Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes L2
Département de Recherche Opérationnele

Solution de la série TD n°2 Analyse complexe

Exercice 1:

1- On a: $\lim\limits_{z\to i} f(z) = \lim\limits_{z\to i} z^2 = i^2 = -1$

$$\lim_{z\to i} g(z) = \lim_{z\to i} z^2 = i^2 = -1.$$

2- on a,

$$\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|} = \lim_{z\to 0} \frac{|z|\, e^{i\arg(z)}}{|z|} = \lim_{z\to 0} e^{i\arg(z)} = e^{i\arg(z)}$$

on voit que la limite de $h(z)$ quand z tend vers 0 dépent de l' argument de z

et donc la limite de $h(z)$ quand z tend vers 0 n'existe pas.

Exercice 2:

1- Comme $\lim\limits_{z\to i} f(z) = \lim\limits_{z\to i} z^2 = i^2 = -1 = f(i)$ *alors f est continue au point $z = i$.*

Comme $\lim\limits_{z\to i} g(z) = \lim\limits_{z\to i} z^2 = i^2 = -1 \neq 0 = g(i)$ *alors g n'est pas continue au point $z = i$.*

Exercice 3:

a) $\lim\limits_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i} = \dfrac{e^{-i\pi}+1}{e^{-i\frac{\pi}{2}}+i} = \dfrac{-1+1}{-i+i} = \dfrac{0}{0}$ forme indéterminée.

Par décomposition de numérateur $e^{2z}+1 = (e^z)^2 - i^2 = (e^z-i)(e^z+i)$ nous voyons que

$$\lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z+i} = \lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{(e^z-i)(e^z+i)}{e^z+i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} - i = -2i.$$

b) Si la limite existait elle serait indépendante de la façon dont z tend vers 0.

Si $z \to 0$ le long de l'axe des x, alors $y = 0$ et $z = x+iy = x$, $z = x-iy = x$; la limite cherchée est donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$.

Si $z \to 0$ le long de l'axe des y, alors $x = 0$ et $z = x+iy = iy$, $\overline{z} = x-iy = -iy$; la limite cherchée est $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-iy}{iy} = -1$.

Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont $z \to 0$, il n'y a pas de limite.

Exercice 4:

Par définition, nous avons $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Par conséquent,

$$2\cos(z) - e^{-iz} = 1 + 2i \qquad \Rightarrow \qquad 2\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} - e^{-iz} = 1 + 2i.$$

On obtient $e^{iz} = 1 + 2i$. Ce qui implique que

$$\begin{aligned} e^{iz} = 1 + 2i \;&\Rightarrow\; iz = \log(1 + 2i), \\ &\Rightarrow\; z = \frac{1}{i}\log(1 + 2i) = \frac{1}{i}\left(\ln(\sqrt{5}) + i\arctan(2) + 2k\pi i\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &\Rightarrow\; z = -i\ln(\sqrt{5}) + \arctan(2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercice 5:

a) $\operatorname{Log}(1+i) = \ln(|1+i|) + i\arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$

b) $i^i = e^{i\operatorname{Log} i} = e^{i(\ln|i| + i\arg i)} = e^{i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z}.$

c) $(1-i)^{3-3i} = e^{(3-3i)\operatorname{Log}(1-i)} = e^{(3-3i)\{\ln(|1-i|) + i\arg(1-i)\}}$

$$= e^{(3-3i)\left\{\ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}} = e^{3\ln\sqrt{2} + 3\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + 3i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \ln\sqrt{2}\right)}$$

Exercice 6:

Si $e^z = e^x\cos y + ie^x \sin y = -2$, alors $e^x \cos y = -2$ et $e^x \sin y = 0$.

Puisque $e^x > 0$, on aura $\sin y = 0$ ou $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc la première équation devient

$$e^x \cos(k\pi) = -2 \text{ ou } e^x = \frac{-2}{\cos(k\pi)} = \frac{-2}{(-1)^k} = 2(-1)^{k+1}.$$

Ceci est possible seulement si $k+1$ est un nombre pair. Dans ce cas $x = \ln 2$. Alors les racines de l'équation $e^z = -2$ sont $z_k = \ln 2 + i(1+2k)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7:

On a $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z) = (x+iy)x = x^2 + ixy = P(x,y) + iQ(x,y)$.

La fonction f *est de classe* $C^2(\mathbb{R}^2)$. *Cherchons les points* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *où les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x \\ 0 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Comme la fonction f *est de classe* $C^2(\mathbb{R}^2)$ *et que les conditions de Cauchy-Riemann ne sont vérifiées que par le seul point* $z = 0$, *elle est seulement dérivable au point* $z = 0$.
Calculons

$$f'(0) = \frac{\partial P}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = (0) + i(0) = 0.$$

Exercice 8:

Par définition, la dérivée en z_0 si elle existe est

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - z - (z_0^2 - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - z_0^2 - (z - z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0) - (z - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0 - 1)}{z - z_0} = 2z_0 -$$

La limite existe pour tout z_0 dans $\mathbb{C}$, donc la dérivée de f est donnée par

$$f'(z) = 2z - 1,\ z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 9:

Par définition, la fonction f n'est pas dérivable en z_0 si la limite $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ n'existe pas, i.e. la limite dépend de la manière dont z tend vers z_0.

a) Si $z = x + iy$, $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} \frac{x - iy - (x_0 - iy_0)}{x + iy - (x_0 + iy_0)}$.

Pour $y = y_0$ et $x \to x_0$, la limite cherchée est $\lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Pour $x = x_0$ et $y \to y_0$, la limite cherchée est $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{-i\,(y - y_0)}{i\,(y - y_0)} = -1$.

La limite obtenue dépendant de la façon dont $z \to z_0$, la dérivée n'existe pas i.e. la fonction f n'est dérivable en aucun point.

b) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{x - x_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}$.

Si $y = y_0$ et $x \to x_0$, la limite est $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Si $x = x_0$ et $y \to y_0$, la limite est $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{0}{iy - iy_0} = 0$.

c) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{y - y_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}$.

Si $y = y_0$ et $x \to x_0$, la limite est $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{0}{x - x_0} = 0$.

Si $x = x_0$ et $y \to y_0$, la limite est $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{y - y_0}{iy - iy_0} = \dfrac{1}{i} = -i$.

Exercice 10:

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

a) $u = e^{-y}\cos x$ et $v = e^{-y}\sin y$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}\sin x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y}\sin y + e^{-y}\cos y$.

Il est claire que $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$, la première équation de Cauchy-Riemann n'est pas satisfaite. Alors la fonction f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

b) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Pour la même raison que celle qui précède f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

c) $u = x^2 - y^2,\ v = 2xy.\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x,\ \ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y.$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

d) $u = x^2 - y^2 - 2xy,\ \ v = x^2 - y^2 + 2xy$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y,\ \ \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2x,\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x,\ \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2y.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont ainsi satisfaites et la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 11:

Soit $g : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ définie par $g(x+iy) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Posons $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, et $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

Les dérivées partielles de u et v sont données par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{cases}$$

Nous remarquons que les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, c'est à dire,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$