Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes L2
Département de Recherche Opérationnele

Série TD n°2 Analyse complexe (2023-2024)

Exercice 1 :

Soit $f(z) = z^2$

$$g(z) = \begin{cases} z^2 & si \quad z \neq i \\ 0 & si \quad z = i \end{cases}$$

1- Calculer $\lim\limits_{z \to i} f(z)$ et $\lim\limits_{z \to i} g(z)$.

2- Montrer que la fonction $h(z) = \dfrac{z}{|z|}$ n'admet pas de limite au point $z = 0$.

Exercice 2 :

1- Etudier la continuité des fonctions $f(z) = z^2$; $g(z) = \begin{cases} z^2 & si \quad z \neq i \\ 0 & si \quad z = i \end{cases}$

Exercice 3 :

a) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{z \to -i\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$ n'existe pas.

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante: $2\cos(z) - e^{-iz} = 1 + 2i.$

Exercice 5 :

Calculer a) $\text{Log}\,(1+i)$, b) i^i, c) $(1-i)^{3-3i}$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation suivante: $e^z = -2.$

Exercice 7 :

Montrer que la fonction f définie dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$, est seulement dérivable au point $z = 0$. Calculer $f'(0)$.

Exercice 8 :

À l'aide de la définition calculer la dérivée de $f(z) = z^2 - z$.

Exercice 9 :

Montrer que les fonctions complexes suivantes ne sont pas dérivables aux points indiqués.

a) $f(z) = \overline{z}$, pour $z \in \mathbb{C}$, b) $f(z) = \mathrm{Re}\, z$, pour $z \in \mathbb{C}$, c) $f(z) = \mathrm{Im}\, z$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 10 :

Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes sur le domaine indiqué.

a) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin y)$, sur $\mathbb{C}$, b) $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

c) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$, sur $\mathbb{C}$, d) $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$, sur $\mathbb{C}$.

Exercce 11 :

Soit $g : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

La fonction g est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$?