

Série de TD N° 2 d'Analyse 4 (Partie 1)

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions suivantes.

$$f_1(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\sqrt{y}}, \quad f_2(x, y) = \frac{\ln y}{\sqrt{x - y}}, \quad f_3(x, y, z) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{yz}, \quad f_4(x, y) = \sqrt{4x - x^2 + 4y - y^2}.$$

Exercice 2. Calculer la limite si elle existe ou montrer qu'elle n'existe pas dans les cas suivants :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y \sin(x+1)}{x^2 - 1}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}.$$

Exercice 3. Montrer que la fonction suivante n'est pas continue sur \mathbb{R}^2 .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \ln(1 + x^2)}{y(x^2 + y^2)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 4. 1. La fonction suivante est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. Préciser le domaine de définition et le domaine de continuité de la fonction f définie par $f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$.

Exercice 5. 1. Peut-on prolonger par continuité au point $(0, 0)$ la fonction suivante, qui est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $f(x, y) = \frac{\sin xy}{|x| + |y|}$.

2. Peut-on prolonger par continuité au point $(2, 0)$ la fonction suivante, qui est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2, 0)\}$ par $f(x, y) = \frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$.

Exercice 6. 1. Discutez quand $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$ de la continuité au point $(0, 0)$ de la fonction

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y^2}{|x|^3 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. Trouvez une condition (la plus générale possible) sur α, β et γ pour que f_2 soit continue sur \mathbb{R}^2

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2 + y^2)^\gamma} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$