aire}(D)=\pi\sqrt{2}.\end{aligned}$$

En fin, $\text{Aire}(S)=2\text{Aire}(S_1)=2\sqrt{2}\pi$.

4) l'aire de la surface sphérique $x^2+y^2+z^2=2$ découpée par le cylindre

$$x^2+2y^2=1. \tag{1}$$

Dans cette situation, le cylindre de base $x^2+2y^2=1$ coupe la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ en deux surfaces symétriques S_1 et S_2(celles qui se trouvent à l'intérieur du cylindre)



$$S_1=\left\{(x,y,z)\text{ tel que }z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

$$S_2=\left\{(x,y,z)\text{ tel que }z=g(x,y)=-\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

Aire (S_1)=Aire (S_1). il suffit de calculer, par exemple, Aire (S_1).

$$\text{Aire}(S_1) = \int\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy,$$

Où D la projection de S_1 sur le plan (OXY).

En outre, D = domaine fermé limité par l'ellipse d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$, autrement dit : $D = \{(x, y) \text{ tel que } x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

D'où :

$$\text{Aire}(S_1) = \int\int_D \sqrt{\frac{1}{1 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

Dans le but de calculer cette intégrale, on pose le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Dans ce cas, $\text{Aire}(S_1) = \displaystyle\int\int_D r\sqrt{\frac{1}{1 - r^2}} drd\theta.$

Le domaine D en coordonnées polaires est définie ainsi :

$$D = \left\{(\theta, r) \text{ tel que } 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}}\right\}.$$

$$\text{Aire}(S_1) = \int\int_D r\sqrt{\frac{1}{1 - r^2}} drd\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}}} r\sqrt{\frac{1}{1 - r^2}} dr\right] d\theta.$$

L'intégrale entre croché :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}}} r\sqrt{\frac{1}{1 - r^2}} dr = -\sqrt{1 - r^2} \quad |_0^{\frac{1}{\sqrt{cos^2\theta + 2\sin^2\theta}}} = \frac{-\sin\theta}{\sqrt{cos^2\theta + 2\sin^2\theta}} + 1.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(S_1) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin\theta}{\sqrt{cos^2\theta + 2\sin^2\theta}} + 1\right) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin\theta}{\sqrt{2 - \cos^2\theta}} + 1\right) d\theta. \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\cos\theta}{\sqrt{2 - \cos^2\theta}} + \int_0^{2\pi} 1 d\theta. \end{aligned}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\cos\theta}{\sqrt{2 - \cos^2\theta}}$ possède la forme $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dX}{\sqrt{2 - X^2}}$

Pour calculer cette intégrale poser $X = \sqrt{2}\sin t$.

Il n'y a rien de plus sérieux qu'un enfant qui joue. Jeu après jeu, l'enfant devient « je ».